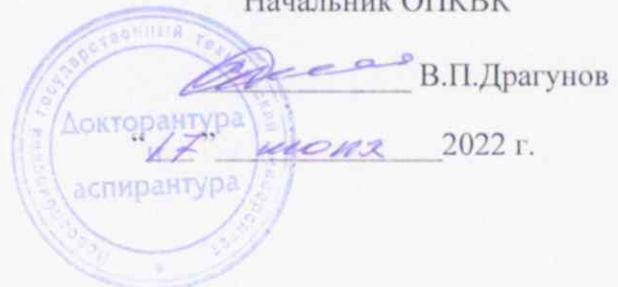


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

«УТВЕРЖДАЮ»

Начальник ОПКВК



ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

1. Естественные науки

1.1. Математика и механика

Новосибирск

2022

Программа обсуждена на заседании ученого совета факультета ФПМИ
протокол № 6 от 16 июня 2022 г.

Программу разработал

профессор кафедры алгебры и математической логики,

д-р физ.-мат.наук, доцент

 (С.В. Судоплатов)

Декан ФПМИ,

д-р техн. наук, профессор

 (В.С. Тимофеев)

Ответственный за программу

д-р физ.-мат.наук, доцент

 (С.В. Судоплатов)

Основная программа

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математическая логика; алгебра; теория чисел и дискретная математика.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к пренексной нормальной форме.
8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике.
13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$, и SO_3 .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.

9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.
2. Первообразные корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
5. Характеры и L -функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
11. Трансцендентность чисел e и π .

Дискретная математика

1. Многозначные логики. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций алгебры логики. Алгоритм распознавания полноты систем функций k -значной логики. Теоремы Слупецкого и Яблонского. Особенности k -значных логик.
2. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах. Эксперименты с автоматами. Алгоритмическая неразрешимость 4 проблемы полноты для автоматов.
3. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.
4. Элементы комбинаторного анализа. Основные комбинаторные числа. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
5. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности). Экстремальная теория графов. Теорема Турана. Теорема Рамсея.
6. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана. Полные коды. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
7. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку. Конечные поля и их основные свойства. Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема. Коды Рида-Маллера.
8. Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов.

нальных элементов, автоматы, машины Тьюринга, операторные алгоритмы. Основные проблемы теории управляющих систем.

9. Дизъюнктивные нормальные формы. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме. Тупиковые и минимальные ДНФ. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ СУММА ТУПИКОВЫХ с помощью локального алгоритма. Невозможность построения ДНФ СУММА МИНИМАЛЬНЫХ в классе локальных алгоритмов.

10. Синтез и сложность управляющих систем. Асимптотически оптимальный метод Лупанова синтеза схем из функциональных элементов. Асимптотически оптимальный метод Лупанова построения формул. Инвариантные классы Яблонского и их свойства. Синтез схем для функций из инвариантных классов.

11. Нижние оценки сложности реализации булевых функций схемами и формулами.

12. Эквивалентные преобразования управляющих систем. Эквивалентные преобразования формул алгебры логики. Теорема Линдана. Пример Линдана.

13. Надежность и контроль функционирования управляющих систем. Логический подход к контролю исправности и диагностике неисправностей управляющих систем. Тесты.

14. Потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока. Теорема о целочисленности. Теорема Кенига- 5 Эгервари. Теорема Холла. Теорема Дилюорса.

15. Задачи целочисленного линейного программирования и алгоритмы их решения. Метод Гомори. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера. Сводимость комбинаторных проблем. Классы сложности Р и NP. Приближенные методы решения NP-трудных задач.

