

Рабочая программа составлена на основании федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению (специальности): 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ФГОС введен в действие приказом №228 от 12.03.2015 г. , дата утверждения: 14.04.2015 г.

Место дисциплины в структуре учебного плана: Блок 1, базовая

Рабочая программа разработана на основе компетентностной модели выпускника по направлению (специальности): 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

ПМт, протокол заседания кафедры №6 от 20.06.2017

Утверждена на совете факультета прикладной математики и информатики, протокол № 6 от 21.06.2017

Программу разработал:

доцент, к.т.н. Рояк С. Х.

Заведующий кафедрой:

профессор, д.т.н. Соловейчик Ю. Г.

Ответственный за образовательную программу:

заведующий кафедрой Соловейчик Ю. Г.

1. Внешние требования

Таблица 1.1

Компетенция ФГОС: ОПК.1 способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой; в части следующих результатов обучения:
з2. знать основы математического, функционального и комплексного анализа
у1. уметь применять основные методы математического анализа
Компетенция ФГОС: ОПК.3 способность к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям; в части следующих результатов обучения:
у1. уметь анализировать математические модели

2. Требования НГТУ к результатам освоения дисциплины

Таблица 2.1

Результаты изучения дисциплины по уровням освоения (иметь представление, знать, уметь, владеть)	Формы организации занятий
Функциональный анализ	
ОПК.1.з2 знать основы математического, функционального и комплексного анализа	
1.основные виды функциональных пространств: метрическое, линейное, нормированное, со скалярным произведением, полное, банахово, гильбертово	Лекции; Практические занятия; Самостоятельная работа
11.о разных видах сходимости	Лекции; Практические занятия
12.о пополнении пространств, пространствах Лебега и Соболева	Лекции; Самостоятельная работа
13.о линейных операторах и функционалах	Лекции; Практические занятия; Самостоятельная работа
14.об одномерных обобщенных функциях	Лекции
ОПК.1.у1 уметь применять основные методы математического анализа	
20.вычислять норму элемента, расстояние между элементами и скалярное произведение элементов в различных пространствах	Практические занятия; Самостоятельная работа
21.проверять линейность и ограниченность операторов, вычислять норму линейных ограниченных операторов в гильбертовых пространствах	Практические занятия
ОПК.3.у1 уметь анализировать математические модели	
22.исследовать на сходимость последовательности в различных пространствах	Практические занятия; Самостоятельная работа

3. Содержание и структура учебной дисциплины

Таблица 3.1

Темы лекций	Активные формы, час.	Часы	Ссылки на результаты обучения	Учебная деятельность
Семестр: 4				
Дидактическая единица: Метрические, линейные и нормированные пространства				

1. Метрические пространства.	0	3	1	Метрические пространства (МП). Сходимость в МП. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность метрики. Множества в МП: предельные и изолированные точки; внутренние, внешние и граничные точки. Замкнутые и открытые множества в МП и их свойства.
2. Линейные пространства.	0	1	1	Линейные пространства (ЛП). Аксиомы ЛП и их следствия. Линейно-зависимые элементы. Размерность ЛП. Базис ЛП. Изоморфизм конечномерных ЛП.
3. Нормированные пространства.	0	2	1	Нормированные пространства (ЛНП). Аксиомы нормы и полунормы. Обратное неравенство треугольника. Непрерывность нормы. Подчиненность норм. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном ЛНП.
4. Фундаментальность и сходимость в метрических и нормированных пространствах.	0	2	11	Фундаментальность и сходимость. Свойства фундаментальных и сходящихся последовательностей.
5. Полнота метрических и нормированных пространств.	0	2	12	Полные пространства. Теорема о вложенных шарах. Пополнение пространств. Пространства Лебега и Соболева.
Дидактическая единица: Пространства со скалярным произведением				
6. Евклидово пространство. Гильбертово пространство. Пространства Лебега, Соболева.	0	4	1, 11	Пространства со скалярным произведением (предгильбертовы пространства). Аксиомы скалярного произведения. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Сильная и слабая сходимость.
Дидактическая единица: Операторы и функционалы				
7. Линейные операторы и функционалы.	0	2	11, 13	Понятие оператора и функционала. Линейность, непрерывность и ограниченность оператора. Норма оператора. Теорема Рисса.

8. Обобщенные функции.	0	2	14	Обобщенные функции одной переменной: определение, свойства и примеры. Дифференцирование обобщенных функций.
------------------------	---	---	----	---

Таблица 3.2

Темы практических занятий	Активные формы, час.	Часы	Ссылки на результаты обучения	Учебная деятельность
Семестр: 4				
Дидактическая единица: Метрические, линейные и нормированные пространства				
11. Нормированные пространства.	2	4	1, 11, 20	Студенты знакомятся с основными пространствами векторов, последовательностей и функций. Проверяют аксиомы метрики (нормы).
12. Фундаментальность и сходимости в метрических и нормированных пространствах. Связь между сходимостью в различных нормированных пространствах.	2	4	1, 11, 20, 22	Студенты знакомятся с понятиями фундаментальной, сходящейся последовательности и примерами таких последовательностей; учатся исследовать последовательности на сходимости, фундаментальность, исследуют полноту некоторых пространств.
13. Множества в метрических пространствах. Подпространства метрических, линейных и нормированных пространств.	1	2	1	Студенты изучают понятия открытого, замкнутого множества, подпространства; учатся проверять является ли множество открытым, замкнутым и образует ли оно подпространство.
14. Полнота метрических и нормированных пространств.	0	2	1	Студент знакомится с основными примерами полных и неполных пространств, изучает свойства полных пространств.
Дидактическая единица: Пространства со скалярным произведением				
15. Пространства со скалярным произведением.	2	2	1, 20	Студенты изучают свойства скалярного произведения, некоторые пространства со скалярным произведением, знакомятся с процедурой ортогонализации линейно независимых систем.
Дидактическая единица: Операторы и функционалы				
16. Линейные операторы и функционалы.	0	4	13, 21	Студент проверяет наличие свойств: ограниченности, линейности и непрерывности для операторов; вычисляет норму оператора.

4. Самостоятельная работа обучающегося

№	Виды самостоятельной работы	Ссылки на результаты обучения	Часы на выполнение	Часы на консультации
Семестр: 4				
1	Контрольные работы	1, 12, 13, 20, 22	4	0
Повторение ранее изученного материала: Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975 . - Загл. с экрана.				
2	Подготовка к занятиям	1, 12, 13, 20	22	4
Изучение теоретического материала и решение задач: Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975 . - Загл. с экрана.				
3	Подготовка к аттестации	1, 12, 13, 20	4	0
Повторение изученного ранее теоретического материала согласно списку вопросов к зачету: Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975 . - Загл. с экрана.				

5. Технология обучения

Для организации и контроля самостоятельной работы обучающихся, а также проведения консультаций применяются информационно-коммуникационные технологии (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Деятельность	Информационно-коммуникационные технологии
Информирование	e-mail
Консультирование	e-mail
Размещение учебных материалов	e-mail; Среда электронного обучения НГТУ

Таблица 5.2

Активные и интерактивные формы проведения занятий

№	Наименование активных форм	Коды формируемых компетенций
1	Дискуссия	ОПК.1;
Формируемые умения: з2. знать основы математического, функционального и комплексного анализа		
Краткое описание применения: обсуждение методов решения задач, предварительно заданных на дом		

6. Правила аттестации обучающихся по учебной дисциплине

Для аттестации обучающихся по дисциплине используется балльно-рейтинговая система (БРС), позволяющая выставять оценки по традиционной шкале и 15-уровневой ECTS. Краткая информация о БРС приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Оцениваемые виды деятельности обучающихся	Мин. балл	Максимальный балл
Семестр: 4		
<i>Подготовка к занятиям:</i>	8	16
<i>Лекция:</i>	0	6
<i>Практические занятия:</i>	9	18
<i>Контрольные работы:</i>	23	40
Контролирующие материалы приводятся в "Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975 . - Загл. с экрана."		
<i>Зачет:</i>	10	20
Контролирующие материалы приводятся в "Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975 . - Загл. с экрана."		

В таблице 6.2 представлено соответствие форм контроля заявляемым требованиям к результатам освоения дисциплины.

Таблица 6.2

Коды компетенций ФГОС	Результаты обучения	Формы контроля	
		Контр. раб.	Зачет
ОПК.1	з2. знать основы математического, функционального и комплексного анализа	+	+
	у1. уметь применять основные методы математического анализа	+	+
ОПК.3	у1. уметь анализировать математические модели	+	+

Фонд оценочных средств по дисциплине представлен в приложении № 1 к рабочей программе.

7. Литература

Основная литература

1. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика : [учебное пособие] / В. И. Лебедев. - М., 2005. - 295 с.
2. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=556115> - Загл. с экрана.
3. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с.: 70х100 1/16. - (Высшее образование: Магистратура). (обложка) ISBN 978-5-16-006429-1, 1000 экз. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=377270> - Загл. с экрана.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ : [учебник для студентов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика"] / В. А. Треногин. - М., 2007. - 488 с. : ил. - Библиогр.: с. 482-483.-Предм. указ.: с. 484-488.

Дополнительная литература

1. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа : Учеб. пособие для ун-тов по спец. "Математика". - М., 1982. - 271 с.
2. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - М., 1989. - 623 с. : ил.
3. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : учебное пособие для вузов / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. - Киев, 1990. - 477, [2] с.

4. Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : [учебное пособие для университетов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика"] / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - М., 2005. - 239 с.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. - М., 1984. - 750 , [2] с.

Интернет-ресурсы

1. ЭБС НГТУ : <http://elibrary.nstu.ru/>
2. ЭБС «Издательство Лань» : <https://e.lanbook.com/>
3. ЭБС IPRbooks : <http://www.iprbookshop.ru/>
4. ЭБС "Znanium.com" : <http://znanium.com/>
5. :

8. Методическое и программное обеспечение

8.1 Методическое обеспечение

1. Рояк С. Х. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс / С. Х. Рояк ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2016]. - Режим доступа: http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000223975. - Загл. с экрана.
2. Бекарева Н. Д. Функциональный анализ: методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. Д. Бекарева ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, [2010]. - Режим доступа: http://ciu.nstu.ru/fulltext/unofficial/2012/lib_834_1326450904.doc. - Загл. с экрана.

8.2 Специализированное программное обеспечение

- 1 Microsoft Office
- 2 Microsoft Office
- 3 Microsoft Windows

9. Материально-техническое обеспечение

Презентационное оборудование

№	Наименование	Назначение
1	Презентационное оборудование (мультимедиа-проектор, экран, компьютер для управления)	Чтение лекций, демонстрация примеров решения задач во время практик

Функциональный Анализ

2014

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. Линейные пространства.....	3
1.1. Основные определения	3
1.2. Размерность линейного пространства.....	4
1.3. Примеры линейных пространств	5
1.4. Изоморфизм линейных пространств	7
ГЛАВА 2. Метрические пространства.....	8
2.1. Основные определения	8
2.2. Сходимость в метрическом пространстве.....	9
2.3. Множества в метрическом пространстве.....	10
2.4. Примеры метрических пространств	15
2.5. Связь между сходимостью в различных пространствах	20
2.6. Фундаментальные последовательности	24
2.7. Полнота метрических пространств.....	26
2.8. Сепарабельные пространства	36
ГЛАВА 3. Нормированные пространства.....	40
3.1. Основные определения	40
3.2. Сходимость в нормированном пространстве	42
3.3. Связь между сходимостью в различных пространствах	43
3.4. Линейные многообразия и подпространства.....	45
3.5. Полнота нормированных пространств	49
3.6. Ряды в нормированных и банаховых пространствах.....	52
ГЛАВА 4. Линейные пространства.....	55
4.1. Основные определения	55
4.2. Гильбертовы пространства	62
4.3. Пространства Лебега	64

ГЛАВА 5. Ортогональные системы	64
ГЛАВА 6. Ряды Фурье	73
6.1. Основные определения	73
6.2. Замкнутые и полные ортонормированные системы.....	75
6.3. Налогия с векторами.....	78
6.4. Изоморфизм гильбертовых сепарабельных пространств.....	79
ГЛАВА 7. Приближение элементами подпространства	82
7.1. Основные определения	82
7.2. Наилучшее приближение в нормированном пространстве .	83
7.3. Наилучшее приближение в пространстве со скалярным произведением	86
ГЛАВА 8. Операторы.....	91
8.1. Основные определения	91
8.2. Принцип сжимающихся отображений	95
8.3. Пространство операторов	97
8.4. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве....	106
ГЛАВА 9. Обобщенные функции.....	107
9.1. Линейные пространства со сходимостью	107
9.2. Функционалы гильбертовых пространств	108
9.3. Дельта-функция	112
9.4. Основное пространство.....	116
9.5. Дифференцирование обобщенных функций	120
9.6. Пространства Соболева.....	121
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	129
ЛИТЕРАТУРА.....	132

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множество E называется **линейным** (или **векторным**) **пространством** (ЛП) над полем Ω , если в нем определены две операции:

1) каждому двум элементам $x, y \in E$ поставлен в соответствие элемент $x + y \in E$, называемый **суммой**;

2) каждому элементу $x \in E$ и каждому скаляру $\lambda \in \Omega$ поставлен в соответствие определенный элемент $\lambda x \in E$ – **произведение элемента x на скаляр λ** – так, что $\forall x, y, z \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \Omega$ выполнены следующие свойства (аксиомы):

- | | |
|---|---|
| 1) $x + y = y + x$; | 5) $1 \cdot x = x$ и $0 \cdot x = \mathbf{0}$, где $0, 1 \in \Omega$; |
| 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$; | 6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; |
| 3) $\exists \mathbf{0} \in E$ такой, что $x + \mathbf{0} = x$; | 7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$. |
| 4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; | |

Если линейное пространство задано над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то оно называется **вещественным** (**комплексным**).

Следствия аксиом линейного пространства

1. Нулевой элемент единственен.
2. Если $\lambda x = \mu x$, где $x \neq \mathbf{0}$, то $\lambda = \mu$.
3. Если $\lambda x = \lambda y$, где $\lambda \neq 0$, то $x = y$.
4. Во всяком линейном пространстве E для каждого элемента $x \in E$ можно определить противоположный элемент $-x = -1 \cdot x$, а значит, и операцию вычитания $y - x$.

Непустое множество $E' \subset E$ называется **подпространством** ЛП E , если оно само образует ЛП по отношению к определенным в E операциям сложения и умножения на число.

Замечание. Из определения следует, что E' является подпространством тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in E' \text{ и } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \lambda x + \mu y \in E'.$$

Во всяком ЛП E имеется подпространство, состоящее из нулевого элемента, – **нулевое подпространство**. Кроме того, все E можно рассматривать как свое подпространство. Подпространство, отличное от E и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется **собственным**.

Теорема 1.1. Пересечение любого множества $\{E_\gamma\}$ подпространств ЛП E есть снова линейное подпространство ЛП E .

► Пусть задана совокупность $\{E_\gamma\}$ подпространств ЛП E . Обозначим $E^* = \bigcap_{\gamma} E_\gamma$. Пусть $x, y \in E^*$, тогда $\forall \gamma \ x, y \in E_\gamma$. Так как все E_γ являются линейными пространствами, то для любых скаляров $\alpha, \beta \ \forall \gamma \ \alpha x + \beta y \in E_\gamma$. Следовательно, $\alpha x + \beta y \in E^*$. ◀

Следствие. Пусть $\{x_\alpha\}$ – произвольное непустое множество элементов ЛП E . Тогда в E существует наименьшее подпространство (возможно совпадающее с E), которое содержит $\{x_\alpha\}$.

► Так как само E содержит $\{x_\alpha\}$, то одно такое пространство уже найдено. Искомым подпространством будет пересечение всех подпространств, содержащих систему $\{x_\alpha\}$. ◀

Минимальное подпространство, содержащее систему $\{x_\alpha\} \subset E$ называют **подпространством, порожденным множеством $\{x_\alpha\}$** , или **линейной оболочкой** множества $\{x_\alpha\}$.

1.2. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ – элементы ЛП E . Тогда всякая сумма вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, где α_k – скаляры, называется **линейной комбинацией** элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \mathbf{0}$, где $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| > 0$. Если равенство $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \mathbf{0}$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то $x_1, x_2, \dots, x_m$ называются **линейно независимыми**.

ЛП называется **m -мерным**, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m + 1$ векторов линейно зависимы.

Лемма 1.1. Набор любых m линейно независимых векторов в m -мерном ЛП E является *базисом* в E (т.е. любой элемент пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов).

► Фиксируем в m -мерном ЛП E m линейно независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$. Пусть $x \in E$, вследствие m -мерности E векторы $e_1, e_2, \dots, e_m, x$ линейно зависимы. Следовательно, найдутся скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ такие, что не все они равны нулю и $\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \alpha_{m+1} x = 0$.

При этом $\alpha_{m+1} \neq 0$, иначе, векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$ были бы линейно зависимыми. Следовательно,

$$x = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i, \quad (1.1)$$

где $\xi_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{m+1}}, i = 1, 2, \dots, m$. ◀

Представление (1.1) произвольного вектора m -мерного пространства E называется *разложением* вектора x по базису $\{e_i\}_{i=1}^m$. Числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^m$.

ЛП E называется *бесконечномерным*, если $\forall m \in \mathbb{N}$ в E существует m линейно независимых элементов. Например, бесконечномерными являются пространство функций вещественного аргумента с обычными операциями сложения и умножения на число, так как $\forall m \in \mathbb{N}$ функции $1, t, t^2, t^3, \dots, t^m$ будут линейно независимы.

1.3. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

I. Числовые пространства

1. Прямая линия $\mathbb{R}$ — ЛП над полем $\mathbb{R}$ — совокупность действительных чисел, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения.

2. Совокупность рациональных чисел $\mathbb{Q}$, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения на скаляр, является ЛП над полем $\mathbb{Q}$.

Замечание. $\mathbb{Q}$ – подпространство ЛП $\mathbb{R}$.

II. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^m$) – ЛП над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) – совокупность всевозможных наборов m действительных (комплексных) чисел $x = (x_1, \dots, x_m)$, с операциями сложения и умножения на число, определенными следующими формулами

$$(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m),$$
$$\alpha (x_1, \dots, x_m) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m).$$

III. Пространства числовых последовательностей.

Если определить на числовых последовательностях операции сложения и умножения обычным способом:

$$\{x_1, \dots, x_i, \dots\} + \{y_1, \dots, y_i, \dots\} = \{x_1 + y_1, \dots, x_i + y_i, \dots\},$$
$$\alpha \{x_1, \dots, x_i, \dots\} = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_i, \dots\},$$

то получим следующие линейные пространства.

1. s – пространство всех числовых последовательностей.
2. m – пространство ограниченных числовых последовательностей.
3. c – пространство сходящихся числовых последовательностей.
4. c_0 – пространство сходящихся к 0 числовых последовательностей.
5. l_p , $p \geq 1$ – пространство последовательностей чисел (действительных или комплексных) $x = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$, удовлетворяющие усло-

вию $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$.

Замечание. Каждое из пространств l_p , c_0 , c , m , s является собственным подпространством последующего.

IV. Пространства функций.

Во всех приведенных ниже пространствах элементами являются функции с обычными операциями сложения и умножения на скаляр, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область.

1. Пространство многочленов с вещественными (комплексными) коэффициентами степени которых не выше k .
2. $C(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций.
3. $C^k(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{\Omega}$ функций.

4. $M(\bar{\Omega})$ – пространство ограниченных на $\bar{\Omega}$ функций.
5. $CL_p(\bar{\Omega})$, $p \geq 1$ – пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций.
6. $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ – пространство всех измеримых по Лебегу на $\bar{\Omega}$ функций, для которых $\int_{\Omega} |f(x)|^p d\Omega < \infty$.

7. $BV[a, b]$ – пространство функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ ограниченную вариацию.

Замечание. Каждое из пространств $C^{k+1}(\bar{\Omega})$, $C^k(\bar{\Omega})$, $C(\bar{\Omega})$, $M(\bar{\Omega})$, $L_p(\bar{\Omega})$ является собственным подпространством следующего.

V. Пространство всех прямоугольных матриц порядка $m \times n$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

1.4. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Два ЛП X и Y называются *изоморфными*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее алгебраические операции, т.е. такое, что если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, то $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$, $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1$.

Теорема 1.2. [19] Любые два n -мерных вещественных линейных пространства X и X' изоморфны.

► Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ – произвольный базис пространства X , а $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$ – какой-либо базис пространства X' . Поставим в соответствие каждому элементу $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$ пространства X элемент $x' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_m e'_m$ пространства X' . Установленное соответствие является изоморфным.

Взаимно-однозначность. Каждому элементу $x \in X$ однозначно соответствуют координаты $x_1, x_2, \dots, x_m$, которые в свою очередь определяют единственный элемент $x' \in X'$. В силу равноправности пространств X и X' каждому элементу $x' \in X'$ также соответствует единственный элемент $x \in X$.

Изоморфизм. Если элементам $x, y \in X$ отвечают соответственно элементы $x', y' \in X'$, то, очевидно, элементу $x + y \in X$ отвечает элемент $x' + y' \in X'$, а элементу $\lambda x \in X$ – элемент $\lambda y' \in X'$. ◀

Глава 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Если каждой паре элементов x и y множества X поставлено в соответствие *неотрицательное* вещественное число $\rho_X(x, y)$ так, что выполняются следующие условия:

1) **аксиома тождества**: $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) **аксиома симметрии**: $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x)$,

3) **аксиома треугольника**: $\forall z \in X \quad \rho_X(x, y) \leq \rho_X(x, z) + \rho_X(z, y)$,

то пару (X, ρ) называют **метрическим пространством** (иногда, определив $\rho_X(x, y)$, говорят, что X – метрическое пространство). Далее, где это удобно, метрическое пространство будем сокращенно обозначать МП.

Число $\rho_X(x, y)$ называется **расстоянием** между элементами x и y (или **метрикой** пространства X), а условия 1)-3) – **аксиомами метрики**. Там, где ясно, о каком метрическом пространстве X идет речь, вместо $\rho_X(x, y)$ обычно пишут $\rho(x, y)$. Элементы метрического пространства называют также **точками**.

Замечание. На одном и том же множестве X расстояния между элементами можно вводить по разному, и при этом, вообще говоря, получаем разные МП.¹

Теорема 2.1. Для любых трех элементов x, y, z метрического пространства справедливо **обратное неравенство треугольника**

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$$

► Неравенство является непосредственным следствием аксиомы 3:

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) \qquad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

$$-\rho(y, x) \leq \rho(x, z) - \rho(y, z) \qquad \rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y)$$

Учитывая, что $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, получаем требуемое неравенство. ◀

Подпространством метрического пространства X называют всякое множество $Y \subset X$, имеющее те же расстояния между элементами, что и X .

¹ См. параграф 2.4

2.2. СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Точка x метрического пространства X называется **пределом последовательности** точек $\{x_n\}$, $x_n \in X$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$.

Определенную таким образом сходимость последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют **сходимостью по расстоянию (метрике) пространства** X и обозначают следующим образом:

$$x_n \rightarrow x \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ или } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, то в любой окрестности точки x находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, их конечного числа.

2. Предел единственен.

3. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность.

4. Сходящаяся последовательность ограничена.

Пусть даны два МП X и Y и функция $y = f(x)$, определенная на $M \subset X$ и принимающая значения в пространстве Y . **Функция f** называется **непрерывной в точке $x_0 \in M$** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

т.е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ($x_n, x_0 \in M$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Можно рассматривать функции от двух (и более) точек МП со значениями в том же или в другом МП и вводить понятие непрерывности таких функций как по отдельным аргументам, так и по совокупности аргументов (также как это делалось для вещественных функций векторного аргумента).

Теорема 2.2. Расстояние $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция своих аргументов, т.е. если при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$.

$$\begin{aligned} & \triangleright |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y_n) + \rho(x, y_n) - \rho(x, y)| \leq \\ & \leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y_n)| + |\rho(x, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0. \triangleleft \end{aligned}$$

2.3. МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть A – некоторое множество в метрическом пространстве X .

Величину $d(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$ называют **диаметром множества** A .

Множество A называется **ограниченным**, если $d(A) < \infty$.

Шаром, замкнутым шаром и **сферой** с центром в точке x_0 и радиусом $r > 0$ называют, соответственно, следующие множества:

$$D_r(x_0) = \{x \mid x \in X, \rho(x, x_0) < r\},$$

$$\bar{D}_r(x_0) = \{x \mid x \in X, \rho(x, x_0) \leq r\},$$

$$S_r(x_0) = \{x \mid x \in X, \rho(x, x_0) = r\}.$$

Замечание. Из определения ограниченного множества и шара следует, что множество A является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится целиком в некотором шаре, т.е.

$$\exists x_0 \in A \exists c \in \mathbb{R}, c > 0 \quad \forall x \in A \quad \rho(x, x_0) < c.$$

ε -**окрестностью точки** $x_0 \in X$ называется множество $D_\varepsilon(x_0)$.

Пусть A произвольное множество метрического пространства X .

I. Точка $x \in X$ называется:

– **внутренней точкой множества** A , если существует окрестность этой точки целиком содержащаяся в множестве A :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(x) \subset A;$$

– **внешней точкой множества** A , если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в множестве $X \setminus A$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(x) \subset X \setminus A;$$

– **граничной точкой множества** A , если в любой ее окрестности содержатся точки множества A и точки множества $X \setminus A$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{и} \quad D_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset;$$

– **изолированной точкой множества** A , если $x \in A$ и в достаточно малой ее окрестности нет точек из A , отличных от x :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset;$$

– **предельной точкой множества** A , если в любой ее окрестности есть хотя бы одна точка множества A , отличная от x :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

II. Точка $x \in X$ называется **точкой прикосновения множества** $A \subset X$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из множества A . Всякая точка прикосновения есть либо предельная, либо изолированная точка множества A . Совокупность всех точек прикосновения множества A называют **замыканием множества A** и обозначают $\bar{A}$.

В метрическом пространстве определены те же операции над множествами, что и в пространстве $\mathbb{R}^n$:

Унарные:

$X \setminus A$ – дополнение множества A ,
 $\text{int } A$ – множество внутренних точек множества A ,
 ∂A – множество граничных точек множества A .
 A' – множество предельных точек множества A ,
 $\bar{A}$ – замыкание точек множества A ,

Бинарные: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A \div B$.

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Множество A называется **открытым**, если все его точки внутренние. Множества $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ являются и замкнутыми, и открытыми одновременно.

Свойства замкнутых и открытых множеств [11]

Пусть задано пространство X и множества $A \subset X$, $G \subset X$.

1. Множество, не имеющее предельных точек, замкнуто (ибо пустое множество содержится в любом множестве).

2а. Для любого *открытого* множества $\text{int } A = A$.

2б. Для любого *замкнутого* множества $\bar{A} = A$.

3. Для произвольного множества A множество $\text{int } A$ является открытым, а множество $\bar{A}$ – замкнутым, т.е. $\overline{\text{int } A} = A \cup A'$, $\overline{\bar{A}} = \bar{A} \cup \partial \bar{A}$.

4а. $\text{int } A$ – объединение всех содержащихся в A открытых множеств, т.е. $\text{int } A$ – наибольшее содержащееся в A открытое множество.

4б. $\bar{A}$ – пересечение всех содержащих A замкнутых множеств, т.е. $\bar{A}$ – наименьшее содержащее A замкнутое множество.

5. Дополнение $X \setminus A$ открытого (замкнутого) множества A является замкнутым (открытым) множеством.

► Пусть A – открытое множество. Покажем, что если x – предельная точка множества $X \setminus A$, то $x \in X \setminus A$. Пусть это не так, т.е. $x \in A$. Тогда, в силу открытости множества A , $\exists \varepsilon > 0 \ D_\varepsilon(x) \subset A$. Следовательно, $D_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) = \emptyset$, т.е. x не является предельной точкой $X \setminus A$.

Пусть теперь A – замкнутое множество. Если $x \in X \setminus A$, то $x \notin A$, и, в силу замкнутости A , $x \notin A'$, т.е. x – внешняя точка множества A , а значит, $\exists \varepsilon > 0 \ D_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. ◀

6. Объединение (пересечение) конечного или счетного числа открытых (замкнутых) множеств является открытым (замкнутым) множеством.

► Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k – открытые множества. Пусть x – произвольная точка множества A , тогда $\exists k \ x \in A_k$, и, в силу открытости множества A_k , $\exists \varepsilon > 0 \ D_\varepsilon(x) \subset A_k \subset A$.

Пусть теперь $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k – замкнутые множества. Тогда $X \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$. Каждое из множеств $X \setminus A_k$ открытое (свойство 5), следовательно, множество $X \setminus A$ открытое, а множество $A = X \setminus (X \setminus A)$ замкнутое (свойство 5). ◀

7. Пересечение (объединение) *конечного* числа открытых (замкнутых) множеств является открытым (замкнутым) множеством.

► Пусть $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$, где A_k – открытые множества. Пусть $x \in A$, тогда $\forall k = \overline{1, n} \ x \in A_k$. Учитывая, что все A_k открытые множества, получим $\forall k = \overline{1, n} \ \exists \varepsilon_k > 0 \ D_{\varepsilon_k}(x) \subset A_k$. Следовательно, $D_\varepsilon(x) \subset A$, где $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \}$.

Пусть теперь $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, где A_k – замкнутые множества. Тогда

$X \setminus A = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$. Причем каждое из множеств $X \setminus A_k$ является открытым (свойство 5). Тогда множество $X \setminus A$ открытое, а значит, $A = X \setminus (X \setminus A)$ замкнутое (свойство 5). ◀

Замечание. Пересечение (объединение) *счетного* числа открытых (замкнутых) множеств, в общем случае, открытым (замкнутым) множеством не является.

▶ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) = \{2\}$ – не открыто;

$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}; 5 - \frac{1}{n}\right) = (2, 5)$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[2; 5 - \frac{1}{n}\right] = [2; 5)$ – не замкнуты. ◀

8. Если множество A замкнуто, а множество G открыто, то множество $A \setminus G$ замкнуто, а множество $G \setminus A$ открыто.

▶ Так как G открытое множество, то $X \setminus G$ замкнутое (свойство 5). Тогда, в силу свойства 7, $A \setminus G = A \cap (X \setminus G)$ – замкнутое, а $G \setminus A = G \cap (X \setminus A)$ – открытое множество. ◀

9. Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.

▶ Докажем от противного. Пусть $x \in \overline{A}$ и $x \notin \overline{B}$. Так как $x \in \overline{A}$, x либо изолированная, либо предельная точка множества A .

По условию $A \subset B$, поэтому, если $x \in A$, то $x \in B$ и $x \in \overline{B}$ (так как $B \subset \overline{B}$). Если же x предельная точка множества A , то в любой ее окрестности бесконечно много точек множества A , но все они, в силу вложенности, принадлежат и множеству B , значит в любой окрестности x бесконечно много точек множества B , и, следовательно, x – предельная точка множества B . ◀

10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

▶ Если $x \in \overline{A \cup B}$, то x содержится, по крайней мере, в одном из множеств $\overline{A}$ или $\overline{B}$, т.е. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Так как $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$, то обратное включение следует из предыдущего свойства. ◀

Пусть X – МП. Множество $A \subset X$ называется **плотным** во множестве $B \subset X$, если $B \subset \bar{A}$. Множество A называется **всюду плотным** в пространстве X , если $\bar{A} = X$.

Замечание. Из определения следует, что всякое множество A плотно во множестве $\bar{A}$.

Теорема 2.3. Множество $A \subset X$ плотно во множестве $B \subset X$ тогда и только тогда, когда $\forall b \in B$ существует последовательность $\{a_n\}$ (где $a_n \in A, n=1,2,\dots$) такая, что $a_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$.

► Пусть A плотно в B . Рассмотрим произвольную точку $b \in B$. Если $b \in A$, тогда в качестве $\{a_n\}$ выбираем стационарную последовательность $\{b\}$. Если же $b \notin A$, то b – предельная точка множества A , так как по условию $B \subset \bar{A}$, и существование искомой последовательности следует из определения предельной точки.

Пусть теперь $\forall b \in B$ существует последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in A$, такая, что $a_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае всякая точка $b \in B$ является либо изолированной, либо предельной для множества A , а значит $B \subset \bar{A}$, т.е. A плотно в B . ◀

Пример 2.1.

1. Множество всех полиномов плотно в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|. \quad (2.1)$$

2. Множество всех тригонометрических многочленов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

плотно в МП непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничному условию $f(-\pi) = f(\pi)$, с метрикой (2.1).

► Справедливость утверждений следует из доказанных в курсе математического анализа теорем Вейерштрасса. ◀

2.4. ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

I. Пространство изолированных точек.

X – конечное или бесконечное множество изолированных точек,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Аксиомы метрики. Справедливость аксиом тождества и симметрии очевидна, а для проверки аксиомы треугольника достаточно перебрать все возможные случаи:

- 1) $x = y = z$, 2) $x = y, x \neq z$,
- 3) $x \neq y, x = z$, 4) $x \neq y, y = z$, 5) $x \neq y, x \neq z, y \neq z$.

Сходимость. В этом пространстве сходятся только **стационарные** последовательности, т.е. такие, что, начиная с некоторого номера, повторяется все время одна и та же точка.

II. Числовые пространства

1. Пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$: $X = \mathbb{Q}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Вещественное пространство $\mathbb{R}$: $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

Справедливость аксиом метрики для пространств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ вытекает из свойств модуля.

Сходимость в пространствах $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ является обычной сходимостью числовых последовательностей.

III. m -мерные вещественные пространства

1. c^m : $X = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m\}$, $\rho(x, y) = \max_{i=1, m} |x_i - y_i|$.

2. l_p^m ($l_1^m = l^m$, $l_2^m = E^m$), $p \geq 1$:

$$X = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m\}, \rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p}.$$

Аксиомы метрики. Справедливость аксиом тождества и симметрии легко проверить, аксиома треугольника для пространств c^m следует из свойств модуля:

$$\begin{aligned} \rho_{c^m}(x, y) &= \max_{i=1, m} |x_i - y_i| \leq \max_{i=1, m} \{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} |x_i - z_i| + \max_{i=1, m} |z_i - y_i| = \rho_{c^m}(x, z) + \rho_{c^m}(z, y). \end{aligned}$$

Для пространства l_p^m справедливость аксиомы треугольника следует из неравенства Минковского $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |b_i|^p}$.

Сходимость. Пусть $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$. Говорят, что при $n \rightarrow \infty$ x_n **сходится к x_0 покоординатно**², если $\forall i = \overline{1, m} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^n - x_i^0| = 0$.

Пусть при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow x_0$ по метрике любого из пространств c^m , l^m и l_p^m . Так как каждая из метрик этих пространств стремится к 0 тогда и только тогда, когда $\forall i = \overline{1, m} \quad |x_i^n - x_i^0| \rightarrow 0$, то сходимость в пространствах c^m и l_p^m эквивалентна покоординатной сходимости.

IV. Пространства числовых последовательностей (ЧП)

1. Пространство ограниченных ЧП – m (l_∞):

$$X = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad |x_i| \leq C \right\}, \quad \rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|;$$

2. Пространство сходящихся ЧП – c :

$$X = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{R}; \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a < \infty \right\}, \quad \rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|;$$

3. Пространство сходящихся к нулю ЧП – c_0 :

$$X = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{R}; \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0 \right\}, \quad \rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|;$$

4. Пространство суммируемых со степенью p ЧП – l_p , $p \geq 1$:

$$X = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{R}; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}, \quad \rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p};$$

5*. Пространство всевозможных ЧП – s :

$$X = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

² Определение покоординатной сходимости не требует наличия какой-либо метрики в пространстве

Аксиомы метрики. Справедливость аксиом метрик в пространствах m , c , C_0 и l_p устанавливается так же как и в соответствующих конечномерных пространствах.

Аксиомы тождества и симметрии для метрики пространства s очевидны. Аксиома треугольника следует из неравенства

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

основанного на возрастании функции $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

Сходимость. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow x_0$, где

$$x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots\}.$$

x_n *сходится к x_0 по координатно* при $n \rightarrow \infty$, если

$$\forall i \lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^n - x_i^0| = 0.$$

Если $\rho(x_n, x_0) = \sup_i |x_i^n - x_i^0|$, то сходимость по метрике x_n к x_0 означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \sup_i |x_i^n - x_i^0| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

Учитывая, что (2.2) можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall i |x_i^n - x_i^0| \leq \varepsilon,$$

получим, что всякая сходящаяся в пространствах m , c , C_0 последовательность имеет по координатно сходимость, равномерную относительно номеров координат.

Если $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}$, то из того, что $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ следует, что $\forall i |x_i^n - x_i^0| \rightarrow 0$, т.е. всякая сходящаяся в l_p последовательность имеет также по координатно сходимость, равномерную относительно номеров координат. Но в обратную сторону утверждение неверно,

например, последовательность $x_n = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[p]{n}}}_{n \text{ штук}}, 0, 0, \dots \right\}$ по коор-

динатно сходится к $x_0 = \{0, 0, \dots\}$, но в пространстве l_p $x_n \not\rightarrow x_0$.

*Покажем, что в пространстве s сходимость по метрике x_n к x_0 означает покоординатную сходимость.[13]

Сходимость x_n к x_0 в этом пространстве означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} < \varepsilon,$$

но тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall i \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} < \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\forall i \lim_{n \rightarrow \infty} |x_i^n - x_i^0| = 0.$$

Пусть теперь x_n сходится к x_0 покоординатно. Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|}$ сходится, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется k

такой, что $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho_s(x_n, x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Так как число слагаемых в оставшейся сумме конечно и фиксировано, а начиная с некоторого номера n_0^i выполняется неравенство

$|x_i^n - x_i^0| < \frac{\varepsilon}{2k}$, получаем

$$\forall n > n_0 = \max_{1 \leq i \leq k} n_0^i \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i^n - x_i^0|}{1 + |x_i^n - x_i^0|} < \sum_{i=1}^k |x_i^n - x_i^0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \rho_s(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

V. Пространства функций

1. Пространство ограниченных на $\bar{\Omega}$ функций – $M(\bar{\Omega})$:

$$X = \{ f(x) \mid \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \bar{\Omega} \mid f(x) \leq C \},$$
$$\rho(f, g) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g(x)|;$$

2. Пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций – $C(\bar{\Omega})$:

X – множество всех непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций,

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g(x)|;$$

3. Пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций – $C^k[a, b]$:

X – множество всех функций, k -я производная которых непрерывна на $[a, b]$;

$$\rho(f, g) = \sum_{l=0}^k \max_{x \in \bar{\Omega}} |f^{(l)}(x) - g^{(l)}(x)|;$$

4. Пространство – $CL_p(\bar{\Omega})$ ($\tilde{L}_p(\bar{\Omega})$), $p \geq 1$:

X – множество всех непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций,

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega};$$

5. Пространство Лебега – $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$:

X – множество всех интегрируемых со степенью p по Лебегу на множестве Ω функций,

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega}.$$

Аксиомы метрик. Справедливость аксиом тождества и симметрии для всех этих пространств легко проверить, аксиома треугольника для метрики $\rho(f, g) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g(x)|$ обусловлена свойствами супремума, а справедливость аксиомы треугольника для метрики

$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega}$ – неравенством Минковского для интегралов.

Отметим, что в пространстве $C(\bar{\Omega})$ $\max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \equiv \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$ (теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих точных граней).

Сходимость. Пусть $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ в метрике

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - g(x)|, \quad (2.3)$$

тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \rho(f_n, f_0) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

Учитывая, что (2.4) можно записать в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall x \in \bar{\Omega} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon,$$

получим, что метрика (2.3) задает равномерную сходимость функциональных последовательностей. Следовательно, в пространствах $M(\bar{\Omega})$ и $C(\bar{\Omega})$ сходимость является равномерной.

Пусть теперь $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ в метрике

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega}, \quad (2.5)$$

тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \rho(f_n, f_0) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f_n(x) - f_0(x)|^p d\Omega} < \varepsilon,$$

что означает введенную в математическом анализе сходимость в среднем со степенью p . Следовательно, в пространстве $CL_p(\bar{\Omega}), L_p(\Omega)$ сходимость является сходимостью в среднем.

2.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ СХОДИМОСТЬЮ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На одном и том же множестве можно задавать разные метрики, в результате получаются разные метрические пространства (например, $C(\bar{\Omega})$ и $CL_p(\bar{\Omega})$), и, наоборот, на разных множествах метрика может быть задана по одному и тому же правилу (например, m и c). При задании различных метрик на одном и том же множестве могут получаться как пространства с одинаковым характером сходимости (c^n и l_p^n), так и с разным ($C(\bar{\Omega})$ и $CL_p(\bar{\Omega})$).

Два метрических пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называются **изометричными**, если между элементами пространств установлено взаимно-однозначное соответствие $y = J(x)$, сохраняющее расстояние, т.е.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(J(x_1), J(x_2)).$$

Замечание 1. Можно говорить не только об изометричности пространств, но и об изометричности множеств, расположенных в этих пространствах.

Замечание 2. С точки зрения тех вопросов, которые связаны лишь с расстоянием между элементами, например, с точки зрения вопросов сходимости, два изометричных пространства можно считать идентичными.

Пример 2.2. Пространства $C[0,1]$ и $C[a,b]$ изометричны.

► Изометрией является отображение $f(x(t)) = x(a(1-t) + bt)$, действующее из $C[a,b]$ в $C[0,1]$. ◀

Пусть теперь на одном и том же множестве X заданы две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$. Говорят, что метрика $\rho_2(x, y)$ **подчинена** метрике $\rho_1(x, y)$, если из сходимости последовательности элементов множества X по метрике $\rho_1(x, y)$ следует сходимость по метрике $\rho_2(x, y)$, причем к тому же элементу. Метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ называются **эквивалентными**, если сходимость последовательности элементов по одной из них означает сходимость и по другой.

Лемма 2.1. Пусть на множестве X введены две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$. Если $\exists c \forall x, y \in X \quad \rho_2(x, y) \leq c \rho_1(x, y)$, то метрика $\rho_2(x, y)$ подчинена метрике $\rho_1(x, y)$.

Лемма 2.2. Пусть на множестве X введены две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ и $\rho_1(x, y)$ подчинена $\rho_2(x, y)$. Тогда, если последовательность элементов множества X не сходится в смысле метрики $\rho_1(x, y)$, то она расходится и в смысле метрики $\rho_2(x, y)$.

Пример 2.3. В конечномерных пространствах метрики

$$\rho(x, y) = \max_{i=1, m} |x_i - y_i|, \quad \rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p}, \quad p \geq 1$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫ.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \max_{i=1, m} |x_i - y_i| &= \sqrt[p]{\left(\max_{i=1, m} |x_i - y_i|\right)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p}, \\ \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p} &\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m \left(\max_{i=1, m} |x_i - y_i|\right)^p} = \max_{i=1, m} |x_i - y_i| \cdot \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m 1} = \\ &= \sqrt[p]{m} \cdot \max_{i=1, m} |x_i - y_i|. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.4. На множестве функций, заданных на ограниченной области, справедливы следующие отношения между метриками

$$\sqrt[p-1]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^{p-1} d\Omega} \leq \sqrt[p(p-1)]{\mu(\Omega)} \cdot \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega}, \quad p \geq 2;$$

$$\sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega} \leq \sqrt[p]{\mu(\Omega)} \cdot \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|, \quad p \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt[p-1]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^{p-1} d\Omega} &= \sqrt[p-1]{\int_{\Omega} 1 \cdot |f(x) - g(x)|^{p-1} d\Omega} \leq \\ &\leq \left[\begin{array}{c} \text{неравенство} \\ \text{Гельдера} \end{array} \right] \leq \sqrt[p-1]{\left(\int_{\Omega} 1 d\Omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \left(|f(x) - g(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\Omega\right)^{\frac{p-1}{p}}} = \\ &= \sqrt[p(p-1)]{\mu(\Omega)} \cdot \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p d\Omega} &\leq \sqrt[p]{\int_{\Omega} \left(\sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|\right)^p d\Omega} = \\ &= \sqrt[p]{\left(\sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|\right)^p \int_{\Omega} 1 d\Omega} = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)| \cdot \sqrt[p]{\mu(\Omega)}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.5. На множестве числовых последовательностей, справедливы следующие отношения между метриками:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \leq \sup_i |x_i - y_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}, \quad p \geq 1.$$

► Второе неравенство очевидно, поэтому докажем только первое:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\sup_i |x_i - y_i|}{1} = \sup_i |x_i - y_i| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sup_i |x_i - y_i|. \blacktriangleleft$$

Пример 2.6. Исследуем на сходимость в пространствах C_0 и $l_p, p \geq 1$ последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$.

► Покажем, что в C_0 последовательность $\{x_n\}$ сходится к последовательности $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{C_0}(x_n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i |x_i^n - x_i^0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Выше было доказано, что метрика $\rho_{C_0}(x_n, x_0) = \sup_i |x_i^n - x_i^0|$ подчинена метрике $\rho_{l_p}(x_n, x_0) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|^p}$. Поскольку каждый элемент пространства l_p принадлежит и пространству C_0 , из подчиненности метрик следует, что если последовательность сходится в C_0 к некоторому x_0 , то ее единственным возможным пределом в l_p является x_0 . Предположение о том, что последовательность сходится к $\tilde{x} \neq x_0$, очевидно, приводит к наличию двух пределов x_0 и $\tilde{x}$ в пространстве C_0 .

Учитывая, что $\rho_{l_p}(x_n, x_0) = \sqrt[p]{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^p}}$, получим:

1) при $p = 1$ последовательность $\{x_n\}$ не может сходиться к x_0 ,

так как $x_0 \notin l_1$ (ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится).

2) при $p > 1$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 (остаток

сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится к 0). ◀

Пример 2.7. Исследуем на сходимость в пространствах $C[0,1]$ и $CL_p[0,1]$, $p \geq 1$ последовательность $x_n(t) = t^n$.

► Покажем сначала, что в пространстве $CL_p[0,1]$, $p \geq 1$ функциональная последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к нулевой функции:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{CL_p[0,1]}(x_n, \mathbf{0}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\int_0^1 |t^n|^p dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{1}{np+1}} = 0.$$

Метрика

$$\rho_{CL_p[0,1]}(f(t), g(t)) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt}$$

подчинена метрике

$$\rho_{C[0,1]}(f(t), g(t)) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Следовательно, $\{x_n(t)\}$ в $C[0,1]$ либо сходится и имеет тот же предел, что и в $CL_p[0,1]$, $p \geq 1$, либо расходится.

Последовательность $\{x_n(t)\}$ в $C[0,1]$ не сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{C[0,1]}(x_n, \mathbf{0}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} |t^n| = 1 \neq 0. \blacktriangleleft$$

2.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется *сходящейся в себе* (или *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Теорема 2.4. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

► Пусть $x_n \rightarrow x_0$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Замечание. Обратное утверждение неверно.

► Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Как известно из курса математического анализа $x_n \rightarrow e$ в пространстве $\mathbb{R}$, а значит, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной.

Каждый член последовательности является рациональным числом и пространство $\mathbb{Q}$ имеет ту же метрику, что и пространство $\mathbb{R}$, поэтому последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна и в пространстве $\mathbb{Q}$. Но при этом $x_n \not\rightarrow e$, так как $e \notin \mathbb{Q}$, а значит, $\{x_n\}$ не является сходящейся в $\mathbb{Q}$ (предположение о наличии другого предела привело бы к существованию двух различных пределов в пространстве $\mathbb{R}$, что невозможно). ◀

Свойства фундаментальных последовательностей

1. Всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

► Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем N так, чтобы

$$\forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n \geq N \quad \rho(x_n, x_N) < \varepsilon$. Следовательно, если

$$r = \max \left\{ \varepsilon, \rho(x_i, x_N), i = \overline{1, N-1} \right\},$$

то $\forall n \quad x_n \in \overline{B}_r(x_N)$. ◀

2. Любая подпоследовательность фундаментальной последовательности фундаментальна.

► Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, а $\{x_{n_k}\}$ – ее подпоследовательность. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Поскольку количество членов последовательности, не удовлетворяющих этому условию, конечно, то можно утверждать, что для любого положительного ε найдется такой номер $n_N(\varepsilon)$, что для любых $n_l, n_k \geq n_N \quad \rho(x_l, x_k) < \varepsilon$, а это и означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна. ◀

3. Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к x , то и сама последовательность сходится к x .

► Пусть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность фундаментальной последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $x_{n_k} \rightarrow x$, при $k \rightarrow \infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists n_N \forall n_k > n_N \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как $\{x_n\}$ – ФП, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = \max(N, n_N) \forall n > N_1$$

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleleft$$

2.7. ПОЛНОТА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Метрическое пространство X называется **полным**, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Лемма 2.3. Всякое замкнутое множество в полном МП само является полным МП.

Теорема 2.5 (о вложенных шарах). Пусть в *полном* метрическом пространстве X дана последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n), n=1,2,\dots$, вложенных друг в друга (т.е. если $m > n$, то $\bar{B}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$), радиусы которых стремятся к нулю. Тогда существует *ровно одна* точка $a \in X$, принадлежащая этим шарам.

► Так как при $m > n$ $a_m \in \bar{B}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$, то $\rho(a_n, a_m) \leq \varepsilon_n$, т.е. последовательность a_n – фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства X , существует предел $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$.

Так как $\forall n, p \in \mathbb{N} \ a_{n+p} \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$, то $a_{n+p} \rightarrow a$ при $p \rightarrow \infty$, и поскольку шар $\bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$ замкнут, то $\forall n \ a \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

Если бы существовала другая точка b ($b \neq a$), принадлежащая всем шарам, то

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leq 2\varepsilon_n \rightarrow 0,$$

что невозможно, так как $\rho(a, b) > 0$. ◀

Пример 2.8. Пространство изолированных точек

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

является полным.

► Пространство является полным, так как в таком пространстве фундаментальны только стационарные последовательности. А всякая стационарная последовательность сходится. ◀

Пример 2.9. Пространство $\mathbb{R}$ – полное (теорема Коши для числовых последовательностей).

Пример 2.10. Пространство $\mathbb{R}^m$ – полное.

► Полнота пространства $\mathbb{R}^m$ следует из полноты $\mathbb{R}$.

Пусть $\{x_n\}$, $x_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$ – фундаментальная последовательность пространства $\mathbb{R}^m$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \sum_{i=1}^m (x_i^n - x_i^m)^2 < \varepsilon^2$.

Тогда $\forall i = \overline{1, m}$ получаем соответствующее неравенство для координаты x_i^n : $|x_i^n - x_i^m| < \varepsilon \forall n, m > N$, т.е. $\{x_i^n\}$ – фундаментальная числовая последовательность. Положим $\forall i = \overline{1, m} \ x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n$, тогда, очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = (x_1, \dots, x_m)$. ◀

Пример 2.11. Пространство $\mathbb{Q}$ не является полным.

► Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. В пространстве $\mathbb{R}$ она сходится, а значит, является фундаментальной в смысле метрики пространства $\mathbb{R}$. Пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ имеют одинаковую метрику, поэтому $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ фундаментальна и в $\mathbb{Q}$. В пространстве $\mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$, но $e \notin \mathbb{Q}$, поэтому в $\mathbb{Q}$ $\{x_n\}$ не является сходящейся. ◀

Пример 2.12. Пусть $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда множество $(0, 1)$ является неполным метрическим пространством.

► Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ фундаментальна, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall k \ \rho(x_n, x_{n+k}) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right| = \frac{k}{n(n+k)} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

но не является сходящейся, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin (0, 1)$.

Пример 2.13. Пространство $M[a, b]$ – полное.

► Пусть $\{x_n(t)\}$ – ФП пространства $M[a, b]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon. \quad (2.6)$$

Зафиксировав произвольным образом $t = \tilde{t} \in [a, b]$, получим числовую последовательность $\{x_n(\tilde{t})\}$, фундаментальность которой следует из (2.6). Пространство $\mathbb{R}$ полное, поэтому $\forall \tilde{t} \in [a, b]$ числовая последовательности $\{x_n(\tilde{t})\}$ сходится. Пусть

$$\forall \tilde{t} \in [a, b] \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\tilde{t}) = x_0(\tilde{t}),$$

тогда $x_0(t)$ – функция, к которой последовательность $x_n(t)$ сходится поточечно. Остается доказать, что

$$x_0(t) \in M[a, b] \text{ и } \sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_0(t)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Перейдем в равенстве (2.6) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Функция $|x_n(t) - x_0(t)|$ ограничена, а значит, и $|x_0(t)|$ ограничена, так как $|x_0(t)| \leq |x_n(t)| + |x_0(t) - x_n(t)|$. ◀

Пример 2.14. Пространство непрерывных на $[a, b]$ функций является полным в смысле метрики пространства $C[a, b]$ и неполным в смысле метрики пространства $CL_p[a, b]$, $p \geq 1$.

► 1. Пространство $C[a, b]$.

Пусть $\{x_n(t)\}$ – фундаментальная последовательность пространства $C[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall t \in [a, b] |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon,$$

а значит, последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится в силу критерия Коши. Как известно (из курса математического анализа), в этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией. Переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим $\forall t \in [a, b] |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, а значит, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a, b]$.

2. Пространство $CL_p[a, b]$, $p \geq 1$. Не нарушая общности, будем рассматривать пространства $CL_p[-1, 1]$, $p \geq 1$.

Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1, 1]$ функций:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -1/n], \\ nt, & t \in [-1/n, 1/n], \\ +1, & t \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\forall n, m \quad |x_{n+m}(t) - x_n(t)| \leq |x_{n+m}(t)| + |x_n(t)| \leq 2$, а значит,

$$\begin{aligned} \rho^p(x_{n+m}, x_n) &= \int_{-1}^1 |x_{n+m}(t) - x_n(t)|^p dt = \int_{-1/n}^{1/n} |x_{n+m}(t) - x_n(t)|^p dt \leq \\ &\leq 2^p \int_{-1/n}^{1/n} dt = \frac{2^{p+1}}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем.

Заметим теперь, что в каждой точке $t \in [-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$ функциональная последовательность $x_n(t)$ имеет предел:

$$x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ 1 & \text{при } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

При этом $|x(t)| \leq 1$ и $|x_n(t) - x(t)| \leq 2$. Но тогда, как и выше,

$$\rho^p(x_{n+m}, x) \leq \frac{2^{p+1}}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$ $x_n(t) \rightarrow x(t)$ в среднем на $[-1, 1]$, причем $x(t)$ разрывная на $[-1, 1]$ функция, т.е. $x(t) \notin CL_p[-1, 1]$ (так как $CL_p[-1, 1]$ состоит из функций, непрерывных на $[-1, 1]$). Покажем, что $\{x_n(t)\}$ не может сходиться в среднем к некоторой непрерывной функции. Действительно, наши рассуждения с $\{x_n(t)\}$ мы могли проводить в пространстве кусочно-непрерывных на $[-1, 1]$ функций с той же метрикой (обозначим его $Q[-1, 1]$). Очевидно, этому пространству принадлежат и все $x_n(t)$, и $x(t)$. В силу единственности предела $\{x_n(t)\}$ сходится в $Q[-1, 1]$ только к классу, содержащему $x(t)$. Изменение $x(t)$ в конечном числе точек не может привести к непрерывной на $[-1, 1]$ функции, и, таким образом, $\{x_n(t)\}$ не может сходиться в $CL_p[-1, 1]$ к непрерывной функции. Следовательно, $CL_p[-1, 1]$ не является полным. ◀

Пример 2.15. Пространство m – полное. [13]

► Пусть $\{x_n\}$, $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots\}$ – фундаментальная последовательность в m , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x^n, x^m) = \sup_i |x_i^n - x_i^m| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Следовательно,

$$\forall i \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N |x_i^n - x_i^m| < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Зафиксируем некоторое i , тогда числовая последовательность $\{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n, \dots\}$ является фундаментальной, а значит, сходится к некоторому числу x_i^0 . Таким образом, получаем последовательность $x_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots\}$.

Покажем, что $x_0 \in m$, т.е. является ограниченной. Так как $x_n \in m$, то $\forall i |x_i^n| < C_n$. Перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в выражении (2.8) получим

$$\forall i \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_i^n - x_i^0| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall i |x_i^0| \leq |x_i^0 - x_i^N| + |x_i^N| \leq \varepsilon + C_N. \blacktriangleleft$$

Пример 2.16. Пространство c – полное.

► Покажем, что пространство c , рассматриваемое как подмножество пространства m , замкнуто в m , а значит, в силу леммы полное.

Пусть $x_n \rightarrow x_0$, где $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots\} \in c$. Покажем, что последовательность $x_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots\}$ является сходящейся.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы

$$\forall n > N \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $\{x_n\}$ сходящаяся последовательность, то

$$\exists i_0 \forall i, j > i_0 |x_i^n - x_j^n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 \forall i, j > i_0$

$$|x_i^0 - x_j^0| \leq |x_i^0 - x_i^n| + |x_i^n - x_j^n| + |x_j^n - x_j^0| \leq 2\rho(x_n, x_0) + |x_i^n - x_j^n| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Пример 2.17. Пространство l_p , $p \geq 1$ – полное.

► Пусть $\{x_n\}$, $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots\}$ – фундаментальная последовательность в l_p , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho^p(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^p < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что $\forall i |x_i^n - x_i^m|^p < \varepsilon$, т.е. $\forall i$ числовая последовательность $\{x_i^n\}$ фундаментальна и потому сходится.

Положим $x_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n$, $x_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots\}$. Нужно показать, что

$$1) \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0|^p < \infty, \text{ т.е. } x \in l_p, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^n, x^0) = 0.$$

Из неравенства (2.9) следует, что для любого фиксированного M

$$\sum_{i=1}^M |x_i^n - x_i^m|^p < \varepsilon.$$

В этой сумме теперь только конечное число слагаемых, поэтому можно, зафиксировав n , перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Получим

$$\sum_{i=1}^M |x_i^n - x_i^0|^p \leq \varepsilon.$$

Это равенство верно при любом M . Восстановим бесконечный ряд, переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|^p \leq \varepsilon. \quad (2.10)$$

Из сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n|^p$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|^p$, с учетом неравен-

ства Минковского $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p}$, следует сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |(x_i^0 - x_i^n) + x_i^n|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0 - x_i^n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n|^p} \right)^p,$$

т.е. утверждение 1) доказано.

Далее, так как ε произвольно мало, то неравенство (2.10) означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|^p} = 0,$$

т.е. $x_n \rightarrow x_0$ в метрике l_p . Утверждение 2) доказано. ◀

Теорема 2.6 (о пополнении метрических пространств) [17,13]. Любое метрическое пространство X можно пополнить, точнее: оно всегда может быть вложено в другое полное метрическое пространство $\hat{X}$ такое, что в нем существует всюду плотное в $\hat{X}$ подпространство X_0 , изометричное пространству X . Пространство $\hat{X}$ называют *пополнением* или *замыканием* пространства X .

► Доказательство теоремы разобьем на несколько частей:

- I. Построим требуемое МП $\hat{X}$, то есть укажем множество и введем на этом множестве метрику, проверив, что она удовлетворяет аксиомам;
- II. Покажем, что построенное МП $\hat{X}$ является полным;
- III. Выделим в МП $\hat{X}$ всюду плотное подпространство X_0 ;
- IV. Проверим, что X_0 и X изометричны.

I. Рассмотрим всевозможные ФП $\{x_n\}$ пространства X . Если $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будем называть эквивалентными (и писать $\{x_n\} \sim \{y_n\}$).

Множество всех фундаментальных последовательностей разобьем на классы эквивалентности (две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ включаем в один класс в том и только в том случае, когда $\{x_n\} \sim \{y_n\}$). Эти классы $\hat{x}$ примем за элементы множества $\hat{X}$. Если $\{x_n\} \in \hat{x}$, то $\{x_n\}$ будем называть представителем класса $\hat{x}$.

Введем расстояние между элементами множества $\hat{X}$ по формуле

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Покажем, что такое определение расстояния $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})$ корректно:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ существует, так как

$$\begin{aligned} & \left| \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \right| \leq \\ & \leq \left| \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n) \right| + \left| \rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m) \right| \leq \\ & \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т.е. числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ фундаментальна, а значит, сходится;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ не зависит от выбора $\{x_n\} \in \hat{x}$ и $\{y_n\} \in \hat{y}$, так как если $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{x'_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$, $\{y'_n\} \in \hat{y}$, то

$$\rho(x'_n, y'_n) \leq \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y'_n), \quad (2.11)$$

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n), \quad (2.12)$$

и далее, переходя к пределам в (2.11) и (2.12), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n),$$

а значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n)$

Теперь проверим выполнение аксиом метрики.

$$1. \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \geq 0.$$

Равенство $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ означает (по определению классов), что последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ принадлежат одному классу, то есть $\hat{x} = \hat{y}$.

2. Равенство $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\rho}(\hat{y}, \hat{x})$ очевидно.

3. Если $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$, $\{z'_n\} \in \hat{z}$, то

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z'_n, y_n) = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{\rho}(\hat{z}, \hat{y}).$$

Итак, все аксиомы метрики выполняются, а значит, мы построили метрическое пространство $\hat{X}$.

II. Докажем, что пространство $\hat{X}$ является полным.

Пусть $\{\hat{x}_n\}$ фундаментальная последовательность в $\hat{X}$, т.е. $\hat{\rho}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Найдем класс $\hat{x} \in \hat{X}$, такой что $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$.

Возьмем в каждом классе $\hat{x}_n$ некоторую последовательность $\{x_n\} = \{x_1^n, x_2^n, \dots\}$. Так как последовательности $\{x_n\}$ фундаментальны, то

$$\forall n \exists k_n \forall p > k_n \rho(x_p^n, x_{k_n}^n) < \frac{1}{n}.$$

Зафиксируем для каждого n соответствующее значение k_n и покажем, что последовательность $\{x_{k_1}^1, x_{k_2}^2, \dots, x_{k_n}^n, \dots\}$ фундаментальна. Имеем

$$\rho(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m) \leq \rho(x_{k_n}^n, x_p^n) + \rho(x_p^n, x_p^m) + \rho(x_p^m, x_{k_m}^m). \quad (2.13)$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\hat{\rho}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, то

$$\exists N \forall n, m \geq N \quad \hat{\rho}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^n, x_p^m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому при $n, m \geq N$ и достаточно больших p получим

$$\rho(x_p^n, x_p^m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.14)$$

Возьмем $n_0 = \max(N, [4/\varepsilon] + 1)$. Фиксировав n и m , удовлетворяющие условиям $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, будем считать p настолько большим, что $p > k_n$ и $p > k_m$. Тогда в силу выбора k_n и k_m

$$\rho(x_p^n, x_{k_n}^n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \rho(x_p^m, x_{k_m}^m) < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.13), (2.14), (2.15) следует, что

$$\forall n, m \geq n_0 \quad \rho(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m) < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{x_{k_n}^n\}$ фундаментальна, а значит, принадлежит некоторому классу, являющемуся элементом пространства $\hat{X}$. Покажем, что это и есть искомый класс $\hat{x}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\hat{x}_n, \hat{x}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^n, x_{k_p}^p) \leq \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^n, x_{k_n}^n) + \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_{k_n}^n, x_{k_p}^p) < \frac{1}{n} + \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_{k_n}^n, x_{k_p}^p). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как последовательность $\{x_{k_n}^n\}$ фундаментальна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, p \geq N \quad \rho(x_{k_n}^n, x_{k_p}^p) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

а значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_{k_n}^n, x_{k_p}^p) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.17)$$

Полагая $n_0 = \max(N, [2/\varepsilon] + 1)$, из неравенств (2.16) и (2.17) получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \hat{\rho}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. что последовательность $\{\hat{x}_n\}$ сходится к элементу $\hat{x}$ и полнота пространства $\hat{X}$ доказана.

III. Теперь выделим в $\hat{X}$ всюду плотное подпространство.

Рассмотрим стационарные последовательности $\{x, x, \dots\}$, которые, очевидно, фундаментальны и, следовательно, относятся каждая к некоторому классу – элементу из $\hat{X}$, причем одному классу принадлежит лишь одна стационарная последовательность.

Отнесем к $\hat{X}_0$ все классы, среди последовательностей которых имеется стационарная последовательность, и покажем, что $\hat{X}_0$ всюду плотно в $\hat{X}$. Пусть $\hat{x}$ – класс, содержащий фундаментальную последовательность $\{x_1, x_2, \dots\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем такое n , чтобы $\forall m > n \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Построим стационарную последовательность $\{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}$ и обозначим через $\hat{x}_\varepsilon$ класс, содержащий эту последовательность. Очевидно, что $\hat{x}_\varepsilon \in \hat{X}_0$. Далее,

$$\rho(\hat{x}, \hat{x}_\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \quad \exists \hat{x}_\varepsilon \in \hat{X}_0 \quad \rho(\hat{x}, \hat{x}_\varepsilon) < \varepsilon,$$

т.е. $\hat{X}_0$ всюду плотно в $\hat{X}$.

IV. Покажем, что X изометрично $\hat{X}_0$.

Между классами $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и элементами x , из которых составляется стационарная последовательность, входящая в $\hat{x}$, существует взаимно-однозначное соответствие, причем, если $\{x, x, \dots\} \in \hat{x}$, $\{y, y, \dots\} \in \hat{y}$, то $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \rho(x, y)$. Поэтому установленное взаимно-однозначное соответствие между $\hat{X}_0$ и X есть изометрия.

Теорема доказана. ◀

Замечание. Пополнение $\hat{X}$ пространства X определяется однозначно с точностью до изометрии.

► Пусть $\hat{Y}$ – другое полное пространство, в котором X лежит всюду плотно. Тогда каждая точка $\hat{y} \in \hat{Y}$ есть предел некоторой последовательности $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \in X$. Так как эта последовательность фундаментальна, то она определяет некоторый элемент $\hat{x} \in \hat{X}$. Этот

элемент поставим в соответствие элементу $\hat{y}$. Пусть теперь, наоборот, дан элемент $\hat{x}' \in \hat{X}$ и $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots\}$ – некоторая ФП из класса $\hat{x}'$. Так как эта ФП лежит в полном пространстве $\hat{Y}$, то она определяет некоторый элемент $\hat{y} \in \hat{Y}$. Этот элемент поставим в соответствие элементу $\hat{x}'$. Таким образом, мы получаем соответствие, которое, очевидно, является взаимно-однозначным. Так как, кроме того,

$$\hat{\rho}_{\hat{X}}(\hat{x}, \hat{x}') = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = \hat{\rho}_{\hat{Y}}(\hat{y}, \hat{y}')$$

то это соответствие изометрично. ◀

Пример 2.18. Пусть $C_0[0,1]$ – пространство многочленов, определенных на отрезке $[0,1]$, с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Пространство $C_0[0,1]$ не является полным. Так как $C_0[0,1]$ лежит всюду плотно в полном пространстве $C[0,1]$, то пополнение пространства $C_0[0,1]$ приводит к пространству, изометричному $C[0,1]$.

2.8. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пространство X называется **сепарабельным**, если в нем существует счетное всюду плотное множество; иными словами, если в пространстве X существует счетное множество $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такое, что $\forall x \in X$ найдется последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ элементов этого множества, сходящаяся к x .

Пример 2.19. Евклидово пространство $\mathbb{R}$ сепарабельно.

▶ 1) Множество Q – рациональных чисел счетно.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ можно выбрать последовательность $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ элементов из Q , сходящуюся к x , значит $\overline{Q} \subset \mathbb{R}$. Следовательно, Q всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Из 1), 2) получаем (по определению) сепарабельность пространства $\mathbb{R}$. ◀

Пример 2.20. Пространство $C[0,1]$ сепарабельно.

► Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ множество C_0 , состоящее из всех многочленов с рациональными коэффициентами.

1) Множество C_0 счетно, вследствие счетности множества $\mathbb{Q}$.

2) Покажем, что C_0 всюду плотно в $C[0,1]$. Возьмём произвольную функцию $x(t) \in C[0,1]$. По теореме Вейерштрасса, существует многочлен $p(t)$ такой, что $\max_{t \in [0,1]} |x(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число. С другой стороны, найдётся другой многочлен $p_0(t)$ с рациональными коэффициентами такой, что $\max_{t \in [0,1]} |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(так как вещественные коэффициенты могут быть сколь угодно точно приближены рациональными). Отсюда следует, что

$$\max_{t \in [0,1]} |x(t) - p_0(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t) - p(t)| + \max_{t \in [0,1]} |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Пример 2.21. Пространство l_p сепарабельно.

► *Пусть E_0 – множество элементов вида

$$\{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots\}, \quad r_i \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Множество E_0 счетно, так как представляет собой счетную совокупность (по количеству ненулевых элементов) счетных множеств (при фиксированном n количество элементов вида $\{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots\}$ счетно, в силу счетности множества рациональных чисел).

2) Покажем, что E_0 всюду плотно в l_p . Пусть

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \in l_p.$$

Тогда, учитывая, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ сходится, можем утверждать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Учитывая, что $\forall x_i \in \mathbb{R} \exists r_i \in \mathbb{Q} \quad |x_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n}$, выберем последова-

тельность $x_0 = \{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots\}$ так, чтобы $\sum_{i=1}^n |x_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$.

Тогда

$$\rho(x, x_0) < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - r_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p} < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}} = \varepsilon,$$

т.е. $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, что и требовалось доказать. $\blacktriangleleft$

Пример 2.22. Пространство m не сепарабельно.

► Докажем от противного. Рассмотрим множество элементов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \in m$, где $x_i = \{0, 1\}$. Множество этих элементов имеет мощность континуума. Возьмём два различных элемента $x = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ и $y = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots\}$ из этого множества. Тогда

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| = 1$$

и мы имеем континуум элементов, находящихся друг от друга на расстоянии, равном единице.

Предположим, что m сепарабельно. Пусть в m существует счетное всюду плотное множество E_0 . Опишем около каждого элемента из E_0 шар радиуса $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Тогда все элементы пространства расположатся внутри этих шаров (в силу плотности E_0 в m). Так как множество всех шаров – счетное, то, по крайней мере, в одном из них должно быть два разных элемента x и y из рассмотренного выше континуального множества. Пусть x_0 – центр такого шара. Тогда

$$1 = \rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

что невозможно. Следовательно, m не сепарабельно. ◀

Глава 3. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Линейное пространство E называется **нормированным** (ЛНП), если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ так, что выполнены следующие аксиомы:

- 1) Неотрицательность: $\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$.
- 2) Однородность: для произвольного скаляра λ выполняется равенство $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- 3) Неравенство треугольника: $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- 4) Невырожденность: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Следствия:

1) $\|0\| = 0$.

► $\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$. ◀

2) Обратное неравенство треугольника:

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$

►
$$\begin{cases} \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \\ \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \\ \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание. Если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ так, что выполнены аксиомы 1)-3), а 4)-я аксиома не выполняется, то говорят, что задана **полунорма**. Например, в пространстве интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функция

$$\|x\| = \int_a^b |f(x)| dx \tag{3.1}$$

является полунормой. Однако если функции, для которых $\|f - g\| = 0$ считать равными, то (3.1) станет нормой. В дальнейшем будем рассматривать только нормированные пространства, считая, что два элемента пространства f и g равны, если $\|f - g\| = 0$.

Лемма 3.1. Любое нормированное пространство является метрическим. Расстояние в нормированном пространстве можно определить по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Замечание 1. Обратное утверждение неверно.

► Как было показано раньше (см. параграф 2.3) на конечном множестве чисел $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ функция $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$ является метрикой. Но при этом X не является *линейным* пространством, а значит, не может быть нормированным пространством. ◀

Замечание 2. Так как ЛНП есть МП, то для ЛНП имеют смысл все понятия, введенные в метрических пространствах (предел, сфера, шар, ограниченное множество, замкнутые и открытые множества, сепарабельность и т.д.).

Замечание 3. Так как ЛНП есть частный случай ЛП, то для ЛНП имеют смысл все понятия, введенные в линейных пространствах (линейная зависимость и независимость элементов, базис, размерность и т.д.).

Введенная по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$ метрика в ЛП обладает двумя дополнительными свойствами

- 1) $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ – инвариантность относительно сдвига.
- 2) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$ – положительная однородность.

Легко проверить, что если в пространстве X задана метрика, обладающая свойствами 1), 2), то функция $\rho(x, 0)$ является нормой в пространстве X и порождает исходную метрику.

Метрики (см. параграф 2.3), заданные в

- числовых пространствах $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$,
- конечномерных пространствах c^n, l^n, l_p^n ,
- пространствах числовых последовательностей m, c, c_0, l_p ,
- пространствах функций $M(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}), C^k(\bar{\Omega}), CL_p(\bar{\Omega}), L_p(\Omega)$,

обладают свойствами 1), 2) и порождаются соответствующими нормами.

Метрика пространства числовых последовательностей s удовлетворяет свойству 1), но не удовлетворяет свойству 2), значит, она не порождается никакой нормой.

3.2. СХОДИМОСТЬ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Точка x ЛНП X называется *пределом последовательности* точек $\{x_n\}$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$ (обозначается $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ или $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), если $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Определенную таким образом сходимость последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют *сходимостью по норме* ЛНП X .

Свойства сходящихся последовательностей в ЛНП

1-4. Свойства сходящихся последовательностей в метрических пространствах.

5. Если $x_n \rightarrow x$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda$, где $\{\lambda_n\}$ последовательность скаляров, то $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

$$\begin{aligned} \triangleright x_n \rightarrow x \Rightarrow & \begin{aligned} & 1) \|x_n - x\| - \text{бесконечно малая последовательность;} \\ & 2) \|x_n\| - \text{ограниченная числовая последовательность.} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \Rightarrow |\lambda_n - \lambda| - \text{бесконечно малая последовательность.}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \leq \\ &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| = \|x_n\| |\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6. Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

$$\triangleright \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0. \quad \blacktriangleleft$$

7. Если $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

$$\begin{aligned} \triangleright \text{Доказательство следует из обратного неравенства треугольника} \\ \left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\|. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8. Если $x_n \rightarrow x$, то $\forall y \quad \|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$.

$$\triangleright \left| \|x_n - y\| - \|x - y\| \right| \leq \|(x_n - y) - (x - y)\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0. \quad \blacktriangleleft$$

9. Если $x_n \rightarrow x$ и $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow x$.

$$\begin{aligned} \triangleright \|y_n - x\| &= \|y_n - x_n + x_n - x\| \leq \\ &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| = \|x_n - y_n\| + \|x_n - x\| \rightarrow 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

10. Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$.

$$\begin{aligned} \triangleright \left| \|x_n - y_n\| - \|x - y\| \right| &\leq \|(x_n - y_n) - (x - y)\| = \\ &= \|(x_n - x) + (y - y_n)\| \leq \|x_n - x\| + \|y - y_n\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ СХОДИМОСТЬЮ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На одном и том же множестве элементов ЛП могут быть заданы две нормы. Например, на множестве непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций норма $\|f(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ задает пространство $C[a, b]$, а норма $\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)| dx$ задает пространство $CL[a, b]$. Также как и для метрик, для норм вводятся понятия **подчиненности и эквивалентности**.

Соотношения между наиболее часто используемыми нормами:

1) на множестве числовых последовательностей, суммируемых со степенью $p \geq 1$:

$$\sup_i |x_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}.$$

2) на множестве k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \sum_{l=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(l)}(x)|.$$

3) на множестве интегрируемых на Ω со степенью $p \geq 1$ функций:

$$\sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(\vec{x})|^p d\Omega} \leq \sqrt[p+1]{\mu(\Omega)} \sqrt[p+1]{\int_{\Omega} |f(\vec{x})|^{p+1} d\Omega}.$$

4) на множестве ограниченных на $\bar{\Omega}$, $\mu(\Omega) < \infty$ функций:

$$\sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(\vec{x})|^p d\Omega} \leq \sqrt[p]{\mu(\Omega)} \cdot \sup_{\vec{x} \in \Omega} |f(\vec{x})|.$$

Теорема 3.1. Во всяком конечномерном ЛНП все нормы эквивалентны.

* ► Докажем сначала, что произвольная сфера $\|x - x_0\| = r$ является в E^m замкнутым и ограниченным множеством.

Замкнутость. Пусть a – предельная точка сферы $S_r(x_0)$. Значит, найдутся $x_n \in S_r(x_0)$ (т.е. $\|x_n - x_0\| = r, n = 1, 2, \dots$) такие, что $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \|a - x_0\| &\leq \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + r, \\ r &= \|x_n - x_0\| \leq \|x_n - a\| + \|a - x_0\|. \end{aligned}$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$, получаем $\|a - x_0\| \leq r, r \leq \|a - x_0\|$. Следовательно, $r = \|a - x_0\|$, т.е. $a \in S_r(x_0)$, а значит, сфера $S_r(x_0)$ является замкнутым множеством.

Ограниченность. Сфера $S_r(x_0)$ – ограниченное множество, так как она целиком содержится в открытом шаре $D_{r+1}(x_0)$.

Теперь докажем непосредственно теорему.

Фиксируем в m -мерном линейном пространстве E базис $\{e_k\}_{k=1}^m$, и пусть $x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ – разложение произвольного элемента $x \in E$ по

этому базису. Введем в E норму $\|x\|_c = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\xi_k)^2}$. С этой нормой пространство E можно отождествить с евклидовым пространством E^m .

Пусть $\|x\|$ – еще одна произвольная норма в E . Прежде всего, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |\xi_k| \cdot \|e_k\| \leq [\text{неравенство Гельдера}] \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^m |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \|e_k\|^2} = \|x\|_c \beta = \beta \|x\|_c \end{aligned} \quad (3.2)$$

Следовательно, $\|x\|$ подчинена $\|x\|_c$.

Покажем, что $\|x\|_c$ подчинена $\|x\|$. Для этого рассмотрим функцию $\|x\|$ на сфере $S_1(0) = \{x \mid \|x\|_c = 1\}$. Так как для произвольной нормы выполняется обратное неравенство треугольника $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$, то, учитывая (3.2), получим

$$\left| \|x'\| - \|x''\| \right| \leq \|x' - x''\| \leq \beta \|x' - x''\|_c.$$

Следовательно, функция $\|x\|$ непрерывная в E^m (так как выполняется условие Липшица³).

³ Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица* порядка α ($0 < \alpha \leq 1$) на отрезке $[a, b]$, если $\exists M \forall x', x'' \in [a, b] \quad |f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha$. Если функция удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Сфера в E^m является замкнутым и ограниченным множеством. Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве в E^m , ограничена на нем и достигает на нем своих точных граней. Следовательно, найдется $x_0 \in S_1(\mathbf{0})$ такое, что $\lambda = \|x_0\| = \min_{x \in S_1(\mathbf{0})} \|x\|$, причем $\lambda > 0$ (так как $x_0 \neq \mathbf{0}$).

Пусть x – произвольный элемент пространства E , тогда $\frac{x}{\|x\|_c}$ – точка сферы с радиусом 1 (в смысле евклидовой нормы) и $\left\| \frac{x}{\|x\|_c} \right\| \geq \lambda$. Так как $\frac{1}{\|x\|_c}$ – число, то, учитывая однородность нормы (см. 2-ую аксиому), получим

$$\lambda \|x\|_c \leq \|x\|. \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) получаем, что нормы $\|x\|$ и $\|x\|_c$ эквивалентны. Таким образом, в силу произвольности выбора $\|x\|$, все нормы в E эквивалентны $\|x\|_c$, а значит, эквивалентны между собой. ◀

3.4. ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ПОДПРОСТРАНСТВА

Множество L в линейном пространстве E называется *линейным многообразием (линейным множеством)*, если $\forall x, y \in L$ и любых скаляров λ, μ линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in L$.

Замечание. Так как L является частью ЛП E , то из определения линейного многообразия следует, что L само является линейным пространством, а значит, L – подпространство ЛП E . Верно и обратное утверждение: всякое подпространство линейного пространства является линейным многообразием в нем.

Как правило, среди ЛНП основной интерес представляют именно замкнутые пространства, т.е. пространства, содержащие все свои предельные точки. Поэтому *подпространством ЛНП* будем называть теперь только замкнутое подпространство ЛП.

Систему элементов НП E будем называть **полной**, если порожденное ею (замкнутое) подпространство есть все E . Например, в силу теоремы Вейерштрасса совокупность всех функций $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ полна в пространстве $C[a, b]$.

Пример 3.2. Пространство $C[a, b]$ является подпространством ЛНП $M[a, b]$.

► 1) всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на нем,
2) в пространствах $C[a, b]$, $M[a, b]$, введены одинаковые нормы,
3) множество всех непрерывных функций замкнуто относительно метрики пространства $C[a, b]$, так как всякая равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной же функции. ◀

Пример 3.3. Множество всех многочленов степени не выше n является $(n + 1)$ -мерным подпространством ЛНП $C[a, b]$.

► 1) всякий многочлен является непрерывной функцией,
2) линейная комбинация многочленов степени не выше n является многочленом степени не выше n , а значит, пространство многочленов степени не выше n является линейным многообразием в $C[a, b]$,

3) всякий многочлен степени не выше n имеет и притом единственное разложение в виде $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, а значит, размерность рассматриваемого пространства $(n + 1)$,

4) всякое конечномерное пространство является полным, а значит, множество многочленов степени не выше n замкнуто. ◀

Пример 3.4. Множество всех многочленов является линейным многообразием в ЛНП $C[a, b]$ (т.е. подпространством ЛП $C[a, b]$), но не является подпространством ЛНП $C[a, b]$.

► В силу теоремы Вейерштрасса, для любой непрерывной функции, в том числе не являющейся полиномом, существует равномерно сходящаяся к ней последовательность полиномов. ◀

Пример 3.5. Множество непрерывных неубывающих на $[a, b]$ функций замкнуто в МП $C[a, b]$, но не является линейным многообразием, а значит, и подпространством в ЛНП

► Рассмотрим равномерно сходящуюся последовательность $f_n(x)$ непрерывных неубывающих на $[a, b]$ функций.

Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции.

Обозначим предельную функцию $f(x)$. Пусть $x, y \in [a, b]$ и $x < y$, тогда $\forall n \ f_n(x) \leq f_n(y)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $f(x) \leq f(y)$, что доказывает (в силу произвольности выбора точек x, y) неубывание предельной функции.

Множество непрерывных неубывающих на $[a, b]$ функций не является линейным многообразием в $C[a, b]$, так как оно не замкнуто относительно операции умножения на скаляр. ◀

Пример 3.6. Доказать, что

$$L = \left\{ x(t) \mid x(t) \in C[0, 1] \text{ и } \int_0^1 x(t) dt = 0 \right\}$$

является подпространством пространства $CL[0, 1]$.

► Множество L является линейным многообразием, так как $\forall x, y \in L \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha x + \beta y \in L \text{ и } \int_0^1 (\alpha x + \beta y)(t) dt = \alpha \int_0^1 x(t) dt + \beta \int_0^1 y(t) dt = 0.$$

Покажем, что множество L замкнуто, т.е.

если $x_n \in L$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, то $x_0 \in L$.

Действительно, если $\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt \rightarrow 0$, то учитывая, что

$$\left| \int_0^1 x_n(t) dt - \int_0^1 x_0(t) dt \right| \leq \int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt,$$

получим $\int_0^1 x_0(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. ◀

Пример 3.7. Пусть

$$L = \left\{ \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \right\}.$$

Покажем, что L образует подпространство в l_1 , но не является подпространством пространства $l_p, p > 1$.

► Очевидно, что L линейное многообразие в $l_p, p \geq 1$.

1. Пусть $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots\} \in L$ — сходящаяся в l_1 последовательность и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots\}.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \|x_n - x_0\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0| < \varepsilon,$$

а значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^0) \right| + \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 \right| = 0$, а значит, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 = 0$.

Следовательно, $x_0 \in L$, а значит, L — подпространство в l_1 .

2. Пусть

$$x_n = \left\{ 1, \underbrace{-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots, 0, \dots \right\} \in L, \quad x_0 = \{1, 0, 0, \dots\}.$$

Тогда

$$\|x_n - x_0\|_{l_p} = \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}} \rightarrow 0,$$

а значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \notin L. \blacktriangleleft$$

3.5. ПОЛНОТА НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В нормированном пространстве последовательность точек пространства называется **фундаментальной относительно нормы пространства**, если она фундаментальна относительно метрики, порожденной этой нормой ($\rho(x, y) = \|x - y\|$).

Свойства фундаментальных последовательностей в ЛНП

1-3. Свойства фундаментальных последовательностей в метрических пространствах.

4. Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в ЛНП, то последовательность $\{\lambda x_n\}$ тоже фундаментальна.

► В случае $\lambda = 0$ фундаментальность $\{\lambda x_n\}$ очевидна. Поэтому докажем для случая $\lambda \neq 0$.

Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|\lambda x_n - \lambda x_m\| = |\lambda| \|x_n - x_m\| < \frac{|\lambda| \varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon, \lambda \neq 0. \blacktriangleleft$$

5. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ – фундаментальные последовательности в ЛНП, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ тоже фундаментальна.

► Из фундаментальности $\{x_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \forall m, n > N \quad \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из фундаментальности $\{y_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \forall m, n > N \quad \|y_m - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)) \forall n, m > N$$

$$\|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| = \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\| \leq$$

$$\|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Нормированное пространство называется **полным**, если оно является полным в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства. Полное нормированное пространство называется **банаховым** (или ***B*-пространством**).

Примеры полных пространств:

- все конечномерные пространства, в частности $(c^n, l_p^n, p \geq 1)$;
- пространства числовых последовательностей

$$m, c, c_0, l_p, p \geq 1;$$

- пространства функций $M[a, b]$ и $C[a, b]$.

Примеры неполных пространств:

- числовое пространство $\mathbb{Q}$;
- пространства функций $C^k[a, b]$, $CL[a, b]$.

Теорема 3.2. Все конечномерные ЛНП полные.

► Пусть X – конечномерное ЛНП размерности k с базисом $e_1, \dots, e_k$, а $\{x_n\}$, $x_n \in X$ – некоторая фундаментальная последовательность. Докажем, что $\{x_n\}$ сходится в X .

Пусть $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n^i e_i$. Тогда в силу фундаментальности $\{x_n\}$

$$\|x_n - x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^k a_n^i e_i - \sum_{i=1}^k a_m^i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k (a_n^i - a_m^i) e_i \right\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\forall i = \overline{1, k} \quad |a_n^i - a_m^i| \rightarrow 0,$$

а значит, числовые последовательности $\{a^i\}$ фундаментальны и сходятся. Обозначим предел последовательности $\{a^i\}$ как a_0^i . Тогда

$$x_n \rightarrow \sum_{i=1}^k a_0^i e_i \in X,$$

так как

$$\left\| x_n - \sum_{i=1}^k a_0^i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k a_n^i e_i - \sum_{i=1}^k a_0^i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k (a_n^i - a_0^i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |a_n^i - a_0^i| \|e_i\| \rightarrow 0. \blacktriangleleft$$

Теорема 3.3. Всякое нормированное пространство X можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\hat{X}$ (Пространство $\hat{X}$ при этом называется *пополнением* пространства X).

► Построим метрическое пространство $\hat{X}$ как пополнение метрического пространства X согласно теореме 2.6.

Теперь сделаем из него линейное нормированное пространство. Для этого определим в $\hat{X}$ операции сложения и умножения следующим образом если $\{x_n\} \in \hat{x}$ и $\{y_n\} \in \hat{y}$, то суммой $\hat{x} + \hat{y}$ будем называть класс, содержащий $\{x_n + y_n\}$, а классом $\lambda\hat{x}$ — класс, содержащий $\{\lambda x_n\}$. Покажем, что такое определение корректно, т.е. оно не зависит от выбора $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Действительно, если $\{\tilde{x}_n\} \in \hat{x}$ и $\{\tilde{y}_n\} \in \hat{y}$, то

$$\{\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\} \sim \{x_n + y_n\}, \quad \{\lambda \tilde{x}_n\} \sim \{\lambda x_n\},$$

а значит,

$$\{\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\} \in (\hat{x} + \hat{y}), \quad \{\lambda \tilde{x}_n\} \in (\lambda \hat{x}).$$

Роль нуля в $\hat{X}$ играет класс $\{0\}$, представителем которого является $0 \in X$.

Для произвольного элемента $\{x_n\} \in \hat{x}$ норма в $\hat{X}$ определяется следующим образом

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X.$$

Этот предел существует, так как числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальна в силу неравенства

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|,$$

а значит, сходится, и не зависит от выбора представителей класса $\hat{x}$, так как если также $\{\tilde{x}_n\} \in \hat{x}$, то

$$|\|\tilde{x}_n\| - \|x_n\|| \leq \|\tilde{x}_n - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \blacktriangleleft$$

3.6. РЯДЫ В НОРМИРОВАННЫХ И БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [15]

Пусть X – нормированное пространство и $x_k \in X, k=1, 2, \dots$. Формальная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется рядом в X . Ряд называется *сходящимся*, если в X сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то $S_n \rightarrow S \in X$ при $n \rightarrow \infty$. Элемент S называется *суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Критерий Коши сходимости ряда. Пусть X – нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходиллся, необходимо, а если X банахово, то и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, то говорят, что *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится абсолютно*.

Свойства сходящихся рядов.

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то $x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

► По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p > 0 \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

При $p = 1$ имеем: $\|x_{n+1}\| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Отсюда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 = N(\varepsilon) + 1 \forall n \geq N_0 \|x_n\| < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

2. Если сходится ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k$, то $\forall n > n_0$ сходится ряд $\sum_{k=n}^{\infty} x_k$.

3. Если λ – некоторое число, отличное от нуля, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k$, и наоборот, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

4. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходятся, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$, и справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

► Обозначим через U_n, V_n, S_n соответственно частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$. По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V,$$

где U и V – суммы соответствующих рядов. Очевидно, что $S_n = U_n + V_n$. Но тогда по свойствам пределов существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = U + V$, а значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k. \blacktriangleleft$$

5. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходятся абсолютно, то сходится абсолютно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$.

6. В банаховом пространстве всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

► Доказательство следует из критерия Коши и неравенства треугольника: $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$. ◀

7. Если в нормированном пространстве каждый абсолютно сходящийся ряд сходится, то пространство банахово. [15]

► *Пусть $\{x_n\} \subset X$ и $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Покажем, что она сходится к некоторому $x \in X$. Из фундаментальности $\{x_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Выберем из $\{x_n\}$ подпоследовательность

$$x_{n_k} = x_{N\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)+1}, k = 1, 2, \dots$$

Тогда $\forall k \geq 2$ в силу фундаментальности $\{x_n\}$ выполняется неравенство $\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^k}$.

Составим ряд

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \dots$$

Этот ряд сходится абсолютно, т.к. он мажорируется рядом

$$c + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

где c - некоторая постоянная, удовлетворяющая $\|x_{n_1}\| < c$ (c существует в силу фундаментальности, а следовательно и ограниченности $\{x_n\}$). Но тогда по условию этот ряд сходится, т.е. существует $x \in X$, к которому сходится последовательность его частичных сумм $\{S_k\}$. Но т.к. $S_k = x_{n_k}$, то $x_{n_k} \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

Получилось, что подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к x , а значит и сама $\{x_n\}$ сходится к x по свойствам фундаментальных последовательностей. ◀

Глава 4. ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вещественное (комплексное) *линейное* пространство E (U) называется *евклидовым* (*унитарным*) или *пространством со скалярным произведением*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие вещественное (комплексное) число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением*, так что выполнены следующие аксиомы:

$$1) (x, x) \in \mathbb{R}^+, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2) (x, y) = \overline{(y, x)}^4;$$

$$3) (\lambda x, y) = \lambda (x, y);$$

$$4) (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

Следствия:

$$1. (x, y + z) = (x, y) + (x, z); \quad 2. (x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)^5.$$

Замечание. Пространство со скалярным произведением также называют *предгильбертовым пространством*.

Теорема 4.1. В пространстве со скалярным произведением справедливо *неравенство Коши-Буняковского*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

► Докажем неравенство для унитарного пространства (в евклидовом пространстве доказывается аналогично).

Для любого комплексного числа λ выполняется неравенство (аксиома 1):

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0.$$

Из которого по свойствам скалярного произведения получим

$$\begin{aligned} (x + \lambda y, x + \lambda y) &= (x, x) + (x, \lambda y) + (\lambda y, x) + (\lambda y, \lambda y) = \\ &= (x, x) + \bar{\lambda} (x, y) + \lambda (y, x) + \lambda \bar{\lambda} (y, y) \geq 0. \end{aligned}$$

⁴ Для евклидова пространства $(x, y) = (y, x)$.

⁵ Для евклидова пространства $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$.

Пусть $y \neq 0$ (при $y = 0$ неравенство Коши-Буняковского выполняется). Положим $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$, тогда $\bar{\lambda} = -\frac{(y, x)}{(y, y)}$, и неравенство примет вид

$$\begin{aligned} & (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) = \\ &= (x, x) - \frac{(y, x)}{(y, y)}(x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, x) + \frac{(y, x)}{(y, y)} \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, y) = \\ &= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое неравенство. ◀

Теорема 4.2. Всякое пространство со скалярным произведением является нормированным, так как скалярное произведение определяет норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

► Покажем, что функция $f(x) = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы:

1) Из 1-й аксиомы скалярного произведения непосредственно следует, что $\sqrt{(x, x)} \geq 0$ и $\sqrt{(x, x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$2) \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (x, x)} = |\lambda| \|x\|;$$

$$\begin{aligned} 3) \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\| + \|y\| \cdot \|x\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Теорема 4.3 (Тождество параллелограмма). Во всяком пространстве со скалярным произведением справедливо *равенство параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Замечание 1. Равенство параллелограмма является характеристическим свойством нормы, порожденной скалярным произведением, т.е. в ЛНП можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой пространства $((x, x) = \|x\|^2)$, только если выполняется равенство параллелограмма.

► Если норма пространства X удовлетворяет тождеству параллелограмма, то формула

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

определяет на X скалярное произведение, причем $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. ◀

Замечание 2. Аналогично доказательству тождества параллелограмма показывается справедливость следующих равенств для евклидовых пространств:

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad 2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Замечание 3. Пусть X – ЛНП с нормой $\|x\|$. Если в пространстве X можно ввести скалярное произведение (x, y) , то оно породит в X еще одну норму: $\|x\|_c = \sqrt{(x, x)}$, не совпадающую, в общем случае, с $\|x\|$. Если при этом $\|x\|_c$ подчинена $\|x\|$, то говорят, что X – **оснащенное ЛНП**. Если при этом норма $\|x\|_c$ не эквивалентна норме $\|x\|$, то в X возникает два вида сходимости. При этом сходимость по норме, соответствующей скалярному произведению принято обозначать « $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ » (или « $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ »).

Пример 4.1. Рассмотрим пространство $C[a, b]$. Покажем, что

- 1) в нем нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой пространства;
- 2) его можно оснастить скалярным произведением:

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt; \tag{4.2}$$

- 3) скалярное произведение (4.2) порождает новый вид сходимости.

► 1) Для доказательства достаточно показать, что в пространстве $C[a, b]$ не выполняется равенство параллелограмма. Пусть

$$x(t) = \frac{1}{2}, \quad y(t) = \frac{t-a}{2(b-a)}.$$

Тогда $\|x + y\| = 1$, $\|x - y\| = \|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}$, а значит,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$$\begin{aligned} 2) \|x\|_c &= \sqrt{(x, x)} = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \left(\max_{t \in [a, b]} |x(t)| \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_a^b 1 dt \right)^{1/2} \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = \sqrt{b-a} \|x\|. \end{aligned}$$

3) Для доказательства достаточно рассмотреть функциональную последовательность

$$x_n(t) = \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^n.$$

Легко показать (см. пример 7 в главе 2), что последовательность сходится в среднем к нулевой функции ($\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \mathbf{0}\|_c = 0$), но при этом не существует непрерывной функции, к которой последовательность сходится равномерно, т.е. в смысле нормы пространства $C[a, b]$. ◀

Теорема 4.4 (Непрерывность скалярного произведения). Скалярное произведение является непрерывной функцией своих аргументов, т.е. если при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

► Так как

$$(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x, y_n) + (x, y_n - y),$$

с учетом неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| < \varepsilon \end{aligned}$$

($\{\|y_n\|\}$ ограничена, т.к. $y_n \rightarrow y$). ◀

Пусть E – пространство со скалярным произведением. Если $(x, y) = 0$, то элементы x и y называют **ортгоналными** (обозначение $x \perp y$). Нуль пространства E ортгонален любому элементу.

Элемент $x \in E$ **ортгонален** множеству $L \subset E$ ($x \perp L$), если x ортгонален любому элементу $y \in L$.

Совокупность всех элементов пространства E , ортгоналных множеству $L \subset E$, называется **ортгональным дополнением к L** и обозначается $L^\perp$.

Теорема 4.5. Пусть E – пространство со скалярным произведением. Ортгональное дополнение к любому множеству $L \subset E$ является подпространством в E (т.е. замкнутым линейным многообразием).[15]

► **Линейность $L^\perp$.** Пусть $z_1, z_2 \in L^\perp$, т.е.

$$\forall y \in L \quad (z_1, y) = 0 \text{ и } (z_2, y) = 0.$$

Тогда для любых скаляров λ_1, λ_2

$$\forall y \in L \quad (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, y) = \lambda_1 (z_1, y) + \lambda_2 (z_2, y) = 0,$$

т.е. $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L^\perp$.

Замкнутость $L^\perp$. Пусть дана последовательность $\{z_n\}$:

$$z_n \in L^\perp \text{ и } z_n \rightarrow z \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда $\forall y \in L \quad (z_n, y) = 0$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ по свойству непрерывности скалярного произведения, получим $\forall y \in L \quad (z, y) = 0$, т.е. $z \in L^\perp$. ◀

Примеры пространств со скалярным произведением:

1. Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ – симметричная положительно определенная матрица. Тогда в пространстве столбцов

$$X = \{(x_k)_{k=1}^m \mid x_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m}\}$$

можно ввести скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i y_j, \quad x, y \in X, \quad x = (x_i)_{i=1}^m, \quad y = (y_j)_{j=1}^m, \quad (4.3)$$

а значит, и норму $\|x\| = \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2}$.

► Покажем, что (4.3) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения:

$$1) \forall x \in X \quad (x, x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j = A(x, x) \geq 0,$$

где $A(x, x)$ - положительно определенная квадратичная форма с матрицей A , которая, как известно, принимает неотрицательные значения, причем $(x, x) = A(x, x) = 0 \sim x = \mathbf{0}$.

2) $\forall x, y \in X \quad (x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} y_j x_i = \sum_{i,j=1}^m a_{ji} y_j x_i = (y, x)$ в силу симметричности матрицы A .

$$3) \forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} (\lambda x_i) y_j = \lambda \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \lambda (x, y).$$

$$4) \forall x, y, z \in X \quad (x + y, z) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} (x_i + y_i) z_j = \\ = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i z_j + \sum_{i,j=1}^m a_{ij} y_i z_j = (x, z) + (y, z). \blacktriangleleft$$

2. Пространство $Q[a, b]$ всех кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций, непрерывных всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), являющихся регулярными по Лебегу⁶. В этом пространстве скалярное произведение двух любых элементов $f(x)$ и $g(x)$ следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (4.4)$$

► Очевидно, что для любых кусочно-непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интеграл (4.4) существует.

Справедливость аксиом 3, 4 вытекает из линейных свойств интеграла, а выполнение аксиомы 2 очевидно.

⁶ Точка x_0 называется *регулярной по Лебегу*, если $f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2}$.

Покажем справедливость аксиомы 1. Так как

$$\forall f \quad (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0,$$

то достаточно доказать, что

$$\forall f \in Q[a, b] \quad (f, f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

т.е. функция f является нулевым элементом пространства $Q[a, b]$.

Так как f кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то этот сегмент можно разбить на конечное число частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$),

на каждом из которых f непрерывна. Из равенства $\int_a^b f^2(x) dx = 0$

следует, что

$$\forall i = \overline{1, n} \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x) dx = 0. \quad (4.5)$$

Функция f^2 непрерывна внутри каждого частичного сегмента, поэтому равенства (4.5) влекут равенство нулю функции f на каждом из частичных сегментов. Учитывая регулярность точек разрыва, получим равенство нулю функции f и в точках раз. ◀

Замечание 1. Кроме скалярного произведения (4.4) в пространстве $Q[a, b]$ можно определить скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx,$$

где $\omega(x)$ – произвольная положительная и интегрируемая на $[a, b]$ функция.

Замечание 2. Для комплексного пространства $Q[a, b]$ (пространство комплекснозначных кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций), скалярное произведение вводится следующим образом

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

4.2. ГИЛЬБЕРТОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Как и в теории ЛНП, в теории пространств со скалярным произведением особую роль играют полные пространства.

Пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением. Гильбертовы пространства обычно обозначают буквой H .

Примерами гильбертовых пространств являются пространства E^m , l_2 , L_2 . Не является гильбертовым, например, пространство CL_2 .

Гильбертово пространство может быть как действительным, так и комплексным. Любое *конечномерное* пространство над полем действительных или комплексных чисел, в котором введено скалярное произведение, является полным. Обычно такие пространства называют *евклидовыми*, а *гильбертовыми* называют полные *бесконечномерные* евклидовы пространства. Обычно их обозначают буквой H .

Поскольку гильбертово пространство является линейным, нормированным, банаховым, а, следовательно, и метрическим, одновременно, на него переносятся все определения, понятия и утверждения, введенные при изучении метрических, линейных, нормированных и банаховых пространств.

Сходимость по норме $x_n \rightarrow x$ (т.е. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$) для гильбертовых пространств называется *сильной сходимостью*.

Последовательность $\{x_n\}, x_n \in H$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in H$, если $\forall f \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, f) = (x, f), \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n, f) - (x, f)] = 0, \text{ или} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x, f) = 0.$$

Свойства слабо сходящихся последовательностей

1. Последовательность $\{x_n\}, x_n \in H$ не может слабо сходиться к различным элементам из H .

► Пусть существуют два элемента $x, \tilde{x} \in H$, для которых

$$\forall f \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n, f) - (x, f)] = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n, f) - (\tilde{x}, f)] = 0.$$

Тогда $\forall f \in H \quad (x - \tilde{x}, f) = 0$, в частности, при $f = x - \tilde{x}$ получим $(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = 0$, а значит $x - \tilde{x} = 0$. ◀

2. Если последовательность x_n сходится сильно к x , то она слабо сходится к x .

$$\triangleright |(x_n, f) - (x, f)| = |(x_n - x, f)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|f\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \blacktriangleleft$$

3. Если последовательность x_n слабо сходится, то она ограничена.

4. Если последовательность x_n слабо сходится к x , а последовательность $\|x_n\|$ сходится к $\|x\|$, то x_n сильно сходится к x .

$$\begin{aligned} \triangleright \|x_n - x\|^2 &= (x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n) + (x, x) - 2(x_n, x) = \\ &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x) \rightarrow \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, x) = 0. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Теорема 4.6. Всякое предгильбертовое пространство X можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором гильбертовом пространстве H (Пространство H при этом называется **пополнением** пространства X).

$\triangleright$ Построим банахово пространство H как пополнение ЛНП X с нормой $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$ согласно теореме 3.10.

Для произвольных элементов $\hat{x}, \hat{y} \in H$, $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$ скалярное произведение в H определим следующим образом

$$(\hat{x}, \hat{y})_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)_X. \quad (4.6)$$

Этот предел существует, так как числовая последовательность $\{(x_n, y_n)_X\}$ фундаментальна в силу неравенства

$$\begin{aligned} |(x_m, y_m)_X - (x_n, y_n)_X| &= |(x_m - x_n, y_m)_X - (x_n, y_n - y_m)_X| \leq \\ &\leq \|x_m - x_n\|_X \|y_m\|_X + \|x_n\|_X \|y_m - y_n\|_X \end{aligned}$$

и сходимости последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Также легко проверить, что определение (4.6) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, не зависит от выбора представителей классов, а норма $\|\hat{x}\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ согласована с этим определением скалярного произведения. $\blacktriangleleft$

4.3. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА [15]

Пространство Лебега $L[a, b]$.

Банахово пространство $L[a, b]$ получается пополнением нормированного пространства $CL_1[a, b]$.

Последовательность $\{x_n(t)\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций называют **фундаментальной в $CL_1[a, b]$** или, **фундаментальной в среднем**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+p} - x_n\| = \int_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)| dt < \varepsilon.$$

Две последовательности непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^*(t)\}$ называют **эквивалентными в $CL_1[a, b]$** или **эквивалентными в среднем**, если последовательность $\{x_n(t) - x_n^*(t)\}$ является бесконечно малой в $CL_1[a, b]$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_n^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |x_n(t) - x_n^*(t)| dt = 0.$$

Согласно теореме о пополнении пространство Лебега $L[a, b]$ состоит из элементов $\hat{x}(t)$, являющихся классами эквивалентных в среднем и фундаментальных в среднем последовательностей непрерывных функций. Если $\{x_n(t)\} \in \hat{x}(t)$, то по определению,

$$\|\hat{x}\|_{L[a, b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |x_n(t)| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{CL_1[a, b]} \quad (7)$$

Подобно тому, как иррациональные числа можно трактовать как некоторые идеальные элементы, сколь угодно точно приблизиться к которым можно с помощью рациональных чисел, так и элементы пространства $L[a, b]$ мы можем рассматривать как некоторые идеальные функции, приблизиться к которым можно с помощью непрерывных функций.

Можно показать, что всякий элемент пространства $L[a, b]$ можно отождествить с некоторой обычной, вообще говоря, разрывной функцией (точнее, с некоторым множеством таких функций).

Теорема 4.7. Пусть $x(t)$ определена на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва, причем сходится интеграл $\int_a^b |x(t)| dt$. Тогда существует фундаментальная на $[a, b]$ в среднем последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ такая, что

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

(интегралы понимаются как несобственные), и, следовательно, $x(t) \in L[a, b]$.

Пространства Лебега $L_p(G)$, $p \geq 1$

Пусть G - ограниченная область в E^m , а $\bar{G}$ - ее замыкание. Пространство Лебега $L_p(G)$ является пополнением пространства $CL_p(\bar{G})$.

Элементами $L_p(G)$ являются, как и в случае пространства $L[a, b]$, некоторые «функции», приблизиться к которым с любой степенью точности (в среднем) можно с помощью непрерывных на $\bar{G}$ функций, т.к. $CL_p(\bar{G})$ плотно в $L_p(G)$.

Теорема 4.8. Пространство $L_p(G)$ – сепарабельно.

Теорема 4.10. $L_2(E)$ – гильбертово пространство.

► Для доказательства достаточно показать, что в пространстве $L_2(E)$ можно ввести скалярное произведение. Так как $L_2(E)$ есть пополнение пространства $CL_2(\bar{E})$ со скалярным произведением

$$(x, y)_{CL_2(\bar{E})} = \int_{\bar{E}} x(t) \bar{y}(t) dt,$$

то скалярное произведение в $L_2(E)$ определяется следующим образом

$$(u, v)_{L_2(E)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)_{CL_2(\bar{E})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{E}} u_n(t) \bar{v}_n(t) dt, \quad (4.8)$$

где u, v – классы, а $\{u_n\}, \{v_n\}$ – их представители, т.е. фундаментальные в среднем последовательности непрерывных функций. ◀

Следствие. Для всех классов $u(t) \in L_2(E)$ определен интеграл Лебега как предел римановских интегралов от представителей.

► Положим в (4.8) $v(t) = 1$ ($v(t)$ – класс, представителем которого является стационарная последовательность функций констант $\{1\}$, $t \in \bar{E}$), получим для $u(t) \in L_2(E)$

$$(u, 1)_{L_2(E)} = {}_{(L)}\int_E u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(R)}\int_{\bar{E}} u_n(t) dt. \blacktriangleleft$$

Линейные многообразия всюду плотные в $L_2([a, b])$:

- измеримые ограниченные функции;
- непрерывные функции;
- многочлены;
- ступенчатые функции;
- тригонометрические многочлены, при условии $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

Глава 5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Множество *ненулевых* элементов пространства E , любые два различных элемента которой ортогональны, называется **ортогональной системой**. Ортогональная система называется **ортонормированной**, если норма всех ее элементов равна 1.

Теорема 5.1. Элементы ортогональной системы (конечной или бесконечной) линейно независимы.

► Докажем от противного. Пусть для некоторых элементов $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ существуют скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что

$$\lambda_1 x_{k_1} + \lambda_2 x_{k_2} + \dots + \lambda_n x_{k_n} = 0.$$

Умножив это равенство на x_{k_i} ($1 \leq k_i \leq k_n$), скалярно, получим

$$\lambda_i (x_{k_i}, x_{k_i}) = 0,$$

но $(x_{k_i}, x_{k_i}) = \|x_{k_i}\|^2 > 0$. Значит, $\lambda_i = 0$. Это верно для любого $i = \overline{1, n}$, значит элементы $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ линейно независимы. ◀

Теорема 5.2 (об ортогонализации). [11] Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве E . Тогда в E существует **ортонормированная** система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots, \quad (5.1)$$

удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\forall n \quad \varphi_n = a_{n_1} f_1 + a_{n_2} f_2 + \dots + a_{n_n} f_n$, причем $a_{n_n} \neq 0$,
- 2) $\forall n \quad f_n = b_{n_1} \varphi_1 + b_{n_2} \varphi_2 + \dots + b_{n_n} \varphi_n$, причем $b_{n_n} \neq 0$.

► Определим элемент φ_1 формулой $\varphi_1 = a_{11} f_1$, в которой коэффициент a_{11} ищется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1,$$

т.е. $a_{11} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}$. Очевидно, что φ_1 определяется таким образом однозначно (с точностью до знака).

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, удовлетворяющие условиям, уже построены. Тогда f_n представим в виде

$$f_n = b_{n_1} \varphi_1 + b_{n_2} \varphi_2 + \dots + b_{n_{n-1}} \varphi_{n-1} + h_n,$$

при этом коэффициенты $b_{n_k}, k = \overline{1, n-1}$ выберем так, чтобы $(h_n, \varphi_k) = 0, k = \overline{1, n-1}$. Из равенства

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n_1} \varphi_1 - \dots - b_{n_{n-1}} \varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{n_k} (\varphi_k, \varphi_k) = 0,$$

получаем $b_{n_k} = \frac{(f_n, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$.

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$. Положим

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Из индуктивного построения ясно, что h_n , а значит, и φ_n , выражается через $f_1, f_2, \dots, f_n$, т.е.

$$\varphi_n = a_{n_1} f_1 + a_{n_2} f_2 + \dots + a_{n_n} f_n,$$

где $a_{n_n} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, (\varphi_n, \varphi_k) = 0, k < n,$$

$$f_n = b_{n_1} \varphi_1 + b_{n_2} \varphi_2 + \dots + b_{n_n} \varphi_n, b_{n_n} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0,$$

т.е. φ_n удовлетворяет условиям теоремы. ◀

Замечание. Каждый элемент системы (5.1) определяется однозначно с точностью до множителя ± 1 .

Примеры ортогональных систем

1. Тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

является ортонормированной системой в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

► 1) $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ если $m \neq n$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = \\ &= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, m \neq n, \quad (5.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

$$2) \|\cos nx\|_{L_2[-\pi, \pi]}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\|\sin nx\|_{L_2[-\pi, \pi]}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi. \blacktriangleleft$$

2. Многочлены Лежандра. Многочлены, определяемые равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left[(x^2 - 1)^n \right]}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

принято называть **полиномами Лежандра**. Образованные с помощью этих многочленов функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную на $[-1, 1]$ систему функций.

► *Полином Лежандра имеет степень n . Действительно,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d^n x^{2n}}{dx^n} + \dots \right) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + Q_{n-1}(x) = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$.

Покажем, что система (5.5) ортогональна в пространстве $L_2[-1, 1]$. Для этого покажем более общее утверждение, а именно, что полином Лежандра $P_n(x)$ ортогонален любому многочлену $Q_m(x)$ степени $m < n$. Заметив предварительно, что выражение $\frac{d^k (x^2 - 1)^n}{dx^k}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, обращается в нуль в точках $x = -1$ и $x = 1$, имеем, последовательно интегрируя по частям,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 Q_m(x) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx = \\
& = Q_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q'_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx = \dots \\
& = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-m}} dx = \\
& = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-m-1}} \Big|_{-1}^1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = 0, m < n; \quad (5.7)$$

в частности, $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, m \neq n$.

Подсчитаем теперь норму полиномов Лежандра. Из (5.6) и (5.7) получим

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \int_{-1}^1 P_n(x) \left[\frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x) \right] dx = \\
&= \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^1 P_n(x) x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!} \int_{-1}^1 \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} x^n dx.
\end{aligned}$$

Интегрируя последовательно по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \dots = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{-1}^1 x d(x^2 - 1)^n = \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} x^2 dx = \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} dx^3 = \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!} \cdot \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-2} x^4 dx = \dots = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. ◀

3. Многочлены, определяемые равенствами

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n(\arccos x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

называются **полиномами Чебышева**.

► *Прежде всего, убедимся, что $T_n(x)$ являются многочленами степени n . Из формулы Муавра следует, что

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \\ &= \cos^n \varphi + i C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + i^2 C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + i^3 C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Приравняем действительные части получившегося равенства

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots \quad (5.8)$$

в зависимости от четности n последним слагаемым будет либо $\sin^n \varphi$ (если n четное), либо $C_n^{n-1} \cos \varphi \sin^{n-1} \varphi$ (если n нечетное).

Заметим, что в правую часть равенства (5.8) входят только синусы в четных степенях и поэтому, применив подстановку

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$

для каждого слагаемого правой части, получим

$$\begin{aligned} C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi &= C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^k = \\ &= (-1)^k \cos^{n-2k} \varphi \cdot \cos^{2k} \varphi + \dots = (-1)^k C_n^{2k} \cos^n \varphi + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие означает, что в остальных слагаемых $\cos \varphi$ имеет меньшую, чем n , степень.

В результате из (5.8) будем иметь

$$\cos n\varphi = (1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots) \cos^n \varphi + \dots = 2^{n-1} \cos^n \varphi + \dots, \quad (5.9)$$

где справа многоточие означает линейную комбинацию степеней косинусов $\cos^{n-1} \varphi, \cos^{n-2} \varphi, \dots, 1$ (мы воспользовались тем, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна 2^{n-1}). Положив в равенстве (5.9) $\varphi = \arccos x$, а, следовательно, $\cos \varphi = x$ и разделив обе части равенства на 2^{n-1} , получим

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = T_n(x),$$

где, в силу доказанного, в правой части стоит многочлен степени n с коэффициентом, равным 1, при x^n .

Многочлены Чебышева ортогональны относительно веса⁷
 $1/\sqrt{1-x^2}$ на $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x = \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta d\theta, \\ \sqrt{1-x^2} = \sin \theta. \end{array} \right] =$$

$$= 2^{2-m-n} \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 2^{2-m-n} \pi / 2, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{dx}{2^{2n-2} \sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{2^{2n-2}} \Big|_{-1}^1 = \pi. \blacktriangleleft$$

⁷ Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют ортогональными относительно веса $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx = 0$

Глава 6. РЯДЫ ФУРЬЕ

6.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть в бесконечномерном пространстве E со скалярным произведением задана ортогональная система $\{\varphi_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ называется *рядом по ортогональной системе* $\{\varphi_k\}$.

Если $c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$, $k=1, 2, \dots$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ называется *рядом*

Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$, составленным для элемента x . Частичную сумму ряда Фурье называют *многочленом Фурье*.

Теорема 6.1 (Минимальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть система $\{\varphi_k\}$ ортогональна в пространстве со скалярным произведением U , пусть L_n – подпространство, натянутое на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Тогда

$$d_n = \inf_{u_n \in L_n} \|x - u_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|, \quad (6.1)$$

где $x \in U$, а c_k , $k=1, \dots, n$ – коэффициенты Фурье элемента x .

► Пусть $x \in U$. Вычислим квадрат расстояния между x и произвольным элементом $u_n \in L_n$:

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \|x - u_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \\ &= (x, x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k (\varphi_k, x) - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (x, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_k (\varphi_k, \varphi_k). \end{aligned}$$

Так как

$$(x, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2, \quad (\varphi_k, x) = \overline{(x, \varphi_k)} = \bar{c}_k \|\varphi_k\|^2,$$

где c_k – коэффициенты Фурье элемента x , то

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k \|\varphi_k\|^2 - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_k \|\varphi_k\|^2.$$

Так как

$$|\alpha_k - c_k|^2 = (\alpha_k - c_k)(\bar{\alpha}_k - \bar{c}_k) = \alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{c}_k - c_k \bar{\alpha}_k + |c_k|^2,$$

то

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - c_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (6.2)$$

Теперь мы можем вычислить

$$d_n = \inf_{u_n \in L_n} \|x - u_n\| = \inf_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \Delta_n,$$

где Δ_n зависит от $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$, т.е. от n комплексных переменных

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Явная формула, полученная для Δ_n^2 , показывает, что d_n достигается при $\alpha_k = c_k$, $k = \overline{1, n}$, т.е.

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|. \blacktriangleleft$$

Следствие 1. Подставляя в формулу (6.2) $\alpha_k = c_k$, $k = \overline{1, n}$, получаем

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Следствие 2. Если $m > n$, то $\left\| x - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|$.

$$\blacktriangleright d_m^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = d_n^2. \blacktriangleleft$$

Теорема 6.2. (неравенство Бесселя). Для любой ортогональной системы в любом бесконечномерном пространстве со скалярным произведением выполняется *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|x\|^2, \quad (6.3)$$

где c_k , $k = \overline{1, \infty}$ – коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{\varphi_k\}$.

► В силу минимального свойства коэффициентов Фурье

$$\forall x \in X \quad \forall n \quad \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|x\|^2.$$

В левой части этого неравенства стоит частичная сумма ряда с неотрицательными членами. Следовательно, учитывая ограниченность частичных сумм ряда Фурье, можем утверждать, что ряд Фурье сходится и для его суммы справедливо неравенство (6.3). ◀

Следствие. Если $\|\varphi_k\| \geq \alpha > 0$, $k = \overline{1, \infty}$, то коэффициенты Фурье c_k любого элемента $x \in H$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

► Из неравенства Бесселя получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|^2.$$

Следовательно, $|c_k|^2 \rightarrow 0$, как члены сходящегося ряда. ◀

6.2. ЗАМКНУТЫЕ И ПОЛНЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ [13,15,11]

Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система элементов предгильбертового пространства X .

1) $\{\varphi_k\}$ называется **полной**, если не существует элемента $x \in X$, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам системы.

2) $\{\varphi_k\}$ называется **замкнутой**, если подпространство L , порожденное этой системой, совпадает с X .

Теорема 6.3. Для того чтобы $\{\varphi_k\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось **равенство Парсеваля-Стеклова**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|x\|^2, \quad (6.4)$$

где c_k , $k = \overline{1, \infty}$ – коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{\varphi_k\}$.

► Утверждение является прямым следствием минимального свойства коэффициентов Фурье. ◀

Теорема 6.4. Если ортогональная система $\{\varphi_k\}$ является замкнутой, то каков бы ни был элемент x ,

1) ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k - x \right\| = 0;$$

2) неравенство Бесселя переходит в равенство Парсеваля-Стеклова (6.4).

Теорема 6.5. Всякая замкнутая ортогональная система является полной.

► Пусть $\{\varphi_k\}$ замкнутая ортогональная система. Предположим, что $\{\varphi_k\}$ не является полной. Пусть x — элемент евклидова пространства, ортогональный всем элементам системы $\{\varphi_k\}$. Тогда все коэффициенты Фурье c_i элемента x по системе $\{\varphi_k\}$ равны 0, и в силу равенства Парсеваля-Стеклова для ортогональной системы

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|x\|^2,$$

и, следовательно $x = 0$. ◀

Замечание. В произвольном (неполном) евклидовом пространстве из полноты ортогональной системы, вообще говоря, не вытекает замкнутость этой системы⁸.

Теорема 6.6. Всякая полная ортогональная система элементов произвольного *гильбертова* пространства H является замкнутой.

Следствие. В *гильбертовом* пространстве полнота ортогональной системы эквивалентна ее замкнутости.

Замечание. Полную ортогональную систему гильбертова пространства называют **ортогональным базисом пространства**.

⁸ Пример полной незамкнутой ортогональной системы можно посмотреть в \\\ Ильин т.2,

Теорема 6.7. Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортогональной системы $\{\varphi_k\}$ два различных элемента x и y предгильбертового пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

► Если все коэффициенты Фурье элементов x и y совпадают, то все коэффициенты Фурье разности $x - y$ равны 0, т.е. элемент $x - y$ ортогонален ко всем элементам полной системы $\{e_i\}$, и, следовательно, $x - y$ является нулевым (в силу полноты $\{e_i\}$) элементом пространства. Далее из равенства $x - y = 0$ получаем, что $x = y$. ◀

Теорема 6.8. Пусть X – оснащенное банахово пространство, и пусть $\hat{X}$ – линейное многообразие в X , плотное в X по норме $\|x\|_c = \sqrt{(x, x)}$. Пусть, далее, ряд Фурье всякого элемента $\hat{x} \in \hat{X}$ по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ сходится к $\hat{x}$ в метрике $\|\cdot\|$. Тогда $\{\varphi_k\}$ полна в X в метрике $\|\cdot\|_c$.

Пример 6.1. Пусть $X = C[-\pi, \pi]$. В качестве линейного многообразия $\hat{X}$ возьмем класс функций $x(t)$, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, кусочно-непрерывно дифференцируемых на этом отрезке и таких, что $x(-\pi) = x(\pi)$. В математическом анализе доказывается теорема о том, что ряд Фурье, составленный для $\hat{x} \in \hat{X}$, по тригонометрической системе сходится к $\hat{x}$ равномерно. Кроме того, $\hat{X}$ плотно в X в среднем (можно проверить, аппроксимируя непрерывную на $[-\pi, \pi]$, функцию ломанной $\hat{x}(t) \in \hat{X}$ и разбив $[-\pi, \pi]$ достаточно мелко). Тогда из теоремы следует сходимость ряда Фурье, составленного для непрерывной функции в среднем к ней же.

6.3. АНАЛОГИЯ С ВЕКТОРАМИ.

Любой вектор $\vec{r}$ из трехмерного пространства может быть представлен виде

$$\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}. \quad (6.5)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – три взаимно-перпендикулярных (ортогональных) вектора. Если же мы попытаемся произвольный вектор $\vec{r}$ представить в виде линейной комбинации не трех, а двух ортогональных векторов, например, $\vec{i}, \vec{j}$, то в общем случае равенства $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$ достичь не получится, поэтому систему из двух ортогональных векторов естественно называть *не полной*. Таким же образом термин «полнота» используется и для произвольной ортогональной системы, т.е. полнота ортогональной системы означает, что ее нельзя дополнить до более широкой ортогональной системы путем присоединения новых элементов.

Для нахождения скалярных коэффициентов в разложении (6.5) умножаем равенство (6.5) на $\vec{i}$, затем на $\vec{j}$ и, наконец, на $\vec{k}$, и, учитывая ортогональность векторов, получим

$$a = \frac{(\vec{r}, \vec{i})}{|\vec{i}|^2}, \quad b = \frac{(\vec{r}, \vec{j})}{|\vec{j}|^2}, \quad c = \frac{(\vec{r}, \vec{k})}{|\vec{k}|^2}.$$

Таким образом, коэффициенты Фурье вычисляются также как и коэффициенты в разложении (6.5) (в трехмерном пространстве $\|\vec{x}\| = |\vec{x}|$).

Найдем длину вектора $\vec{r}$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})} = \sqrt{a^2 |\vec{i}|^2 + b^2 |\vec{j}|^2 + c^2 |\vec{k}|^2}.$$

Полученная формула совпадает с равенством Парсеваля-Стеклова. Очевидно, выбирая неполную систему в евклидовом пространстве мы будем получать неравенство Бесселя.

6.4. ИЗОМОРФИЗМ ГИЛЬБЕРТОВЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 6.9. Гильбертово пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует ортогональный базис из конечного или счетного числа элементов.

* ► *Необходимость.* Пусть H сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H найдется счетное, всюду плотное множество $\{x_n\}$.

Пусть x_k – первый ненулевой элемент $\{x_n\}$; обозначим его e_1 . Рассмотрим последовательность $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$. Пусть x_l – первый ее элемент, линейно независимый с e_1 . Обозначим его e_2 . Рассмотрим теперь последовательность $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots$ и обозначим через e_3 первый ее элемент, не являющийся линейной комбинацией e_1 и e_2 . Продолжая далее, получим конечную или бесконечную систему элементов $\{e_n\}$. Так как линейная оболочка L системы $\{e_n\}$ содержит систему $\{x_n\}$, то L плотна в H . Ортогонализуя систему $\{e_n\}$, придем к ортогональной системе $\{c_n\}$. Так как линейные оболочки системы $\{c_n\}$ и $\{e_n\}$ совпадают, а L плотна в H , то система $\{c_n\}$ образует искомый базис.

Достаточность. Множество всех конечных линейных комбинаций векторов ортогональной системы $\{\tilde{n}_k\}$ с рациональными коэффициентами (с комплексными коэффициентами, с рациональной вещественной и мнимой частями) образуют счетное множество плотное в вещественном (комплексном) пространстве H . ◀

Теорема 6.10. Всякое комплексное (вещественное) сепарабельное гильбертово пространство изометрично и изоморфно комплексному (вещественному) пространству l_2 , и, следовательно, все комплексные (вещественные) сепарабельные гильбертовы пространства изометричны и изоморфны.

► *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, а $\{e_i\}$ – полная ортонормированная система в этом пространстве. Если x – некоторый элемент из H , то этому элементу можно поставить в соответствие последовательность чисел $c_1, c_2, \dots$, являющихся коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_i\}$.

Так как $\{e_i\}$ полная ортонормированная система, то ряд Фурье, построенный для произвольного элемента $x \in H$, сходится к этому элементу и выполняется равенство Парсеваля-Стеклова

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|_H^2.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, а значит, последовательность $c_1, c_2, \dots$ можно рассматривать как некоторый элемент $\tilde{x}$ комплексного пространства l_2 .

Таким образом, каждому элементу $x \in H$ соответствует некоторый элемент $\tilde{x} \in l_2$, причем в силу условия полноты системы

$$\|x\|_H = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2} = \|\tilde{x}\|_{l_2}. \quad (6.6)$$

Пусть $x \in H, y \in H$ и им соответствуют элементы $\tilde{x} \in l_2, \tilde{y} \in l_2$, тогда элементу $x \pm y$ соответствует элемент $\tilde{x} \pm \tilde{y}$ и, учитывая (6.6),

$$\|x - y\|_H = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{l_2}. \quad (6.7)$$

Пусть теперь $\tilde{z} = \{\xi_i\}$ – произвольный элемент из l_2 . Рассмотрим в H элементы $z_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ ($n=1, 2, \dots$). При $n > m$

$$\|z_n - z_m\|_H^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \xi_i e_i \right\|_H^2 = \sum_{i=m+1}^n |\xi_i|^2,$$

а значит, $\|z_n - z_m\|_H^2 \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна в смысле метрики пространства H и вследствие его полноты сходится к некоторому элементу $z \in H$.

Так как $(z, e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n, e_i) = \xi_i$, то коэффициенты Фурье элемента z по выбранной ортонормированной системе есть ξ_i .

Таким образом, каждый элемент $\tilde{z} \in l_2$ соответствует некоторому элементу $z \in H$. Следовательно, установлено взаимно-однозначное соотношение между элементами H и l_2 . Это соответствие есть изометрия. Кроме того, если x соответствует $\tilde{x}$, то λx соответствует $\lambda \tilde{x}$, поэтому, учитывая ранее сказанное относительно сохранения операции сложения при рассматриваемом соответствии, получаем, что H и l_2 изоморфны. ◀

Следствие (теорема Рисса-Фишера). Пространства $L_2[0,1]$ и l_2 изометричны и изоморфны.

Глава 7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОДПРОСТРАНСТВА

7.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть A – подпространство МП X . *Расстоянием* от точки $x \in X$ до множества A называется число

$$\rho(x, A) = \inf_{u \in A} \rho(x, u).$$

Замечание. Если X – ЛНП, то $\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$.

Лемма 7.1. Пусть A – метрическое пространство. Если $x \in A$, то $\rho(x, A) = 0$. Если $x \notin A$ и A замкнуто, то $\rho(x, A) > 0$.

► Если $x \in A$, то при $u = x$ имеем

$$\rho(x, A) = \inf_{u \in A} \rho(x, u) = \rho(x, x) = 0.$$

Пусть теперь A замкнуто, а $x \notin A$. Допустим, что $\rho(x, A) = 0$. Так как $\rho(x, A)$ – точная нижняя грань множества $\{\rho(x, u) \mid u \in A\}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n \in A \quad \rho(x, u_n) < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $u_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Вследствие замкнутости A , $x \in A$, но по условию $x \notin A$. Значит, допущение $\rho(x, A) = 0$ неверно, следовательно $\rho(x, A) > 0$ ◀

Число $\rho(x, A)$ характеризует наилучшее приближение (наилучшую аппроксимацию) элемента x при помощи элементов подпространства A . Если существует элемент $u^* \in A$ такой, что

$$\rho(x, A) = \rho(x, u^*),$$

то u^* называется *наилучшим элементом приближения* x элементами подпространства A .

Замечание. Наилучший элемент может оказаться не единственным, а может и не существовать вовсе.

► 1. В пространстве двумерных строк $x = (\xi_1, \xi_2)$ с нормой $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ возьмем точку $x_0 = (-1, 1)$ и одномерное подпространство L с базисным вектором $e = (1, 1)$, т.е. $L = \{\alpha e \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Вычислим расстояние

$$\rho(x_0, L) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|x_0 - \alpha e\| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} (|1 + \alpha| + |1 - \alpha|) = 2.$$

Оно достигается при любых $\alpha \in [-1, 1]$. Следовательно, имеется бесконечное (континуальное) множество наилучших элементов $u^* = \alpha e$, $\alpha \in [-1, 1]$, приближающих x_0 с помощью элементов L .

2. Пусть L – множество многочленов. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса, $\rho(\sin x, L) = 0$. Но функция $\sin x$ не является многочленом, а значит, не существует такого $u^* \in L$, что $\rho(\sin x, u^*) = 0$, т.е. не существует наилучшего элемента. ◀

7.2. НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема 7.1. Пусть L – конечномерное подпространство ЛНП E . Для любого $x \in E$ существует (возможно, не единственный) такой элемент $u^* \in L$, что

$$\rho(x, L) = \|x - u^*\|.$$

► 1. Если $x \in L$, то, очевидно, $u^* = x$.

2. Пусть $x \notin L$, тогда $\rho(x, L) = d > 0$. Пусть, далее, $\{e_k\}_{k=1}^m$ – базис L , а $u = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ разложение $u \in L$ по базису. Введем в L норму

$$\|u\|_c = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\xi_k)^2}.$$

Вследствие конечномерности L , обе нормы эквивалентны, т.е. найдутся постоянные $\alpha > 0, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha \|u\|_c \leq \|u\| \leq \beta \|u\|_c. \quad (7.1)$$

L как линейное пространство, снабженное нормой $\|u\|_c$, обозначим через L^m . Рассмотрим в L^m функцию

$$f(u) = \|x - u\|.$$

Функция $f(u)$ непрерывна на L^m , так как из обратного неравенства треугольника и (7.1) следует, что

$$|f(u') - f(u'')| = \left| \|x - u'\| - \|x - u''\| \right| \leq \|u' - u''\| \leq \beta \|u' - u''\|_c,$$

т.е. выполняется условие Липшица.

Покажем, что расстояние

$$d = \inf_{u \in L} f(u) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$$

может достигаться только в шаре $\|u\|_c \leq r$, где $r = \alpha^{-1}(d + 1 + \|x\|)$.

Действительно, если $\|u\|_c > r$, то

$$\|x - u\| \geq \left| \|u\| - \|x\| \right| \geq \|u\| - \|x\| \geq \alpha \|u\|_c - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1,$$

а значит, вне шара $\|u\|_c \leq r$ точная нижняя грань функции $f(u) = \|x - u\|$ достигаться не может. Поскольку шар $\|u\|_c \leq r$ является в L^m замкнутым ограниченным множеством, а функция $f(u)$ непрерывна, то найдется $u^* \in L$ — наилучший элемент приближения x элементами L , на котором достигается наименьшее значение $f(u)$. ◀

ЛНП E называют **строго нормированным**, если в нем равенство

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

возможно только в двух случаях:

- 1) хотя бы один из векторов равен $\mathbf{0} \in E$;
- 2) $\exists \lambda > 0 \quad y = \lambda x$.

Пример 7.1. Пространства $L_p[0,1]$ и l_p , $p > 1$ — строго нормированные. Пространства $C[0,1]$, $L[0,1]$ и l не являются строго нормированными (для пространств $C[0,1]$, $L[0,1]$ достаточно рассмотреть функции $x(t) = 2 - t^2$, $y(t) = 4 - t^2$, а для пространства l — последовательности $x = \{1, 0, 0, \dots\}$ $y = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$).

Теорема 7.2. В строго нормированном пространстве E для каждого $x \in E$ и каждого подпространства L может существовать не более одного наилучшего элемента приближения x элементами L .

► Допустим, что в некотором строго нормированном пространстве E найдутся элемент x , подпространство L и элементы $u_1^*, u_2^* \in L$ такие, что

$$\|x - u_1^*\| = \|x - u_2^*\| = d = \inf_{u \in L} \|x - u\|. \quad (7.2)$$

Пусть $d > 0$ (если $d = 0$, то $u_1^* = u_2^*$ по 1-й аксиоме нормы), тогда

$$\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = \left\| \frac{x - u_1^*}{2} + \frac{x - u_2^*}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|x - u_1^*\| + \frac{1}{2} \|x - u_2^*\| = d.$$

Следовательно, $\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| \leq d$.

Так как $u_1^*, u_2^* \in L$, то $\frac{u_1^* + u_2^*}{2} \in L$, поэтому, учитывая что

$d = \inf_{u \in L} \|x - u\|$, получаем $\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| \geq d$. Таким образом, мы полу-

чили, что $\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = d$, а значит,

$$\|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = 2 \left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = 2d = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0.$$

По строгой нормированности E существует $\lambda > 0$ такое, что

$$x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*).$$

Если $\lambda \neq 1$ (если $\lambda = 1$, то $u_2^* = u_1^*$), то $x = \frac{u_2^* - \lambda u_1^*}{1 - \lambda}$. Следовательно-

но, $x \in L$, так как является линейной комбинацией элементов из L . Но это невозможно, так как при этом $d = \inf_{u \in L} \|x - u\| = 0$, а мы предполагали, что $d > 0$. ◀

7.3. НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Теорема 7.3. Гильбертово пространство H над полем $\mathbb{R}$ является строго нормированным.

► Пусть $x, y \in H$, $x \neq 0, y \neq 0$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Тогда

$$\|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|,$$

с другой стороны

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y).$$

Из двух полученных равенств следует, что

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| > 0. \quad (7.3)$$

Тогда, для произвольного λ

$$\|\lambda x - y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \|y\|^2 = (\lambda \|x\| - \|y\|)^2. \quad (7.4)$$

При $\exists \lambda = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ получаем $\|\lambda x - y\| = 0$, а значит $y = \lambda x$. ◀

Теорема 7.4. В гильбертовом пространстве H для каждого $x \in H$ и каждого конечномерного подпространства L существует единственный элемент наилучшего приближения x элементами L .

► Теорема является следствием теорем 7.1–7.3. ◀

Пусть L – подпространство предгильбертова пространства X . **Проекцией** элемента x на L называется элемент y такой, что $(x - y) \perp L$, т.е. $\forall l \in L (x - y, l) = 0$.

Замечание. В отличие от конечномерного случая в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением может не существовать проекции элемента на подпространство.

► Множество $P[0,1]$ функций, являющихся многочленами, является подпространством в $CL_2[0,1]$. Покажем, что для функции $x(t) = e^t \in CL_2[0,1]$ не существует проекции этой функции на подпространство $P[0,1]$. Предположим, что такая проекция есть. Тогда существует многочлен $y(t)$ такой, что $x - y$ ортогонально любому

многочлену. Пусть $x_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}$. Тогда $(x - y, x_n - y) = 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве, получим $\|x - y\|^2 = 0$, т.е. $x = y$. Но такое невозможно, так как e^t не является многочленом. ◀

Теорема 7.5. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H . Тогда, $\forall x \in H$ если $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$, то $(x - u^*) \perp L$.

► Пусть $h \in L$ и λ – произвольный комплексный (вещественный, если H вещественно) параметр.

$$\|x - u^*\| = \inf_{u \in L} \|x - u\| \leq \|x - u^* + \lambda h\|.$$

Следовательно,

$$(x - u^*, x - u^*) \leq (x - u^* + \lambda h, x - u^* + \lambda h),$$

$$\lambda(h, x - u^*) + \bar{\lambda}(x - u^*, h) + \lambda \bar{\lambda} \|h\|^2 \geq 0.$$

Откуда, полагая $\lambda = -\frac{(x - u^*, h)}{\|h\|^2} \geq 0$, получим $-\frac{|(x - u^*, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0$,

а значит, $(x - u^*, h) = 0$. ◀

Следствие (теорема о проекции). Пусть L подпространство гильбертова пространства H . Тогда, для любого $x \in H$ существует, и притом единственная, его проекция на L .

► *Существование.* Пусть x – произвольный элемент пространства H . Тогда согласно теореме 7.4 существует наилучшее приближение $u^* \in L$, являющееся, в силу теоремы 7.5, проекцией элемента x на подпространство L .

Единственность. Пусть, кроме u^* , элемент $u \in L$ также является проекцией элемента $x \in H$, т.е. $x = u^* + z_1$, $x = u + z_2$, где $z_1, z_2 \in L^\perp$. Тогда $u^* - u = z_2 - z_1 \in L^\perp$. С другой стороны $u^* - u \in L$, поэтому

$$(u^* - u, u^* - u) = 0,$$

а значит, $\|u^* - u\| = 0$ и $u^* = u$. ◀

Теорема 7.6. Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H . L всюду плотно в H тогда и только тогда, когда $L^\perp = \{0\}$.

► *Необходимость.* Пусть $x \in L^\perp$. Тогда по свойству непрерывности скалярного произведения следует, что $x \perp \bar{L}$. По условию $\bar{L} = H$, значит, $x \perp H$, и в частности $x \perp x$. Следовательно, $x = 0$ (аксиома скалярного произведения).

Достаточность. Пусть L не всюду плотно в H . Тогда $\bar{L} \neq H$ и существует $x \in H, x \notin \bar{L}$. Тогда по предыдущей теореме существует разложение $x = y + z$, где $y \in \bar{L}, z \perp \bar{L}$, и так как $x \notin \bar{L}$, то $z \neq 0$. Но это противоречит условию (т.е. тому, что $\bar{L}^\perp \subseteq L^\perp = \{0\}$). ◀

Пример 7.2. В пространстве $L_2[0,1]$ найти проекции элемента t^4 на подпространство P , где P – пространство многочленов степени не превышающей 2.

► *Способ 1.* В пространстве многочленов, степень которых не более 2, в качестве базиса можно выбрать функции $1, t, t^2$. Обозначим, через $u^* = a + bt + ct^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ проекцию элемента t^4 на подпространство многочленов. Тогда согласно предыдущей теореме для произвольного полинома

$$\forall h(t) \in P \quad (t^4 - u^*(t), h(t)) = 0.$$

Выбирая в качестве $h(t)$ полиномы $1, t, t^2$, получим систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (t^4 - u^*(t), 1) = \int_0^1 (t^4 - at^2 - bt - c) dt = \frac{1}{5} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c = 0, \\ (t^4 - u^*(t), t) = \int_0^1 (t^4 - at^2 - bt - c)t dt = \frac{1}{6} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} = 0, \\ (t^4 - u^*(t), t^2) = \int_0^1 (t^4 - at^2 - bt - c)t^2 dt = \frac{1}{7} - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} = 0. \end{array} \right.$$

Решив систему, получим $u^* = \frac{12}{7}t^2 - \frac{32}{35}t + \frac{3}{35}$.

Способ 2. Рассмотрим многочлены $1, t, t^2$. Они образуют линейно независимую систему. Применим к ним в пространстве $L_2[0,1]$ процесс ортогонализации Грамма-Шмидта и построим ортонормированную систему полиномов Лежандра $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$.

$$1) \quad l_0 = 1; \quad p_0 = \frac{l_0}{\|l_0\|} = \frac{1}{\left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{1/2}} = 1;$$

$$2) \quad l_1 = t - \alpha_{10} l_0, \quad \alpha_{10} = \frac{(l_0, t)}{(l_0, l_0)} = \frac{\int_0^1 t \cdot 1 \cdot dt}{1} = \frac{1}{2};$$

$$p_1(t) = \frac{l_1}{\|l_1\|} = \frac{t - 1/2}{\left(\int_0^1 (t - 1/2)^2 dt\right)^{1/2}} = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3};$$

$$l_1 = t - \frac{1}{2}.$$

$$3) \quad l_2 = t^2 - \alpha_{20} l_0 - \alpha_{21} l_1,$$

$$\alpha_{20} = \frac{(l_0, t^2)}{(l_0, l_0)} = \frac{\int_0^1 t^2 dt}{1} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{21} = \frac{(l_1, t^2)}{(l_1, l_1)} = \frac{\int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt}{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = 1,$$

$$l_2(t) = t^2 - \frac{1}{3} - \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6},$$

$$p_2(t) = \frac{l_2}{\|l_2\|} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\left(\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt\right)^{1/2}} = 6\sqrt{5}(t^2 - t) + \sqrt{5}.$$

По теореме о разложении в ряд Фурье по ортогональной системе элемента $x(t)$ получим $u(t) = (t^4, p_0) p_0 + (t^4, p_1) p_1 + (t^4, p_2) p_2$. ◀

Пример 7.3. В гильбертовом пространстве бесконечных числовых последовательностей l_2 найти проекцию вектора $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots\right)$ на подпространство

$$L = \left\{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7^2}, \dots\right), y = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \dots\right) \right\},$$

► Обозначим через z проекцию вектора x на подпространство L , тогда $z = \alpha x + \beta y$ и $x_0 - z \perp L$, т.е. $(x_0 - z, x) = 0$ и $(x_0 - z, y) = 0$.

Из условия ортогональности для определения коэффициентов α и β получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha(x, x) + \beta(y, x) = (x_0, x) \\ \alpha(x, y) + \beta(y, y) = (x_0, y) \end{cases}$$

Рассчитаем коэффициенты системы.

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49^k} = \frac{1}{48};$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k} \cdot \frac{1}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{56^k} = \frac{1}{55};$$

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{64^k} = \frac{1}{63};$$

$$(x_0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{0k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{14^k} = \frac{1}{13};$$

$$(x_0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{0k} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{15};$$

Система примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{48}\alpha + \frac{1}{55}\beta = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{55}\alpha + \frac{1}{63}\beta = \frac{1}{15} \end{cases},$$

Решая систему по правилу Крамера, получим

$$z = -\frac{1056}{13}x - \frac{1155}{13}y. \blacktriangleleft$$

Глава 8. ОПЕРАТОРЫ

8.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть X и Y – множества произвольной природы, $F: X \rightarrow Y$ – некоторый оператор с областью определения $D(F) \subset X$ и областью значений $R(F) \subset Y$.

Два оператора $F: X \rightarrow Y$ и $G: X \rightarrow Y$ называют **равными**, если

$$D(F) = D(G) = D \quad \text{и} \quad \forall x \in D \quad G(x) = F(x).$$

Говорят, что оператор A

– **задан всюду** в X , если $D(A) = X$;

– **плотно задан** в X , если X – ЛНП и $\bar{D} = X$.

Оператор G называют **расширением** оператора F (а оператор F – **сужением** оператора G), если

$$D(G) \supset D(F) \quad \text{и} \quad \forall x \in D(F) \quad G(x) = F(x).$$

I. Операторы в метрических пространствах (X, Y – МП)

Элемент $y_0 \in Y$ называется **пределом** $F(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если оператор $F: X \rightarrow Y$ определен в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$, за исключением, быть может, самой точки x_0 , и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D(F) \setminus \{x_0\} \\ \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

Оператор $F: X \rightarrow Y$, определенный в окрестности точки $x_0 \in X$, называется **непрерывным в точке** x_0 , если

$$F(x) \rightarrow F(x_0) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

$$\text{или} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(F) \quad \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

Оператор $F(x)$ называется **непрерывным на** $D(F)$, если он непрерывен в каждой точке множества D .

Теорема 8.1. Отображение $F: X \rightarrow Y$ непрерывно (т.е. непрерывно в каждой точке пространства X) тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (замкнутого) множества является открытым (замкнутым) множеством.

Говорят, что оператор удовлетворяет **условию Липшица**, если

$$\exists c > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D(F) \quad \rho_Y(P(x_1), P(x_2)) \leq c \rho_X(x_1, x_2), \quad (8.1)$$

Лемма 8.1. Оператор, удовлетворяющий условию Липшица является непрерывным.

Теорема 8.2. Если оператор $F: X \rightarrow Y$ непрерывен в т. $x_0 \in X$, а оператор $G: Y \rightarrow Z$ непрерывен в т. $y_0 = F(x_0)$, $y_0 \in Y$, то их композиция, заданная формулой $z = G(F(x))$ непрерывна в т. $x_0 \in X$.

Операторы в линейных пространствах (X, Y – ЛП, оба вещественные или оба комплексные).

Оператор $A: X \rightarrow Y$ называют:

1) **нулевым**, если $\forall x \in X \quad Ax = \mathbf{0}$;

2) **линейным**, если

а) $D(A)$ – линейное многообразие;

б) $\forall x, y \in D(A)$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$.

Теорема 8.3. Область значений всякого линейного оператора – линейное многообразие.

Теорема 8.4. Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ переводит нулевой элемент пространства X в нулевой элемент пространства Y .

► Пусть $\mathbf{0}_x$ – нулевой элемент пространства X , тогда $\mathbf{0}_x = 0 \cdot x$, где x произвольный элемент пространства X . Так как A линейный оператор, то $A\mathbf{0}_x = A(0 \cdot x) = 0 \cdot (Ax) = \mathbf{0}_y$. ◀

Операторы в нормированных пространствах (X, Y – ЛНП)

Теорема 8.5. Пусть $A: X \rightarrow Y$ – линейный оператор. Тогда если оператор A непрерывен в точке $\mathbf{0} \in X$, то он непрерывен в любой точке $x_0 \in D(A)$.

► Пусть $x_n \rightarrow x_0$, $x_0 \in X$ тогда $z_n = x_n - x_0 \rightarrow \mathbf{0}$. Учитывая, что оператор A линеен и непрерывен в нуле, получим

$$Ax_n - Ax_0 = A(x_n - x_0) = Az_n \rightarrow \mathbf{0},$$

а значит, $Ax_n \rightarrow Ax_0$. ◀

Оператор $F: X \rightarrow Y$ называется **ограниченным**, если он переводит всякое ограниченное в X множество из $D(F)$ во множество, ограниченное в Y .

Лемма 8.2. Оператор $A: X \rightarrow Y$ является ограниченным, если

$$\exists c > 0, c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq c \|x\|_X. \quad (8.2)$$

Лемма 8.3. Для того чтобы линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ был ограничен необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.

Пример 8.1. Пусть $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$. Покажем, что данный оператор является линейным и непрерывным.

► *Линейность:*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) = t^2 (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha Ax_1(t) + \beta Ax_2(t).$$

Непрерывность: Так как оператор является линейным, то для доказательства непрерывности достаточно доказать непрерывность в нуле. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $x_n(t) \rightarrow \mathbf{0}(t)$ в пространстве $C[0,1]$, т.е.

$$\max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - \mathbf{0}(t)| \rightarrow 0,$$

и в силу полноты пространства $C[0,1]$, $x_0(t) \in C[0,1]$. Тогда $Ax_n(t) \rightarrow \mathbf{0}$ в пространстве $C[0,1]$:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,1]} |Ax_n(t) - \mathbf{0}| &= \max_{t \in [0,1]} |t^2 x_n(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |t^2| \cdot \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 8.2. Пусть $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $Ax(t) = x^2(t)$. Выясним, совпадает ли область задания оператора $D(A)$ со всем пространством $L_2[0,1]$? Будет ли оператор A линейным, непрерывным, если $A: D(A) \rightarrow L_2[0,1]$?

► Область определения оператора $D(A)$ не совпадает с пространством $L_2[0,1]$. Например, функция $x(t) = t^{-1/4}$ принадлежит

пространству $L_2[0,1]$, т.к. $\int_0^1 \left| t^{-1/4} \right|^2 dt < +\infty$, но $Ax(t) = t^{-1/2}$ не принадлежит пространству $L_2[0,1]$, т.к. $\int_0^1 \left| t^{-1/2} \right|^2 dt \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим оператор на области определения $D(A)$. Оператор не является линейным, поскольку

$$A(x_1 + x_2)(t) = (x_1(t) + x_2(t))^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t) = Ax_1(t) + Ax_2(t).$$

Оператор A не является и непрерывным. Рассмотрим последовательность $x_n(t) \in D(A)$:

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt[4]{n}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

которая в пространстве $L_2[0,1]$ сходится к нулю, т.к.

$$\begin{aligned} \rho_{L_2[0,1]}(x_n, \mathbf{0}) &= \left(\int_0^1 |x_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{1/n} (\sqrt[4]{n})^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Однако ее образ } Ax_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}, \text{ принадлежащий про-}$$

странству $L_2[0,1]$, не сходится к нулю, т.к.

$$\rho_{L_2[0,1]}(Ax_n, \mathbf{0}) = \left(\int_0^1 |Ax_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{1/n} (\sqrt{n})^2 dt \right)^{1/2} = 1.$$

Таким образом, рассмотренная формула задает нелинейный оператор, который на области задания не является непрерывным. ◀

8.2. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Отображение F метрического пространства X в себя называется **сжимающим отображением (сжатием)**, если

$$\exists c < 1 \quad \forall x, y \in X \quad \rho(Fx, Fy) \leq c\rho(x, y).$$

Замечание. Всякое сжимающее отображение удовлетворяет условию Липшица, а значит, непрерывно.

Точка $x \in X$ называется **неподвижной точкой отображения F** , если $Fx = x$.

Теорема 8.6 (Принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном МП X , имеет единственную неподвижную точку.

► Пусть x_0 – произвольная точка пространства X . Положим

$$x_1 = Fx_0, \quad x_2 = Fx_1 = F^2x_0, \quad \dots, \quad x_n = Fx_{n-1} = \dots = F^n x_0.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Пусть для определенности $m > n$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(F^n x_0, F^m x_0) \leq c\rho(F^{n-1} x_0, F^{m-1} x_0) \leq \\ &\leq c^2 \rho(F^{n-2} x_0, F^{m-2} x_0) \leq \dots \leq c^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq c^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\leq c^n \rho(x_0, x_1) (1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n-1}) \leq \\ &\leq c^n \rho(x_0, x_1) (1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n-1} + \dots) \leq c^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Так как $c < 1$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \forall m > n \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{c^n}{1-c} \rho(x_0, x_1) < \varepsilon, \quad (8.3)$$

что доказывает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Пусть $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что сжимающее отображение удовлетворяет условию Липшица, а значит, является непрерывным, получим, что $Fx_n \rightarrow Fx$. Следовательно,

$$Fx = \lim_{n \rightarrow \infty} Fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Существование неподвижной точки доказано. Докажем теперь ее единственность. Пусть $Fx = x$, $Fy = y$ и $x \neq y$. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(Fx, Fy) \leq c\rho(x, y), \quad c < 1.$$

Следовательно, $\rho(x, y) = 0$. ◀

Пример 8.3. Покажем, что отображение

$$F : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], F(x) = \frac{1}{4}x(\sqrt[4]{t}) + t$$

является сжимающим. Вычислим x_3 , если $x_0(t) = 0$. Оценим расстояние от x_3 до неподвижной точки.

► Отображение является сжимающим, так как

$$\begin{aligned} \rho_{L_2[0,1]}(F(x), F(y)) &= \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{4}x(\sqrt[4]{t}) + t - \frac{1}{4}y(\sqrt[4]{t}) - t \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 \cdot 4z^3 dz \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 \cdot \max_{z \in [0,1]} |z^3| dz \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 dz \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \rho_{L_2[0,1]}(x, y), \end{aligned}$$

а значит,

$$\exists c = \frac{1}{2} < 1 \quad \forall x, y \in L_2[0,1] \quad \rho_{L_2[0,1]}(F(x), F(y)) \leq c \cdot \rho_{L_2[0,1]}(x, y).$$

Найдем последовательные приближения x_1, x_2, x_3 :

$$x_1(t) = F(x_0) = t;$$

$$x_2(t) = F(x_1) = \frac{1}{4}x_1(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4}\sqrt[4]{t} + t;$$

$$x_3(t) = F(x_2) = \frac{1}{4}x_2(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\sqrt[4]{\sqrt[4]{t}} + \sqrt[4]{t} \right) + t = \frac{1}{16}t^{1/16} + \frac{1}{4}t^{1/4} + t.$$

Для оценки расстояния до неподвижной точки a воспользуемся формулой (8.3):

$$\rho(x_3, a) < \frac{c^3}{1-c} \rho(x_0, x_1) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} \int_0^1 (t-0)^2 dt = \frac{1}{12}.$$

Если для оценки расстояния до неподвижной точки a в качестве начального значения выбрать $x_2(t)$, то получим более точную оценку:

$$\rho(x_3, a) < \frac{c}{1-c} \rho(x_2, x_3) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \int_0^1 \left(\frac{t^{1/16}}{16} \right)^2 dt = \frac{1}{16^2} \cdot \frac{1}{9/8} = \frac{1}{298}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.4. Докажем, что последовательность цепных дробей

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$$

сходится. Найдем ее предел.

► Воспользуемся принципом сжимающих отображение. Пусть

$$x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} (n \geq 2),$$

тогда

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}}, (n \geq 3), \quad (8.4)$$

а значит, $\forall n \geq 1 \quad x_n \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

Рассмотрим отображение $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ отрезка $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ на себя.

Оно является сжимающим, так как

$$\rho_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{4} \rho_{\mathbb{R}}(x, y),$$

а значит, поэтому имеет единственную неподвижную точку

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}} \right).$$

Решив уравнение $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, получим

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}. \blacktriangleleft$$

8.3. ПРОСТРАНСТВО ОПЕРАТОРОВ $L(X, Y)$

Если рассматривать только ЛП, то, не ограничивая общности, можно считать, что линейный оператор, действующий из X в Y всюду определен в X . Если же X – ЛНП, то наиболее интересным является случай, когда область определения линейного оператора плотна в X . Если при этом линейный оператор ограничен, то его

можно продолжить по непрерывности на все пространство X . А так как изучение неограниченных операторов выходит за рамки этого курса, то в дальнейшем будем считать, что любой линейный оператор, действующий из X в Y определен $\forall x \in X$.

Через $L(X, Y)$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, отображающих X в Y . Причем X и Y либо оба вещественные, либо оба комплексные. Определим на множестве таких операторов операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$(A + B)x = Ax + Bx, (\lambda A)x = \lambda Ax. \quad (8.5)$$

Операторы $A + B$ и λA будут линейными и непрерывными. Можно показать, что в пространстве $L(X, Y)$ с введенными выше операциями сложения и умножения на число выполняются все аксиомы линейного пространства. Полученное линейное пространство будем обозначать $L(X, Y)$.

Теорема 8.7. Норма оператора в пространстве $L(X, Y)$ может быть введена формулой

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

► Покажем, что выполняются все аксиомы нормы:

$$\begin{aligned} 1. \quad \|A + B\|_{L(X, Y)} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(A + B)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax + Bx\|_Y \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} (\|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y) \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y = \|A\|_{L(X, Y)} + \|B\|_{L(X, Y)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \|\lambda A\|_{L(X, Y)} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda A)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\lambda| \cdot \|Ax\|_Y = \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = |\lambda| \cdot \|A\|_{L(X, Y)} < +\infty. \end{aligned}$$

3. Очевидно, что $\|A\|_{L(X, Y)} \geq 0$. Пусть $\|A\|_{L(X, Y)} = 0$, тогда

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = 0;$$

т.е. $\forall x \quad \|x\|_X \leq 1 \Rightarrow \|Ax\|_Y = 0$, а значит, $Ax = \mathbf{0}$.

Пусть теперь $x \in X$ и $\|x\|_X > 1$, тогда для элемента $z = \frac{x}{\|x\|_X} \in X$

выполняется равенство $\|Az\|_Y = 0$ (так как $\|z\|_X = \left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\|x\|_X}{\|x\|_X} = 1$).

Учитывая, что $\|x\|_X > 1$, а значит $\|x\|_X \neq 0$, получим, что

$$\|Az\|_Y = 0 \Rightarrow 0 = Az = A \frac{x}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|_X} \cdot Ax \Rightarrow x = 0. \blacktriangleleft$$

Замечание. В общем случае (если не требовать непрерывности) норма оператора $\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$ может принимать значение бесконечность.

Лемма 8.4. Пусть X, Y – ЛНП. Тогда

$$\forall A \in L(X, Y) \quad \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y \quad (8.6)$$

► При увеличении числового множества его верхняя грань не может уменьшиться, поэтому

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \geq \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \quad (8.7)$$

С другой стороны, для любого элемента $x \in X$ такого, что $0 < \|x\|_X \leq 1$ положим $z = \frac{x}{\|x\|_X}$, тогда

$$\|z\|_X = 1 \quad \text{и} \quad \|Az\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X} \|Ax\|_Y \geq \|Ax\|_Y.$$

Отсюда

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \leq \sup_{\|z\|_X = 1} \|Az\|_Y. \quad (8.8)$$

Из неравенств (8.7) и (8.8) вытекает требуемое равенство. ◀

Следствие 1. Норма оператора $\|A\|_{L(X,Y)}$ (как конечная, так и бесконечная) может быть определена следующим образом:

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, x \in X \quad (8.9)$$

► В силу предыдущей леммы, получим

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y = \sup_{\|z\|_X=1} \|Az\|_Y = \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Az\|_Y = \|A\|_{L(X,Y)} \blacktriangleleft$$

Следствие 2. Так как $\forall x \in X, x \neq 0 \quad \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|A\|_{L(X,Y)}$, то

$$\forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq \|A\|_{L(X,Y)} \|x\|_X \blacktriangleleft \quad (8.10)$$

Существует еще один подход к понятию нормы оператора, связанный с понятием ограниченности операторов.

Теорема 8.8. Если A – линейный ограниченный оператор, то

$$c_0 = \inf \{c \mid \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq c \|x\|_X\} = \|A\|_{L(X,Y)}.$$

► Если A – линейный ограниченный оператор, то все постоянные $c > 0$, обладающие свойством (8.10), ограничены снизу нулем, и поэтому их множество имеет конечную нижнюю грань.

$\forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq c_0 \|x\|_X$, так как если бы нашелся такой элемент $x_0 \in X$, что $\|Ax_0\|_Y > c_0 \|x_0\|_X$, то нашлось бы число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $\|Ax_0\|_Y > (c_0 + \varepsilon) \|x_0\|_X$. Однако это невозможно, так как согласно определению нижней грани,

$\exists c > 0$ такое, что $c < c_0 + \varepsilon$ и

$$\forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq c \|x\|_X.$$

В частности,

$$\|Ax_0\|_Y \leq c \|x_0\|_X < (c_0 + \varepsilon) \|x_0\|_X.$$

Таким образом, нижняя грань c_0 также удовлетворяет неравенству, с помощью которого определяется ограниченность оператора A . Поэтому в определении постоянной c_0 можно заменить нижнюю грань минимумом:

$$c_0 = \min \{c \mid \forall x \in X \ \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X\}.$$

Из неравенства $\|Ax\|_Y \leq c_0\|x\|_X$ при $x \neq 0$, получим $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq c_0$,

следовательно, $\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq c_0$. Причем, случай строгого неравенства

невозможен, так как тогда нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c_0 - \varepsilon$, а значит, для любого $x \in X, x \neq 0$, тем более было

бы справедливо неравенство $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < c_0 - \varepsilon$, или $\|Ax\|_Y < (c_0 - \varepsilon)\|x\|_X$,

что противоречило бы выбору c_0 как минимальной постоянной, обладающей свойством $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$.

Значит, $c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\|_{L(X,Y)}$, что и требовалось доказать. ◀

Следствие 1. Оператор ограничен тогда и только тогда, когда он имеет ограниченную норму.

Следствие 2. Если X, Y – конечномерные ЛНП, то любой линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ ограничен.

► В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны, поэтому любой линейный оператор A , отображающий конечномерное линейное пространство X в конечномерное линейное пространство Y , ограничен при любом выборе норм в этих пространствах. ◀

Теорема 8.9. Если X, Y и Z – ЛНП, а $A: X \rightarrow Y$ и $B: Y \rightarrow Z$ – ограниченные линейные операторы, то для нормы композиции операторов выполняется неравенство $\|B \circ A\| \leq \|B\| \|A\|$.

Следствие. Композиция ограниченных операторов также является ограниченным оператором.

Пример 8.5. Докажем линейность, непрерывность и ограниченность оператора $F: L_2[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $F(x) = \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$.

► *Линейность.*

$$\begin{aligned} F(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 \frac{t^2 (\alpha x(s) + \beta y(s))}{\sqrt[3]{s}} ds = \alpha \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds + \beta \int_0^1 \frac{t^2 y(s)}{\sqrt[3]{s}} ds = \\ &= \alpha F(x) + \beta F(y). \end{aligned}$$

Ограниченность.

$$\begin{aligned} \|F(x)\|_{C[0,1]} &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |t^2| \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds \leq \\ &\leq [\text{неравенство Коши-Буняковского}] \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{s}} \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \|x\|_{L_2[0,1]}. \end{aligned}$$

Непрерывность следует из ограниченности. ◀

Пример 8.6. Докажем, что оператор

$$A: L_3[0,1] \rightarrow L_2[0,1], \quad Ax(t) = tx(t^2)$$

является линейным ограниченным, вычислим его норму.

► *Линейность:*

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y)(t) &= t(\alpha x + \beta y)(t^2) = \\ &= \alpha tx(t^2) + \beta ty(t^2) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t). \end{aligned}$$

Ограниченность:

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |tx(t^2)|^2 dt \right)^{1/2} = [t^2 = \tau] = \\
 &= \left(\int_0^1 |\sqrt{\tau}x(\tau)|^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{\tau} |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \left[\begin{array}{c} \text{неравенство} \\ \text{Гельдера} \end{array} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\int_0^1 (|x(\tau)|^2)^{3/2} d\tau \right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^1 |\sqrt{\tau}|^3 d\tau \right)^{1/3} \right)^{1/2} = \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \tau^{3/2} d\tau \right)^{1/6} \left(\int_0^1 |x(\tau)|^3 d\tau \right)^{1/3} = c \cdot \|x\|_{L_3[0,1]},
 \end{aligned}$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \tau^{3/2} d\tau \right)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/6}.$

Доказывая ограниченность, мы показали, что $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/6}.$

Покажем теперь, что $\|A\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/6}.$

По определению точной верхней грани

$$\forall x(t) \in L_3[0,1] \quad \|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Выберем $x_0(t) = \sqrt{t}$, тогда

$$\begin{aligned}
 \|Ax_0(t)\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |Ax_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{t} |\sqrt{t}|^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 t^{3/2} dt \right)^{1/2}, \\
 \|x_0(t)\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |\sqrt{t}|^3 dt \right)^{1/3} = \left(\int_0^1 t^{3/2} dt \right)^{1/3}.
 \end{aligned}$$

а значит, $\|A\| \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 t^{3/2} dt \right)^{1/2}}{\left(\int_0^1 t^{3/2} dt \right)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 t^{3/2} dt \right)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/6}.$ ◀

Пример 8.7. Вычислим норму оператора

$$A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], \quad Ax(t) = tx(t^2).$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \|Ax\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^2 |x(t^2)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{\tau} |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \sup_{0 \leq \tau \leq 1} (\sqrt{\tau}) |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_{L_2[0,1]}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

С другой стороны, $\forall x(t) \in L_2[0,1] \quad \|A\| \geq \frac{\|Ax\|_{L_2[0,1]}}{\|x\|_{L_2[0,1]}}$.

Рассмотрим последовательность $x_n(t) = \begin{cases} 1, t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right], \\ 0, t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \end{cases}$

Учитывая, что

$$\|x_n\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\begin{aligned} \|Ax_n\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |Ax_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{\tau} d\tau \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{3/2} \right) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} \left(1 - 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{n^2} - O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

получим оценку $\frac{1}{\sqrt{2}} - O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, а значит, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\blacktriangleleft$

Пример 8.8. Покажем, что оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$, определенный на линейном многообразии непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций неограничен.

► Оператор неограничен, если

$$\forall c > 0 \exists x(t) \in C[0,1] \quad \|Ax(t)\|_{C[0,1]} > c \|x(t)\|_{C[0,1]}.$$

Рассмотрим последовательность $x_n(t) = t^n$:

$$x_n(t) \in C[0,1], \quad \|x_n(t)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |t^n| = 1,$$

$$Ax_n(t) = nt^{n-1}, \quad \|Ax_n(t)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |nt^{n-1}| = n.$$

Таким образом, $\forall c > 0 \exists x(t) = t^{[c]+1} \quad \|Ax(t)\|_{C[0,1]} > c \|x(t)\|_{C[0,1]}$. ◀

Пример 8.9. Вычислим норму интегрального оператора

$$A: C[-1,2] \rightarrow C[-2,2], \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 s^3(1+t)x(s)ds.$$

► Ответ: $\|A\| = 3/2$. $\|A\| \leq 3/2$, так как:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{C[-2,2]} &= \max_{t \in [-2,2]} |Ax(t)| = \max_{t \in [-2,2]} \left| \int_{-1}^1 s^3(1+t)x(s)ds \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [-2,2]} |1+t| \cdot \int_{-1}^1 |s^3 x(s)| ds \leq 3 \int_{-1}^1 |s^3| \max_{s \in [-1,2]} |x(s)| ds = \frac{3}{2} \max_{s \in [-1,2]} |x(s)| = \frac{3}{2} \|x\|_{C[-1,2]}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\|A\| \geq 3/2$. Пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1, & 1/n \leq t \leq 2, \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\|_{C[-1,2]} = 1$ и

$$\begin{aligned} \|Ax_u\|_{C[-2,2]} &= \max_{t \in [-2,2]} |Ax_u(t)| = \max_{t \in [-2,2]} \left| (1+t) \left(- \int_{-1}^{-1/n} s^3 ds + \int_{-1/n}^{1/n} s^2 n s ds + \int_{1/n}^1 s^3 ds \right) \right| = \\ &= \max_{-2 \leq t \leq 2} \left| (1+t) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^4} + \frac{2}{n^4} \right) \right| = \frac{3}{2} - O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8.4. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть H – гильбертово пространство. Оператор A^* называется **сопряженным** к оператору $A: H \rightarrow H$, если

$$\forall x, y \in H \quad (Ax, y) = (x, A^*y). \quad (8.11)$$

Теорема 8.10. Оператор A^* , сопряженный к линейному непрерывному оператору A , также является линейным и непрерывным, причем $\|A^*\| = \|A\|$.

Оператор $A: H \rightarrow H$ называется **самосопряженным**, если для A существует сопряженный оператор A^* , совпадающий с A , т.е.

$$\forall x, y \in H \quad (Ax, y) = (x, Ay).$$

Теорема 8.11. Норма линейного непрерывного самосопряженного оператора A может быть вычислена по формуле

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Пример 8.10. Найдём A^* , если:

$$1) \quad A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

2) $B: l_2 \rightarrow l_2$, $Bx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$, где $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1) \quad (Ax, y) &= \int_0^1 Ax(t)y(t)dt = \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau) d\tau \right) y(t)dt = \\ &= \int_0^1 x(t) \left(\int_t^1 y(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^1 x(t) A^* y(t) dt = (x, A^* y). \end{aligned}$$

Следовательно, сопряженный оператор определяется соотношением

$$A^* y(t) = \int_t^1 y(\tau) d\tau.$$

$$2) \quad (Bx, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Bx_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k = y_k \sum_{k=1}^{\infty} x_k \alpha_k y_k = (x, B^* y).$$

Следовательно, $B^* y = (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \dots)$. $\blacktriangleleft$

Замечание. В данном примере оператор B – самосопряженный, а оператор A – нет.

Глава 9. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СХОДИМОСТЬЮ.

Пусть X – некоторое множество и пусть в совокупности всех последовательностей $\{x_n\}$ его элементов, $x_n \in X$, выделен некоторый класс последовательностей, названных сходящимися, и каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие элемент $x \in X$, называемый ее пределом. Если при этом выполняются три условия:

- 1) каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;
- 2) всякая последовательность вида $\{x, x, x, \dots, x, \dots\}$ является сходящейся, и ее пределом является элемент x ;
- 3) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность;

то множество X называется **пространством со сходимостью**.

Условия 1, 2, и 3 называются **аксиомами Фреше**.

Если x является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как обычно, пишется $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Линейное пространство X называется **линейным пространством со сходимостью**, если оно является пространством со сходимостью, относительно которой операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными.

Это означает, что для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X , имеющих своими пределами соответственно $x \in X$ и $y \in X$, и любых чисел λ и μ последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ – числовая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, то

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \right) x = \lambda x.$$

Примером ЛП со сходимостью являются ЛНП, однако, существуют ЛП со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимостью последовательностей.

9.2. ФУНКЦИОНАЛЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Оператор $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (или $f : X \rightarrow \mathbb{C}$), заданный в МП называется **функционалом**. В этой главе будем рассматривать действительные функционалы $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, определенные в ЛНП.

Значение функционала f в точке $x \in X$ принято обозначать (f, x) , т.е. так же как скалярное произведение элементов f и x в ЛП X со скалярным произведением. Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) в пространстве X при фиксированном элементе $y \in X$ является функционалом, определенном на указанном пространстве X .

В линейной алгебре доказывается, что всякому линейному оператору, действующему из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ соответствует и притом единственная матрица с вещественными коэффициентами, в частности, каждому линейному функционалу $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует единственный вектор $a \in X = \mathbb{R}^n$ такой, что $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (a, x) = f(x)$. Поэтому можно утверждать, что в случае конечномерных пространств все функционалы порождаются скалярным произведением.

Аналогичное утверждение верно и для произвольных гильбертовых пространств.

Теорема 9.1 (Рисса). Для всякого линейного ограниченного функционала f действительного гильбертова пространства X $\exists!$ $a \in X$ такой, что $\forall x \in X \quad f(x) = (a, x)$, причем $\|f\| = \|a\|$. Обратное: $\forall a \in X$ отображение $f(x) \stackrel{df}{=} (a, x)$, $x \in X$, является непрерывным ЛФ и $\|f\| = \|a\|$.

Функционалы, определенные на пространстве X являются частным случаем операторов $X \rightarrow Y$, поэтому для них справедливы все понятия, введенные для операторов: линейность, ограниченность, непрерывность, норма.

Например, в принятых для функционалов обозначениях линейность и непрерывность можно записать следующим образом:

– функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ линеен, если

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y);$$

– функционал, определенный на ЛП X со сходимостью, непрерывен если для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in X$, выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n) = (f, x)$, где $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Кроме того, для функционалов выполняются все свойства операторов, в частности:

- непрерывность и ограниченность *линейного функционала* эквивалентны между собой,
- любой линейный функционал f отображает нуль в нуль.

Пример 9.1. Докажем, что функционал

$$f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0), \quad x(t) \in C[-1, 1]$$

является ограниченным и найдем его норму.

► Функционал f является ограниченным, если

$$\exists c > 0 \quad |f(x)| \leq c \cdot \|x\|_{C[-1, 1]}.$$

Оценим норму $|f(x)|$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0) \right| \leq \int_{-1}^1 |x(t)| dt + |x(0)| \leq \\ &\leq 2 \max_{t \in [-1, 1]} |x(t)| + \max_{t \in [-1, 1]} |x(t)| = 3 \|x\|_{C[-1, 1]}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|f\| \leq 3$. С другой стороны, существует последовательность $x_n(t) \in C[-1, 1]$, определяемая формулой:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, -1/n), \\ -2nt - 1, & t \in [-1/n, 0), \\ 2nt - 1, & t \in [0, 1/n), \\ 1, & t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

такая, что $\|x_n(t)\| = 1$ и

$$|f(x_n)| = \left| \int_{-1}^{-1/n} dt + \int_{-1/n}^0 -nt dt + \int_0^{1/n} ntdt + \int_{1/n}^1 dt + 1 \right| = 3 - 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3,$$

Таким образом, $3 - 1/n \leq \|f\| \leq 3$, а значит, $\|f\| = 3$. ◀

Пример 9.2. Используя теорему Рисса, вычислим норму функционала $f(x) = \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}} x(\sqrt{t}) dt$, $x(t) \in L_2[-1,1]$.

► Очевидно, что рассматриваемый функционал линейен. Покажем его ограниченность:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}} x(\sqrt{t}) dt \right| = \left[u = \sqrt{t} \right] = \left| \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{u^{2/3}} x(u) \cdot 2u du \right| \leq \\ &\leq \int_0^{1/\sqrt{2}} |x(u) \cdot 2u^{1/3}| du \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{1/6}} \int_0^{1/\sqrt{2}} |x(u)| du \leq 2 \cdot \int_{-1}^1 |x(u)| du \leq \\ &\leq [\text{неравенство Гельдера}] \leq \\ &\leq 2 \cdot \left(\int_{-1}^1 x^2(u) du \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 1^2 du \right)^{1/2} = 2\sqrt{2} \|x(t)\|_{L_2[-1,1]}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве $\forall x(t) \in L_2[-1,1]$ существует единственная функция $y(t) \in L_2[-1,1]$ такая, что

$$f(x) = (x, y)_{L_2[-1,1]},$$

и при этом $\|f\| = \|y\|_{L_2[-1,1]}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}} x(\sqrt{t}) dt &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{t} = \tau \\ dt = 2\tau d\tau \end{array} \right] = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\tau^{3/2}} x(\tau) 2\tau d\tau = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2\tau^{1/3} x(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^1 y(\tau) x(\tau) d\tau = (x, y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(\tau) = \begin{cases} 2\tau^{1/3}, & \tau \in [0, 1/\sqrt{2}], \\ 0, & \tau \notin [0, 1/\sqrt{2}]. \end{cases}$$

Вычислим теперь норму функционала

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|y\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_{-1}^1 |y(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} = 2 \left(\int_0^{1/\sqrt{2}} \tau^{2/3} d\tau \right)^{1/2} = \\ &= 2 \left[\frac{3}{5} \tau^{5/3} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} \right]^{1/2} = 2 \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} = 2^{3/4} \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 9.3. Используя теорему Рисса, вычислим норму функционала

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2.$$

► Очевидно, что данный функционал является линейным. Покажем его ограниченность

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\|_{l_2}.$$

По теореме Рисса $\exists!$ $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_2$, такой, что

$$\forall x \in l_2 \quad f(x) = (x, y)_{l_2}.$$

Учитывая, что скалярное произведение в l_2 определяется по формуле $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, заключаем, что

$$y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \right).$$

Очевидно, что $y \in l_2$, а значит,

$$\|f\| = \|y\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. ◀

Функционал, принимающий на всех точках пространства значение нуль, называется **нулевым функционалом**.

Теорема 9.2. Если линейный функционал принимает на всех точках пространства одно и то же значение, то это значение равно 0. Иначе говоря, кроме нулевого, не существует никакого другого линейного функционала, принимающего одно и то же значение на всех точках пространства.

► Если $\forall x \in X$ имеет место равенство $f(x) = c$, то, в частности, $c = f(0) = 0$. ◀

Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство. Если f и g – функционалы, то значение функционала $\lambda f + \mu g$ (α и β – числа) определяется в точке $x \in X$ по формуле

$$(\lambda f + \mu g, x) = \lambda(f, x) + \mu(g, x).$$

Понятие сходимости в этом пространстве определяется следующим образом. Последовательность функционалов $\{f_n\}$ называется сходящейся к функционалу f , если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к значению в ней функционала f , т.е. если для любого элемента $x \in X$ числовая последовательность $\{(f_n, x)\}$ сходится к числу (f, x) .

Таким образом, утверждение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ равносильно утверждению

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, x) = (f, x).$$

При таком определении сходимости функционалов операции сложения и умножения на число непрерывны, и, следовательно, линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве со сходимостью, также образуют линейное пространство со сходимостью (сопряженное пространство).

9.3. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

Рассмотрим действие «мгновенной» силы. Пусть в момент времени $t = 0$ на тело массы $m \neq 0$ подействовала сила, сообщившая ему скорость $v \neq 0$, после чего действие силы прекратилось. Обозначим через $F(t)$ силу, действующую на тело в момент t , тогда $F(t) = 0$ при $t \neq 0$. Попробуем найти, чему равна сила $F(t)$ при $t = 0$. По второму закону Ньютона сила равна скорости изменения количества движения относительно времени

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt};$$

следовательно, для любого момента времени τ , $0 < \tau < \infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t) dt = mv. \quad (9.1)$$

В качестве нижнего предела интегрирования взята $-\infty$, но можно, вместо нее взять и любое число $A < 0$, поскольку до момента времени $t = 0$ тело находилось в покое.

С точки зрения классического понятия интеграла, выражение (9.1) лишено смысла (т.к. если интеграл рассматривать как несобственный интеграл Римана или как интеграл Лебега, то он равен 0). Но исходя из физических соображений естественно ожидать, что написанное равенство (9.1) имеет определенный смысл. Это противоречие привело к введению новых математических понятий.

Предположим, для простоты, что количество движения, которое получило тело, равно 1, т.е. $mv = 1$. В этом случае силу $F(t)$, действующую на тело, будем обозначать $\delta(t)$. Тогда выражение (9.1) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt = 1, \quad \tau > 0. \quad (9.2)$$

Функция $\delta(t)$ называется *дельта-функцией*, или *функцией Дирака*.

Предположим, что на тело действует не мгновенная сила, а что в течение времени от $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) до 0 на тело действует некоторая постоянная сила, которую обозначим $\delta_\varepsilon(t)$. Предположим, что эта сила сообщает телу такое же (равное 1) количество движения (т.е. «распределили» силу $\delta(t)$ на интервал времени длины ε). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt = 1, \quad \tau > 0.$$

Так как сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне сегмента $[-\varepsilon, 0]$, а на этом сегменте постоянна, то

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon}^0 \delta_\varepsilon(t) dt = \varepsilon \delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leq t \leq 0.$$

Поэтому

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & t \in [-\varepsilon, 0], \\ 0, & t \notin [-\varepsilon, 0]. \end{cases} \quad (9.3)$$

Естественно считать, что количество движения приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, является пределом количества движения, приданного телу распределенными во времени силами $\delta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Используя известные определения интеграла (собственного или несобственного), получить из формулы (9.4) формулу (9.2) невозможно (даже физически ясно, что только из формулы (9.4) не может следовать, что сила $\delta(t)$ сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения). Равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, и одновременное равенство интеграла от этой функции единице противоречат друг другу в рамках классической математики. Это приводит к необходимости введения нового понятия – определенного «интеграла» (9.2):

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt \stackrel{df}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt, \quad \tau > 0.$$

Теперь, учитывая, что для всех ε функции δ_ε определены так, что $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$, $\tau > 0$, получаем равенство (9.2).

Таким образом, когда говорится, что интеграл (9.2) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от δ_ε -функций при $\varepsilon \rightarrow +0$.

По аналогии с дельта-функцией определяют интеграл от произведения дельта-функции и непрерывной функции $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt \stackrel{df}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt. \quad (9.5)$$

Чтобы доказать, что это определение корректно, надо доказать, что предел (9.5) всегда существует. Покажем, более того, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Для случая $\tau < 0$ равенство (9.6) очевидно, поэтому докажем его для $\tau \geq 0$. Используя (9.3), получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 f(t) dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 |f(t) - f(0)| dt. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ при $x = 0$,

$$\forall \eta > 0 \exists \varepsilon_{\eta} > 0 \forall t \quad |t| < \varepsilon_{\eta} \Rightarrow |f(t) - f(0)| < \eta.$$

Поэтому $\forall \varepsilon < \varepsilon_{\eta}$ из неравенства (9.7) следует, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_{\varepsilon}(t) f(t) dt - f(0) \right| < \frac{\eta}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 dt = \eta.$$

Итак, из определения (9.5) следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Замечание 1. Выражение (9.4) не дает четкого математического определения самой функции $\delta(t)$ как функции точки, так как даже физически ясно, что только из этой формулы не может следовать, что сила $\delta(t)$ сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения. Более того дать определение $\delta(t)$ как функции точки вообще невозможно, так как дельта-функция является понятием другой природы. Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от этих функций. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Итак, новое понятие – понятие интеграла от дельта-функции (и даже более общее понятие интеграла от произведения непрерывной функции на дельта-функцию) – это не обычный интеграл, т.е. не предел интегральных сумм, а предел соответствующих интегралов. Здесь имеется некоторая аналогия с определением несобственного интеграла или интеграла Лебега: исходя из известного определения

интеграла, с помощью дополнительного предельного перехода получаем новое математическое понятие. Причем, дополнительные переходы в этих случаях различны, это приводит к различным понятиям.

Замечание 2. Дельта-функция $\delta(t)$ ставит в соответствие каждой *непрерывной* функции $f(t)$ число $f(0)$, т.е. дельта функцию можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех непрерывных функций. Таким образом, дельта-функция – один из простейших примеров функционалов.

Замечание 3. Свойства дельта-функции определяются свойствами «распределенных» функций δ_ε .

9.4. ОСНОВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Для всякой функции f , определенной на всей числовой оси, замыкание множества точек, в которых $f(x) \neq 0$, называется ее **носителем** и обозначается $\text{supp } f$.

Функция f , определенная на всей числовой оси, называется **финитной**, если ее носитель содержится в некотором конечном отрезке.

Все финитные функции при естественным образом определенных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции – его подпространство.

В пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций сходимость можно ввести следующим образом:

Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi_n, n = 1, 2, \dots$ называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции φ , если:

1) существует отрезок $[a, b]$, вне которого все функции $\varphi_n, n = 1, 2, \dots$ обращаются в нуль;

2) на этом отрезке последовательность функций $\varphi_n, n = 1, 2, \dots$ и последовательности всех их производных $\varphi_n^{(k)}, n = 1, 2, \dots$ равномерно сходятся соответственно к функции φ и к ее производным $\varphi^{(k)}, k = 1, 2, \dots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций D с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Пространство D будем называть **основным**. Из определения сходимости в основном пространстве следует, что если $\varphi \in D$, то и $\varphi^{(k)} \in D, k = 1, 2, \dots$.

Обобщенной функцией называют любой линейный непрерывный функционал f , определенный на D . Значение обобщенной функции f в точке $\varphi = \varphi(x)$ пространства D обозначают символом (f, φ) .

Функция f , определенная на всей действительной оси, называется **локально интегрируемой**, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.

Теорема 9.3. Всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ) .

► Покажем, что f – локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ локально интегрируемо на всей оси:

Из непрерывности функции $\varphi \in D$ следует ее ограниченность:

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall -\infty < x < \infty \quad |\varphi(x)| \leq C. \quad (9.9)$$

Пусть $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$, тогда из (9.9) получаем абсолютную интегрируемость произведения $f\varphi$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)| dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx = \int_a^b |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq C \int_a^b |f(x)| dx$$

Определим для локально интегрируемой функции $f(x)$ функционал (f, φ) равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx.$$

Докажем, что этот функционал линеен и непрерывен (т.е. является обобщенной функцией).

1) *Линейность* следует из линейности несобственных интегралов:

$$\begin{aligned}(f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x))dx = \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)dx.\end{aligned}$$

2) *Непрерывность*. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ в D . Тогда существует такой отрезок $[a, b]$, что

$$\text{supp } \varphi \subset [a, b], \quad \forall n \quad \text{supp } \varphi_n \subset [a, b].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)dx \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\varphi(x) - f(x)\varphi_n(x))dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx = \int_a^b |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)| dx \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Замечание 1. Всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию.

Замечание 2. *Постоянной обобщенной функцией* c (в частности, нулевой) называется обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией $f(x) = c, -\infty < x < +\infty$. Таким образом, для любой основной функции:

$$(c, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi(x)dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Замечание 3. Две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Замечание 4. Иногда для обозначения обобщенной функции используется символ $f(x)$. Но при этом никакое значение обобщенной функции в точке x не подразумевается.

Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов, определенных на ЛП со сходимостью, образует ЛП со сходимостью, сопряженное к D . Оно называется **пространством обобщенных функций** и обозначается D' . Сходимость последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ к обобщенной функции f означает, что $\forall \varphi \in D \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$.

Функционал, определяемый формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$ называется δ -функцией. Функционал, определенный таким образом является непрерывным и линейным, а значит, является обобщенной функцией.

► Для того, чтобы доказать непрерывность оператора достаточно доказать непрерывность в нуле. Пусть $\varphi_n(x) \rightarrow 0(x)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta, \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \varphi_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 0(0) = (\delta, 0). \blacktriangleleft$$

Теорема 9.4. Не существует такой локально интегрируемой функции f такой, чтобы

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D.$$

► Докажем от противного. Пусть существует такая локально интегрируемая функция f , что

$$\forall \varphi \in D \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Положим $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$ тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \quad (9.10)$$

Но, в силу абсолютной интегрируемости функции f ,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a |f(x)| dx = 0.$$

Учитывая, что

$$e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}, \quad -a \leq x \leq a,$$

получим

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx \right| \leq \frac{1}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

поэтому левая часть равенства (9.10) при $a \rightarrow 0$ стремится к нулю, а правая нет. ◀

9.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Производной обобщенной функции f называется функционал на D , обозначаемый f' и определяемый равенством

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'),$$

т.е. значение функционала f' в любой точке φ пространства D равно значению функционала f в точке $\varphi' \in D$, взятому с противоположным знаком. Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную.

Теорема 9.5. Производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции, рассматриваемая как функционал над D , совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

► Пусть f – непрерывно дифференцируемая в обычном смысле на всей числовой оси функция. Тогда f' – непрерывна на всей числовой оси, и, следовательно, локально интегрируема. Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$ получим

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi').$$

Так как $\varphi' \in D$, то производная f' является функционалом на D , значения которого выражаются через значения функции f , рассматриваемой как функционал. ◀

Теорема 9.6. Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.

► *Линейность.*

$$\begin{aligned} \forall \varphi, \psi \in D \quad (f', \lambda\varphi + \mu\psi) &= -\left(f, (\lambda\varphi + \mu\psi)'\right) = \\ &= -\left(f, \lambda\varphi' + \mu\psi'\right) = -\lambda(f, \varphi') - \mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi) + \mu(f', \psi), \end{aligned}$$

Непрерывность. Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в D , тогда по определению сходимости в пространстве D $\varphi_n' \rightarrow \varphi'$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f', \varphi_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n') = -\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi') = (f', \varphi). \blacktriangleleft$$

Пример 9.4. Вычислим производную для функции Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (9.11)$$

$$(\theta', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x) dx = \varphi(0),$$

следовательно, $\theta'(t) = \delta(t)$.

Производные высших порядков.

Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Производные высших порядков обобщенной функции определяются последовательно:

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)', \quad k = 1, 2, \dots, \quad f^{(0)} = f.$$

Откуда по индукции получается формула

$$\left(f^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^{(k)} \left(f, \varphi^{(k)}\right), \quad \varphi \in D, k = 1, 2, \dots$$

9.6. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА [15]

Пусть в $\mathbb{R}^m$ задана ограниченная область G ($\bar{G} \subset \mathbb{R}^m$). Рассмотрим ЛП (для простоты вещественное) функций $u(x)$, $u: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^1$, l раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ (т.е. в G функции $u(x)$ l раз непрерывно дифференцируемы, причем каждая частная производная функции u имеет предел при стремлении x к любой гранич-

ной точке области G , так что в результате ее продолжения на $\bar{G}$ она становится непрерывной в $\bar{G}$). Будем предполагать, что граница Γ области G достаточно гладкая и удовлетворяет тем дополнительным требованиям, которые могут понадобиться в процессе рассуждений.

В этом пространстве норму можно определить следующим образом

$$\|u\| = \left(\int_{\bar{G}} |u(x)|^p dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\bar{G}} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (9.12)$$

Рассмотренное нормированное пространство обозначается $\tilde{W}_p^l(\bar{G})$. Его пополнение в норме (9.12) обозначается $W_p^l(\bar{G})$ и называется **пространством Соболева**. Для случая $p=2$ общепринято следующее обозначение $W_2^l(\bar{G}) = H^l(\bar{G})$.

Пространство $H^l(\bar{G})$ является гильбертовым пространством — пополнением пространства $\tilde{W}_2^l(\bar{G})$ в норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\bar{G}} u(x)v(x)dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\bar{G}} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Пространство $H^1(a, b)$

Рассмотрим на $[a, b]$ пространство $\tilde{H}^1[a, b]$, состоящее из всевозможных функций $u(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx \quad (9.13)$$

и соответствующей этому скалярному произведению нормой

$$\|u\| = \left\{ \int_a^b u^2(x)dx + \int_a^b (u'(x))^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (9.14)$$

Пространство $H^1(a, b)$ является пополнением пространства $\tilde{H}^1[a, b]$ в этой норме.

Выясним, из каких функций состоит пространство $H^1(a, b)$. Элементами $H^1(a, b)$, согласно теореме о пополнении, являются классы, состоящие из последовательностей, фундаментальных в метрике $\tilde{H}^1[a, b]$:

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx + \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Две такие последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{\hat{u}_n(x)\}$ принадлежат одному классу, если $\{\hat{u}_n(x) - u_n(x)\}$ является бесконечно малой в метрике $\tilde{H}^1[a, b]$:

$$\int_a^b |u_n(x) - \hat{u}_n(x)|^2 dx + \int_a^b |u'_n(x) - \hat{u}'_n(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из условия фундаментальности в метрике $\tilde{H}^1[a, b]$ следует, что отдельно при $n, m \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Аналогично, из условия эквивалентности $\{u_n(x)\}$ и $\{\hat{u}_n(x)\}$ в метрике $\tilde{H}^1[a, b]$ следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |u_n(x) - \hat{u}_n(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b |u'_n(x) - \hat{u}'_n(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

Согласно определению пространства Лебега $L_2(a, b)$ существуют функции $u(x) \in L_2(a, b)$ и $w(x) \in L_2(a, b)$ такие, что при $n \rightarrow \infty$ $u_n(x) \rightarrow u(x)$, $u'_n(x) \rightarrow w(x)$ в среднем. Следовательно, если $\{u_n(x)\} \in \tilde{H}^1[a, b]$, то в $L_2(a, b)$ определен элемент $u(x)$ с представителем $\{u_n(x)\}$ и элемент $w(x)$ с представителем $\{u'_n(x)\}$. Элемент $w(x)$ называется **обобщенной производной** (в смысле Соболева) **от** $u(x)$. При этом пишут $w(x) = u'(x)$.

Свойства обобщенной производной

1. Обобщенная производная постоянной равна нулю.

2. Линейность: $(\lambda u_1 + \mu u_2)'(x) = \lambda u'_1(x) + \mu u'_2(x)$.

Из определения обобщенной производной $u'(x)$ видно, что она определяется не локально, в отдельных точках, а глобально – сразу на всем $[a, b]$. Пусть

$$u_n(x), v_n(x) \in \tilde{H}^1[a, b], \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\{u_n(x)\} \in u(x) \in H^1(a, b), \quad \{v_n(x)\} \in v(x) \in H^1(a, b).$$

Тогда согласно теореме о пополнении и определению интеграла Лебега, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенствах

$$(u_n, v_n) = \int_a^b u_n(x) v_n(x) dx + \int_a^b u'_n(x) v'_n(x) dx, \quad (9.15)$$

$$\|u_n\| = \left\{ \int_a^b u_n^2(x) dx + \int_a^b (u'_n(x))^2 dx \right\}^{1/2} \quad (9.16)$$

получим формулы (9.13) и (9.14), где теперь производные понимаются в обобщенном смысле, а интеграл – в смысле Лебега.

Замечание. Для конкретных вычислений можно и нужно пользоваться формулами (9.15), (9.16), взяв достаточно большое n , т.е. вместо идеальных элементов u, v, u', v' пользоваться их гладкими приближениями u_n, v_n, u'_n, v'_n .

Лемма 9.1. Пусть $\overset{0}{C}^1[a, b]$ – множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ финитных функций $\varphi(x)$. Если $u(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то $\forall \varphi(x) \in \overset{0}{C}^1[a, b]$

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx. \quad (9.17)$$

► Интегрируя по частям и учитывая финитность функции $\varphi(x)$ ($\varphi(a) = \varphi(b) = 0$), получим

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = \left[u(x) \varphi(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx. \blacktriangleleft$$

Лемма 9.2. Пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Если $\forall \varphi(x) \in C^1[a, b]$ и некоторой непрерывной на $[a, b]$ функции $w(x)$ выполняется тождество

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b w(x) \varphi(x) dx, \quad (9.18)$$

то $w(x) = u'(x)$ на $[a, b]$.

► Вычитая из (9.18) (9.17), получим

$$0 = \int_a^b [u'(x) - w(x)] \varphi(x) dx \quad \forall \varphi(x) \in C^1[a, b].$$

Отсюда, вследствие плотности $C^1[a, b]$ в $CL[a, b]$, получим, что $w(x) = u'(x)$ на $[a, b]$. ◀

Следствие. Для всех непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, обобщенная производная $u'(x)$ полностью определяется формулой (9.17).

Лемма 9.3. Пусть $u(x) \in H^1(a, b)$, тогда $\forall \varphi(x) \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx.$$

Лемма 9.4. Пусть даны $u(x) \in H^1(a, b)$, $w(x) \in L_2(a, b)$ такие, что

$$\forall \varphi(x) \in C^1[a, b] \quad \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b w(x) \varphi(x) dx,$$

тогда $u'(x) = w(x)$.

► Пусть $\{u_n(x)\} \in u(x)$, а $\{w_n(x)\} \in w(x)$. Тогда $\forall \varphi(x) \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b u_n(x) \varphi'(x) dx - \int_a^b w_n(x) \varphi(x) dx = \int_a^b [u_n'(x) - w_n(x)] \varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $z(x) \in L_2[a, b]$ класс, представителем которого является $\{u'_n(x) - w_n(x)\}$. Тогда

$$\int_a^b z(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi(x) \in C^1[a, b],$$

а значит, $z(x) \equiv 0$. ◀

Теорема 9.7. $\forall u(x) \in H^1(a, b)$ справедлива формула

$$u(x) = \int_a^x u'(s) ds + u(a).$$

Пространство $H^1(G)$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — односвязная область с достаточно гладкой границей. В замкнутой области $\bar{G}$ рассмотрим линейное пространство всевозможных непрерывно дифференцируемых функций $u(x, y, z)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \iiint_{\bar{G}} uv dx dy dz + \iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

При этом

$$\|u\| = \left(\iiint_{\bar{G}} u^2 dx dy dz + \iiint_{\bar{G}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right)^{1/2}. \quad (9.19)$$

Полученное пространство со скалярным произведением обозначается $\tilde{H}^1(\bar{G})$, а его пополнение — это, по определению, соболевское пространство $H^1(G)$.

Пусть $\{u_n(x, y, z)\}$ — фундаментальная последовательность в $\tilde{H}^1(\bar{G})$, т.е. $\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^1(\bar{G})} \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что в $CL_2(\bar{G})$ будут фундаментальны последовательности

$$\{u_n\}, \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\} \text{ и } \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial z} \right\}.$$

Вследствие плотности $CL_2(\bar{G})$ в $L_2(G)$ и полноты $L_2(G)$, в пространстве $L_2(G)$ имеются элементы, которые будем обозначать

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial z},$$

такие, что при $n \rightarrow \infty$ в среднем $u_n \rightarrow u$, $\frac{\partial u_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}$. Элементы $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ называются **обобщенными частными производными** элемента u .

Скалярное произведение и норма задаются в $H^1(G)$ теми же формулами, что и в $\tilde{H}^1(\bar{G})$, в которых теперь производные обобщенные, а интегрирование понимается в смысле Лебега.

Пространство $\overset{0}{H}^1(G)$

Это пространство является пополнением в норме

$$\|u\|^2 = \iiint_{\bar{G}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \quad (9.20)$$

Линейного пространства функций, непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ и таких, что $u|_{\partial G} = 0$. $\overset{0}{H}^1(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v) = \iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Лемма 9.5. Если $u \in \overset{0}{H}^1(G)$, а $v \in \overset{0}{H}^1(G)$, то

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right)_{L_2(G)},$$

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y}, v \right)_{L_2(G)},$$

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial z}, v \right)_{L_2(G)}$$

Теорема 9.8 (Фридрихса). Существует постоянная $c > 0$ такая, что $\forall u \in H^1(G) \quad \|u\|_{L_2(G)} \leq c \|u\|_{H^1(G)}^0$.

Следствие. В $H^1(G)$ нормы

$$\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\bar{G})} = \left(\iiint_{\bar{G}} u^2 dx dy dz + \iiint_{\bar{G}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right)^{1/2}$$

$$\|u\|_2 = \|u\|_{H^1(G)}^0 = \left(\iiint_{\bar{G}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right)^{1/2}$$

эквивалентны.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \|u\|_2 &\leq \|u\|_{L_2(G)} + \|u\|_2 = \|u\|_1, \quad \|u\|_1 = \\ &= \|u\|_{L_2(G)} + \|u\|_2 \leq c \|u\|_2 + \|u\|_2 = (c+1) \|u\|_2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома

- симметрии, 9
- тождества, 9
- треугольника, 9

Аксиомы

- метрики, 9
- нормы, 40
- скалярного произведения, 55
- Фреше, 107

Базис пространства, 5

Бесселя неравенство, 74

Дельта-функция, 113

Замыкание множества, 12

Компакт, 106

Лежандра многочлен, 69

Линейная

- зависимость, 5
- комбинация, 5

Линейная оболочка, 5

Линейное

- многообразие, 45
- множество, 45

Метрика, 9

Многочлен

- Лежандра, 69
- Фурье, 73

Множество

- всюду плотное в пространстве, 15
- замкнутое, 12
- открытое, 12
- плотное во множестве, 15

Неподвижная точка, 95

Неравенство

- Бесселя, 74
- Коши-Буняковского, 55
- треугольника, 9
- — обратное, 9

Норма оператора, 98

Окрестность точки, 11

Оператор

- вполне непрерывный, 106
- всюду заданный, 91
- линейный, 92
- непрерывный
- — в точке, 91
- — на множестве, 91
- норма, 98
- нулевой, 92
- ограниченный, 93
- плотно заданный, 91
- расширение, 91
- самосопряженный, 106
- собственное значение, 106
- сопряженный, 106
- сужение, 91

Ортогональное дополнение, 59

Ортогональный базис гильбертова пространства, 76

Отображение сжимающееся, 95

Парсеваля-Стеклова равенство, 75

Подпространство

- ЛНП, 45
- метрического пространства, 4, 9
- нулевое, 4
- порожденное множеством, 5
- собственное, 4

Подчиненность

- метрик, 22
- норм, 43

Полином

- Лежандра, 69
- Фурье, 73
- Чебышева, 71

Полунорма, 40

Пополнение

- ЛНП, 50
- МП, 33
- предгильбертового пространства, 63

Последовательность

- стационарная, 16
- фундаментальная, 25
- — относительно нормы, 49

Предел последовательности

- в ЛНП, 41, 42
- в МП, 10
- операторов, 91

Примеры

- линейных многообразий, 48
- линейных нормированных пространств, 41
- линейных пространств, 6
- метрических пространств, 16
- ортогональных систем, 68
- пространств со скалярным произведением, 59

Принцип сжимающихся отображений, 95

Проекция, 122

Производная обобщенной функции, 120

Пространства

- изометричные, 22
- изоморфные, 8
- Лебега, 64
- Соболева, 122

Пространство

- m -мерное, 5
- базис, 6
- банаховое, 50
- бесконечномерное, 6
- вещественное, 4
- гильбертово, 62
- евклидово, 55
- комплексное, 4
- конечномерное, 5
- Лебега, 20
- линейное (ЛП), 4
- метрическое (МП), 9
- нормированное (ЛНП), 40
- обобщенных функций, 119
- оснащенное скалярным произведением, 57
- основное, 117
- полное
 - метрическое, 27
 - нормированное, 50
- пополнение, 50, 63
- предгильбертово, 55
- размерность, 5
- сепарабельное, 37
- со скалярным произведением, 55
- со сходимостью, 107
- унитарное, 55

Равенство

- параллелограмма, 56
- Парсеваля-Стеклова, 75

Разложение по базису, 6

Раширение оператора, 91

Ряд Фурье, 73

Свойства

- метрик в ЛП
- инвариантность относительно сдвига, 41
- однородность, 41
- обобщенной производной, 123
- открытых и замкнутых множеств, 12
- последовательностей
 - слабо сходящихся, 62
 - сходящихся в ЛНП, 42
 - сходящихся в МП, 10
 - фундаментальных
 - в ЛНП, 49
 - в МП, 26
- сходящихся рядов, 52

Система

- замкнутая, 75
- ортогональная, 67
- ортонормированная, 67
- полная, 46, 75

Скалярное произведение

- аксиомы, 55
- непрерывность, 58

Сужение оператора, 91

Сфера, 11

Сходимость

- по норме, 42
- по расстоянию, 10
- покоординатная, 17, 18
- сильная, 62
- слабая, 62

Теорема

- о вложенных шарах, 27
- о неподвижной точке, 95
- о пополнении
 - МП, 33, 50
 - предгильбертового пространства, 63
- о проекции, 87
- об эквивалентности норм в конечномерном ЛНП, 43
- Рисса, 108
- Фридрихса, 128

Точка

- внешняя, 11
- внутренняя, 11
- граничная, 11
- изолированная, 11
- предельная, 11
- прикосновения, 11

Условие Липшица, 44, 92

Функционал, 108

— нулевой, 111

Функция

— Дирака, 113

— локально интегрируемая, 117

— непрерывная в точке, 10

— носитель, 116

— обобщенная, 117

— — постоянная, 118

— — производная, 120

— финитная, 116

Фурье

— минимальное свойство, 73

— многочлен, 73

— ряд, 73

Шар, 11

Эквивалентность

— метрик, 22

— норм, 43, 49

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989.
2. Городецкий В.В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу: Учеб. пособие / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К.: Выща шк., 1990.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – Высшая школа., 1982.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Физматлит, 2000.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2007.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1 – М.: «Высш. шк.» 1998.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.3 – М.: «Высш. шк.» 1998.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч.: Часть II Учеб. для вузов. – М.: Наука. Физматлит, 1998.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука. Физматлит, 1999.
10. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие / В.Ф.Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А.Шишкин; под ред. В.Ф.Бутузова – 4-е изд. – М.:Физико-математическая литература, 2001.

1. Обобщенная структура фонда оценочных средств учебной дисциплины

Обобщенная структура фонда оценочных средств по дисциплине Функциональный анализ приведена в Таблице.

Таблица

Формируемые компетенции	Показатели сформированности компетенций (знания, умения, навыки)	Темы	Этапы оценки компетенций	
			Мероприятия текущего контроля (курсовой проект, РГЗ(Р) и др.)	Промежуточная аттестация (экзамен, зачет)
ОПК.1 способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	з2. знать основы функционального и комплексного анализа	Нормированные пространства. Множества в метрических пространствах. Подпространства метрических, линейных и нормированных пространств. Фундаментальность и сходимости в метрических и нормированных пространствах. Связь между сходимостью в различных нормированных пространствах. Полнота метрических и нормированных пространств. Пространства со скалярным произведением. Линейные операторы и функционалы. Обобщенные функции.	Контрольная работа № 1 (задачи 1-8), Контрольная работа № 2 (задачи 1-4)	Зачет (задачи 1-6)
ОПК.1	у1. уметь применять основные методы математического анализа	Нормированные пространства. Фундаментальность и сходимости в метрических и нормированных пространствах. Связь между сходимостью в различных нормированных пространствах. Пространства со скалярным произведением. Линейные операторы и функционалы.	Контрольная работа № 1 (задачи 4-7), Контрольная работа № 2 (задачи 1-3)	Зачет (задачи 1,2,4-6)
ОПК.3 способность к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям	у1. уметь анализировать математические модели	Фундаментальность и сходимости в метрических и нормированных пространствах. Связь между сходимостью в различных нормированных пространствах.	Контрольная работа № 1 (задачи 4-7)	Зачет (задачи 1-2)

2. Методика оценки этапов формирования компетенций в рамках дисциплины.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в 4 семестре - в форме дифференцированного зачета, который направлен на оценку сформированности компетенций ОПК.1, ОПК.3. Подробно процедура зачета описана в паспорте зачета.

Кроме того, сформированность компетенций проверяется при проведении мероприятий текущего контроля, указанных в таблице раздела 1.

В 4 семестре обязательным этапом текущей аттестации являются 2 контрольные работы. Требования к выполнению контрольных работ, состав и правила оценки сформулированы в паспорте контрольных работ.

Общие правила выставления оценки по дисциплине определяются балльно-рейтинговой системой, приведенной в рабочей программе учебной дисциплины.

На основании приведенных далее критериев можно сделать общий вывод о сформированности компетенций ОПК.1, ОПК.3, за которые отвечает дисциплина, на разных уровнях.

Общая характеристика уровней освоения компетенций.

Ниже порогового. Уровень выполнения работ не отвечает большинству основных требований, теоретическое содержание курса освоено частично, пробелы могут носить существенный характер, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы не достаточно, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнены или выполнены с существенными ошибками.

Пороговый. Уровень выполнения работ отвечает большинству основных требований, теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

Базовый. Уровень выполнения работ отвечает всем основным требованиям, теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые из выполненных заданий, возможно, содержат ошибки.

Продвинутый. Уровень выполнения работ отвечает всем требованиям, теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному.

Функциональный анализ

(Сборник задач)

1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Показать, что на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ функция

$$\rho(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

определяет метрику.

2. Построить замкнутые шары $\bar{D}_r(x_0)$ для пространств

$$C^n, E^n, l^n, n = 1, 2, 3 \text{ и } C[a, b].$$

3. Можно ли в пространстве k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определить расстояние формулой $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^k \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|$?

4. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика в пространстве X . Доказать, что функции

$$1) \rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)), \quad 2) \rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad 3) \rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\},$$

также являются метриками.

5. Показать, что на множестве $\mathbb{N}$ функция $\rho(m, n) = \frac{|m - n|}{mn}$ определяет метрику.

6. Доказать следующие утверждения:

$$1) \text{ Если } x, y \in \mathbb{R}^n, \text{ то } \sup_{i=1, n} |(x + y)_i| \leq \sup_{i=1, n} |x_i| + \sup_{i=1, n} |y_i|.$$

$$2) \text{ Если } x, y \in m, \text{ то } \sup_i |(x + y)_i| \leq \sup_i |x_i| + \sup_i |y_i|.$$

$$3) \text{ Если } f(x), g(x) \in M[a, b], \text{ то } \sup_{x \in [a, b]} |(f + g)(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

$$4) \text{ Если } f(x), g(x) \in C[a, b], \text{ то } \min_{x \in [a, b]} |(f + g)(x)| \leq \min_{x \in [a, b]} |f(x)| + \min_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

7. Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|} \right)^2?$$

8. *Построить метрическое пространство (X, ρ) и в нем замкнутые шары $\bar{D}_{r_1}(x_1)$ и $\bar{D}_{r_2}(x_2)$ так, что $\bar{D}_{r_1}(x_1) \subset \bar{D}_{r_2}(x_2)$, а $r_1 > r_2$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Доказать линейность указанного пространства.

1) пространства чисел: а) $\mathbb{Q}$, б) $\mathbb{R}$;

2) пространства n -мерных векторов: а) c^n , б) l^n , в) l_p^n , $p > 1$;

3) пространства последовательностей: а) m , б) c , в) c_0 , г) l_1 , д) l_p , $p > 1$;

4) пространства функций:

а) $M([a, b])$, б) $C[a, b]$, в) $C^k[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, г) $CL[a, b]$, д) $CL_p[a, b]$, $p > 1$.

2. Доказать, что $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, c^n , l_1 , $C[a, b]$ – ЛНП.

3. Пусть X – множество функций с обычными операциями сложения и умножения. Будет ли X линейным пространством, если X – множество всевозможных

1) четных (нечетных) функций,

2) возрастающих (невозрастающих, убывающих, неубывающих) функций,

3) монотонных функций?

4. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – конечное множество вещественных чисел.

1) Будет ли X линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения?

2) Можно ли на множестве X определить норму, расстояние?

5. Какие из следующих утверждений верны?

1) "линейное" $\Rightarrow$ "метрическое", 2) "метрическое" $\Rightarrow$ "линейное";

3) "линейное" $\Rightarrow$ "нормированное", 4) "нормированное" $\Rightarrow$ "линейное";

5) "метрическое" $\Rightarrow$ "нормированное" 6) "нормированное" $\Rightarrow$ "метрическое"?

6. Является ли нормой в $\mathbb{R}^1$ функция $|\operatorname{arctg} x|$?

7. Можно ли в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций за норму элемента принять функции:

а) $\max_{a \leq t \leq b} x(t)$,

б) $\max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$?

8. Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций за норму элемента принять функции

а) $\max_{t \in [a, b]} |x(t)|$, б) $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$, в) $|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$,

г) $|x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$, д) $\int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$.

9. Можно ли в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций за норму элемента принять функции:

а) $\|x(t)\|_{CL_2[a,b]} + \|x''(t)\|_{C[a,b]}$;

б) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''(t)\|_{C[a,b]}$;

в) $|x(a)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$;

г) $|x(a)| + \|x'(t)\|_{C[a,b]} + \|x''(t)\|_{CL_2[a,b]}$;

д) $|x(a)| + |x(b)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$.

10. Можно ли в пространстве трижды непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций за норму элемента принять функцию $|x(a)| + |x(b)| + \|x'''(t)\|_{C[a,b]}$.

11. Доказать, что в пространстве $BV[a, b]$ норму можно определить формулой

$$\|x\| = |x(a)| + V(x(t); [a, b]).$$

12. Доказать, что для всякого ЛНП X функционал $\rho(x, y) = \|x - y\|$ задает метрику в X и обладает свойствами:

1) $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ – инвариантность относительно сдвига;

2) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$ – положительная однородность.

13. Доказать, что если в ЛП X задана метрика, инвариантная относительно сдвига и положительно однородная, то $\rho(x, 0)$ является нормой в пространстве X и порождает исходную метрику.

14. Определить, задает ли пара $(X, \|x\|)$ ЛНП:

1) $X = \{x(t) | x(t) \in C[a, b], x(a) = 0\}$, $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$;

2) $X = \{x(t) | x(t) \in C^1[a, b], x(a) = x(b)\}$, $\|x\| = \int_a^{(a+b)/2} |x(t)| dt + \int_{(a+b)/2}^b |x'(t)| dt$;

3) $X = \{x(t) | x(t) \in C^1[a, b], x'(a) = 0\}$, $\|x\| = \int_a^b |x'(t)| dt + |x(a)|$;

4) $X = \{x(t) | x(t) \in C^1[a, b], x'(t) \leq 0\}$, $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

15. *Доказать, что функция $\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$ не является нормой в $\mathbb{R}^n$.

3. СХОДИМОСТЬ В РАЗЛИЧНЫХ ЛНП

1. Какой характер сходимости в следующих ЛНП:

- 1) конечномерные пространства c^n и E^n ;
- 2) пространства функций $C[a, b]$, $CL_2[a, b]$;
- 3) пространства последовательностей c_0 и l_2 .

2. Доказать эквивалентность норм в следующих ЛНП:

- а) E^n и c^n , б) l^n и c^n , в) l^n и E^n .

3. Доказать, что при $p > 1$, $q \geq 0$:

- а) из сходимости в $C[a, b]$ следует сходимость в $CL_p[a, b]$;
- б) из сходимости в $CL_{p+q}[a, b]$ следует сходимость в $CL_p[a, b]$;
- в) из сходимости в l_p следует сходимость в l_{p+q} .

4. Пусть X – ЛП непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций. Являются ли эквивалентными в пространстве X следующие нормы? Если нет, какая норма какой подчинена?

- а) $\|x\|_{C[a, b]}$ и $\|x\|_{CL_2[a, b]}$, б) $\|x\|_{C[a, b]}$ и $\|x\|_{C^1[a, b]}$.

Указание: рассмотрите на $[0, 1]$ последовательности $x_n(t) = t^n$ и $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$.

5. Доказать, что в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций норма $\|x\|_{CL_2[a, b]}$ эквивалентна норме $\|x\| = \left(\int_a^b v(t) x^2(t) dt \right)^{1/2}$, где $v(t) \geq \alpha > 0$ и $v(t) \in C[a, b]$.

6. *Доказать, что для всякой непрерывно-дифференцируемой функции справедливы неравенства

$$1) \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq |x(a)| + \int_a^b |x'(\tau)| d\tau \leq |x(a)| + (b-a) \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| \quad (1)$$

$$2) |x(a)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |x(t)| dt + \int_a^b |x'(t)| dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |x(t)| dt + (b-a) \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|. \quad (2)$$

Указание. Воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\tau) d\tau. \quad (*)$$

7. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в пространстве непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций.

$$1) \|x\|_1 = \|x\|_{C^1[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]};$$

$$2) \|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a, b]};$$

$$3) \|x\|_1 = \|x\|_{C^1[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a, b]}.$$

8. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в пространстве два раза непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций.

$$1) \|x\|_1 = \|x\|_{C^2[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} + \|x''\|_{C[a, b]};$$

$$2) \|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} + \|x''\|_{C[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]};$$

$$3) \|x\|_1 = \|x\|_{C^2[a, b]} \text{ и } \|x\|_2 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}.$$

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Доказать, что в пространстве X последовательность $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots)$ сходится к $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$:

1) $X = c_0, x_k^n = \sin \frac{n}{kn+1}, x_k = \sin \frac{1}{k};$

4) $X = l_1, x_k^n = ke^{-kn}, x_k = 0;$

2) $X = c_0, x_k^n = n \sin \frac{1}{kn}, x_k = \frac{1}{k};$

5) $X = l_2, x_k^n = \frac{1}{k} \cos \frac{1}{kn}, x_k = \frac{1}{k}.$

3) $X = c_0, x_k^n = \ln \left(1 + \frac{n}{kn+1} \right), x_k = \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right);$

2. Определить к чему в пространстве c_0 сходится последовательность $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots)$, если $x_k^n = \frac{3n}{nk + k^2}$.

3. Исследовать на сходимость в пространствах $M[0,1], C[0,1], CL_2[0,1]$ последовательности:

1) $x_n(t) = 1 - \cos \frac{t}{n};$

2) $x_n(t) = e^{n(t-1)}.$

4. Исследовать на сходимость в пространствах $C[0,1], CL_2[0,1]$ последовательности:

1) $x_n(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \frac{t}{n} \ln \frac{t}{n}, & t \in (0,1]; \end{cases}$

3) $x_n(t) = (1-t)t^n;$

4) $x_n(t) = t^n(1-t^n);$

2) $x_n(t) = \sin \frac{t}{n};$

5) $x_n(t) = \frac{nt+1}{n+t}.$

5. Исследовать на сходимость в пространствах $C[0,1], C^1[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{t^{n+2}}{n+2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}.$

6. Пусть $x_n(t), y(t), x(t) \in C^k[a,b]$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что $x_n(t)y(t) \rightarrow x(t)y(t).$

а) $k = 2, \quad \text{б*) } k \in \mathbb{N}.$

7. Исследовать на сходимость и фундаментальность в пространствах l_1 , l_2 , m следующие последовательности:

$$\mathbf{1)} \ x_n = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots, 0, \dots \right), \quad \mathbf{2)} \ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_n, 0, 0, \dots, 0, \dots \right),$$

$$\mathbf{3)} \ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^2}}_n, 0, 0, \dots, 0, \dots \right), \quad \mathbf{4)} \ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots, 0, \dots \right),$$

$$\mathbf{5)} \ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right), \quad \mathbf{6)} \ x_n = \left(\underbrace{\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{n+1}{n}}_{n^3}, 1, 1, \dots, 1, \dots \right),$$

$$\mathbf{7)} \ x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right),$$

$$\mathbf{9)} \ x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2^n}, \frac{1}{2^n+1}, \frac{1}{2^n+2}, \dots, \frac{1}{2^n+n}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right),$$

$$\mathbf{10)} \ x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2^n}, \underbrace{\frac{1}{2^n+1}, \frac{1}{2^n+2}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

5. МНОЖЕСТВА В ЛНП

1. Доказать, что объединение и симметрическая разность ограниченных множеств есть множества ограниченные.
2. Будет ли множество всех многочленов P в $C[a, b]$:
а) замкнутым, б) открытым?
3. Будет ли замкнутым в $C[a, b]$ множество многочленов P степени:
а) $\leq k$, б) $= k$?
4. Пусть $M = \{x(t) \mid \forall t \in [a, b] \mid x(t) \mid < 5\}$.
1) Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ множество M открытое.
2) Найти ∂M , M' , $\bar{M}$ (Ответ обосновать).
5. Доказать, что параллелепипед $P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_k| < 1, k = \overline{1, n}\}$ – открытое в E^n множество.
6. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ множество:
а) $M = \{x(t) \mid c_1 < x(t) < c_2\}$ открытое;
б) $M = \{x(t) \mid c_1 \leq x(t) \leq c_2\}$ замкнутое.
7. Для каждого множества из предыдущего задания найти ∂M , M' , $\bar{M}$ (Ответы обосновать).
8. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.
- 9.* Доказать, что множество A последовательностей из l_2 , содержащих лишь конечное число членов, отличных от нуля, плотно в l_2 .

Линейные многообразия и подпространства

9. Образуют ли в $C[-1, 1]$
а) линейное многообразие, б) подпространство,
следующие множества непрерывных функций
1) возрастающие функции, 4) многочлены;
2) монотонные функции; 5) многочлены степени $\leq k$;
3) четные функции; 6) многочлены степени k ;
7) дифференцируемые функции;
8) удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;
9) удовлетворяющие условию $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$?
10. Доказать, что: а) c_0 подпространство в c ; б) c подпространство в m .

6. ПОЛНОТА ЛНП

1. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ сходится.

2. Доказать, что если для последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $x_n \in X$ выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$, то она фундаментальна.

3. Пусть в ЛП X заданы две эквивалентные нормы и в одной из них ЛНП X полное. Доказать, что X будет полным и в другой.

4. В ЛП многочленов, рассматриваемых на $[a, b]$, введем две нормы:

$$\|p\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \text{ и } \|p\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |x(t)| dt}.$$

Будет ли какое-либо из полученных ЛНП полным?

Указание: Рассмотреть последовательность $p_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}$.

5. Проверить, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в ЛНП $X = C[0, 1]$:

а) $x_k(t) = \frac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}$, б) $x_k(t) = \frac{t^k}{k} - \frac{t^{k+1}}{k+1}$, в) $x_k(t) = \frac{1}{t^2 + k^2}$, г) $x_k(t) = t^2 e^{-kt}$.

6*. Является ли ЛП непрерывно-дифференцируемых функций банаховым по норме $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt + \max_t |x'(t)|$?

7. ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1. Доказать, что в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций скалярное произведение можно определить как

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)v(x)dx,$$

где $v(x)$ – неотрицательная на $[a, b]$ функция.

2. Доказать, что в пространстве непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций скалярное произведение можно определить как

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f'(x)g'(x)dx.$$

3. Доказать с помощью равенства параллелограмма, что в l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этих пространств.

Указание: рассмотреть элементы: $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $x = (1, -1, 0, 0, \dots)$, $x, y \in l_1$

4. Доказать, что в вещественном евклидовом пространстве справедливы равенства:

$$1) 4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad 2) 2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

5. В линейном пространстве непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t} dt$ сходится, положим $(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt$. В результате ортогонализации линейно независимой системы $1, t, t^2, \dots$ в этом пространстве получается ортогональная система многочленов Чебышева-Лагера. Найти три ее первых многочлена.

6. В линейном пространстве непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$ сходится, положим $(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t^2} dt$. В результате ортогонализации линейно независимой системы $1, t, t^2, \dots$ в этом пространстве получается ортогональная система многочленов Чебышева-Эрмита. Найти три ее первых многочлена.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра прикладной математики

Паспорт зачета

по дисциплине «Функциональный анализ», 4 семестр

1. Методика оценки

Зачет проводится в два этапа. Первый этап проводится в письменной форме, по билетам. Билет содержит 6 задач. Пример билета приведен ниже. На решение билета отводится 1 академический час.

Второй этап проводится в устной форме, путем собеседования по темам, список которых приводится в пункте 4. В ходе собеседования студент должен продемонстрировать знание определений, теорем и их доказательств.

Форма билета для зачета

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет ФПМИ

Билет № 1

к зачету по дисциплине «Функциональный анализ»

1. Найти предельную функцию функциональной последовательности

$$f_n(x) = \sqrt[n]{5^n + x^{2n}} + \frac{4nx^2 + \sqrt{n}}{n}, \quad x \in [0, 2]$$

2. Определить к какому вектору сходится последовательность векторов

$$x_n = \left(\frac{3n + 12n^2}{n + 2n^2}, \frac{\sin n}{n}, n \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right).$$

3. Определить внутренние точки $\text{int } A$ множества $A = \{x(t) \mid 2 \leq x(t) < 3\}$.

4. Определить является ли оператор линейным

а) $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad Ax(t) = 2t \cdot x^5(t),$

б) $A : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1],$

$$Ax(t) = \int_{-1}^1 \sin(t)x(s)ds.$$

5. Вычислить норму функции $f(x) = -x^2$ в пространстве:

а) $C[-1, 2],$ б) $L_2[-1, 2]:$

6. Вычислить скалярное произведение функций

$$f(x) = 3x^2 \text{ и } g(x) = 4x + 5,$$

в пространстве $H^1[0, 1]:$

Утверждаю: зав. кафедрой _____ должность, ФИО
(подпись) (дата)

2. Критерии оценки

Решение каждой задачи первого этапа зачета оценивается по следующей шкале:

- 0 – задача не решена,
- 0.3 – приведенное решение демонстрирует, что студент знает путь решения задачи, но решение содержит грубые ошибки,
- 0.7 – решение содержит небольшие ошибки,
- 1 – задача решена верно.

Далее полученная оценка решения умножается на максимальный балл, указанный в таблице:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6
Максимальный балл	2	2	2	2	4	2

Максимальный суммарный балл за билет равен 14.

Ответ на теоретические вопросы считается **неудовлетворительным**, если студент не знает определений основных понятий курса, оценка составляет 0 баллов.

Ответ на теоретические вопросы засчитывается:

- на **пороговом** уровне, если студент формулирует основные понятия, теоремы, оценка составляет 0-2 баллов,
- на **базовом** уровне, если студент формулирует основные понятия, теоремы, может сформулировать доказываемую теорему, представляет ход доказательства, но при этом допускает принципиальные ошибки, оценка составляет 3-4 баллов,
- на **продвинутом** уровне, если студент при ответе на вопросы демонстрирует глубокое понимание теории, знает и понимает определения, доказывает теорему с незначительными ошибками, исправляемыми с подсказки преподавателя, оценка составляет 5-6 баллов.

3. Шкала оценки

Зачет считается сданным, если в сумме студент набрал не менее 10 баллов из 20 возможных. В общей оценке по дисциплине баллы за зачет учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

В общей оценке по дисциплине баллы за зачет учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

4. Вопросы к зачету по дисциплине «Функциональный анализ»

Линейные пространства (ЛП). Аксиомы и их следствия. Линейно зависимые элементы. Размерность пространства. Базис пространства. *Изоморфизм конечномерных линейных пространств.*

Метрические пространства (МП). Сходимость в метрическом пространстве. *Свойства сходящихся последовательностей.* Множества в МП: предельные и изолированные точки; внутренние, внешние и граничные точки. Замкнутые и открытые множества в МП и их свойства. *Непрерывность метрики.*

Нормированные пространства (ЛНП). Аксиомы нормы и полунормы. *Обратное неравенство треугольника. Непрерывность нормы.* Подчиненность норм. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве. Строго нормированное пространство.

Фундаментальность и сходимость. *Свойства фундаментальных и сходящихся последовательностей.*

Пространства со скалярным произведением (предгильбертовы пространства). Аксиомы скалярного произведения. *Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма.*

Ортогональные системы. *Линейная независимость элементов ортогональной системы. Тригонометрическая система (ортогональность, нормированность).*

Понятие подпространства для различных пространств. Линейные многообразия плотные в ЛНП. Теоремы Вейерштрасса. Теоремы о пополнении. Полные пространства. *Теорема о вложенных шарах.* Пополнение пространств со скалярным произведением, пространства Лебега и Соболева.

Операторы: область определения, область значений, образ, прообраз, равные операторы, сужение и расширение оператора. *Принцип сжимающих отображений.* Линейность, непрерывность и ограниченность операторов (определения и свойства). Норма оператора. Линейные пространства со сходимостью. Функционалы: определение, линейность, непрерывность, ограниченность, сходимости. Обобщенные функции. *Функция Дирака (дельта-функция) (определение, линейность и непрерывность, интеграл от произведения дельта-функции на непрерывную функцию).* Функция Хевисайда. *Дифференцирование обобщенных функций.*

Пространства: метрическое, линейное, нормированное, со скалярным произведением, полное, банахово, гильбертово, Лебега, Соболева, сепарабельное, полное, конечномерное и бесконечномерное.

Пространства: $E^m, l^m, c^m, l_p^m; l_p, m, c, c_0; C[a, b], C^k[a, b], L_p[a, b], L_p(a, b), L_p(G), \tilde{H}^1[a, b], H^1(a, b), H^1(G), \overset{0}{C}^1[a, b], \overset{0}{H}^1(G)$. Из каких элементов состоят эти пространства. Норма и смысл сходимости. Какие из пространств являются полными, банаховыми, гильбертовыми? Связи между пространствами этого списка (подчиненность норм, связь между сходимостями, подпространства, пополнение).

Курсивом выделены те теоремы, которые надо знать с доказательством.

Паспорт контрольной работы

по дисциплине «Функциональный анализ», 4 семестр

1. Методика оценки

В семестре проводится 2 контрольные работы. Первая по теме «Линейные нормированные пространства», вторая по теме «Операторы и функционалы».

Обе контрольные работы содержат по 8 задач из списка задач, приведенного в ЭУМК (<http://dispace.edu.nstu.ru/didesk/course/show/5282>) в разделе «Контрольно-измерительные материалы» в соответствующих подразделах «контрольная работа №1» и «контрольная работа №2».

Обе контрольные работы выполняются письменно в течение 2 академических часов.

2. Критерии оценки

Решение каждой задачи оценивается по следующей шкале:

- 0 – задача не решена
- 0.3 – приведенное решение демонстрирует, что студент знает путь решения задачи, но решение содержит грубые ошибки
- 0.7 – решение содержит небольшие ошибки
- 1 – задача решена верно.

У каждой задачи в контрольной работе указан максимальный балл за эту задачу. Полученная оценка решения умножается на этот максимальный балл, таким образом получается оценка за задачу.

В контрольной работе №1 сумма максимальных баллов равна 25, в контрольной работе №2 – 15.

Каждая контрольная работа оценивается в соответствии с приведенными ниже критериями.

Контрольная работа считается **невыполненной**, если суммарно набрано менее 40% от максимума.

Работа выполнена на **пороговом** уровне, если набрано от 40 до 60% баллов.

Работа выполнена на **базовом** уровне, если набрано от 61 до 85% баллов.

Работа считается выполненной на **продвинутом** уровне, если набрано более 86% баллов.

3. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за каждую контрольную работу учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

4. Пример варианта контрольной работы

Контрольная работа № 1.

1. (3б) Определите (без доказательств) множества $\partial A, A', \text{int } A, \bar{A}$, если

$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. (2б) Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций за норму элемента принять функцию $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$?

3. (3б) Пусть X – ЛНП, $x_n, x \in X$, $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

4. (2б) Пусть X – пространство дважды непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций. Следует ли в пространстве X из сходимости последовательности по норме $\|x\|_1$ сходимость этой последовательности и по норме $\|x\|_2$? (Ответ обосновать)

$$\|x\|_1 = \|x\|_{C^2[a, b]}, \quad \|x\|_2 = \left| x\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}.$$

5. (3б) Доказать, что последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots, 0, \dots\right)$ не является фундаментальной в пространстве l_1 .

6. (3б) Исследовать последовательность $x_n(t) = t^{3n} - t^n$ на сходимость в пространствах $C[0, 1]$ и $CL_2[0, 1]$.

7. (4б) Исследовать последовательность $x_n = \left(\underbrace{n^{-2/3}, \dots, n^{-2/3}}_n, 0, \dots, 0, \dots\right)$ на сходимость и фундаментальность в пространствах l_2 и c_0 .

8. (5б) Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x$, $h(x) = 3 - 5x$. Найти:

$$\rho_{C[0, 3]}(f, g), \|h\|_{C[0, 1]}, \|h\|_{L_1[0, 1]}, \rho_{L_1[0, 1]}(g, h), (g, h)_{L_2[0, 1]}.$$

Контрольная работа № 2.

1. (4б) Доказать, что следующие линейные операторы являются непрерывными. Найти их нормы.

а) $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = (t^8 - t^4)x(t^3);$

б) $A: C[-1, 2] \rightarrow C[-3, 5], Ax(t) = \int_{-1}^1 (t-2)s^3 x(s) ds$

2. (5б) Выяснить, является ли функционал линейным и ограниченным (ответ обосновать)? В случае положительного ответа, найти его норму.

а) $X = C[0, 10], f(x) = 2x(10) - \int_0^8 t^3 x(t) dt;$

б) $X = C[-1, 1], f(x) = \int_0^1 t x^2(t) dt;$

в) $X = C[-1, 3], f(x) = \int_{-1}^3 t x(t) dt - 3x(0) - \frac{1}{2}x(3).$

3. (4б) Используя теорему Рисса, найти норму линейного ограниченного функционала

а) $X = L_2[-1, 1], f(x) = \int_{-1}^0 t^5 x(t^2) dt + \int_{1/2}^1 t^2 x(t) dt;$

б) $X = l_2, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{5k}}{2^k} - \sum_{k=2}^5 x_k - x_{10}.$

4. (3б) Найти обобщенную производную $(y', \varphi(x))$, если $y(x) = \delta(x+5) + x_+^2 + \sqrt[3]{x}.$