Литература

1. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М.Гэри, Д.Джонсон. - М.: Мир, 1982.
2. Ершов Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л.Ершов, Е.Л.Палютин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И.Мальцев. - М.: Наука, 1987.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э.Мендельсон. - М.: Наука, 1984.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики / П.С.Новиков - Изд. 2. М.: Наука, 1973.
6. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю.Л.Ершов - Наука, 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л.Ван дер Варден. - М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры / А.И.Кострикин. - М.: Физматлит, 2000.
9. Винберг Э.Б. Курс алгебры / Э.Б.Винберг. - М., "Факториал Пресс", 1001.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры / Л.А.Скорняков. - М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И.Мальцев. - М.: Наука, 1970
12. Лэнг С. Алгебра / С.Лэнг. - М., Мир, 1968.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли / Н.Джекобсон. - М., Мир, 1964.
14. Боревич З.И. Теория чисел / З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич. - М., Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М.Виноградов. - М., Наука, 1981.
16. Галочкин А.И. Введение в теорию чисел / А.И.Галочкин, Ю.В.Нестеренко, А.Б.Шидловский. - М., МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А.Карацуба. - М., Наука, 1983.
18. Кейперс Л. Равномерное распределение последовательностей / Л.Кейперс, Г.Нидеррейтер. - М., Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения / Н.М.Коробков. - М., Наука, 1989.
20. Серр Ж.П. Курс арифметики / Ж.П.Серр. - М., Мир, 1972.

21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / К.Чандрасекхаран. - М., Мир, 1974.

Дополнительная программа

1. Системы. Гомоморфизмы и подсистемы. Параметры и диаграммы. Канонические модели.
2. Определимые множества. Определимые классы систем. Формулы, сохраняющиеся при отображениях. Классификация отображений по формулам. Трансляции. Элиминация кванторов.
3. Игры для элементарной эквивалентности (членочный метод). Замкнутые игры. Игры и бесконечные логики.
4. Автоморфизмы. Подгруппы малого индекса. Воображаемые элементы. Элиминация воображаемых элементов.
5. Минимальные множества. Геометрии.
6. Почти сильно минимальные теории. Конфигурация Зильбера
7. Релятивизация. Псевдо-элементарные классы. Интерпретируемость систем. Образцы и размеры интерпретаций. Теории, интерпретирующие все системы.
8. Тотально трансцендентные системы. Интерпретация групп и полей. Компактность в логике предикатов.
9. Булевы алгебры и стоуновские пространства. Типы.
10. Амальгамирование. Обогащения. Стабильность.
11. Конструкция Фрайсе. Опускание типов. Счетная категоричность.
12. Экзистенциально замкнутые системы. Модельная полнота.
13. Прямые произведения. Фильтрованные произведения. Ультрапроизведения. Теорема Фефермана – Воота.
14. Булевы произведения. Насыщенные модели, их существование, синтаксические характеристики.
15. Специальные модели. Определимость. Блестящие системы. Атомная компактность.
16. Неразличимые последовательности. Модели Эренфойхта – Мостовского. Нестандартные методы.
17. Полная упорядоченность.
18. Теоремы об одно- и двухкардиальности.
19. Категоричность. Когомологии обогащений. Относительная категоричность.
20. Число счетных моделей теории, теорема Морли.

Основной список

1. Hodges W. Model theory / W. Hodges. - Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
2. Ершов Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л.Ершов, Е.Л.Палютин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
3. Судоплатов С.В. Дискретная математика / С.В.Судоплатов, Е.В.Овчинникова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010.
4. Судоплатов С.В. Математическая логика и теория алгоритмов / С.В.Судоплатов, Е.В.Овчинникова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010.
5. Пуаза Б. Курс теории моделей / Б.Пуаза. – Алматы: Изд-во Казахского национального университета им. Аль-Фараби, 2001.
6. Marker D. Model Theory: An Introduction / D.Marker. - New York; Berlin; Heidelberg; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002.

Дополнительный список

1. Кейслер Г. Теория моделей / Г.Кейслер, Ч.Ч.Чэн. - М.: Мир, 1977.
2. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей / Дж.Сакс. - М.: Мир, 1976.
3. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж.Барвайса. - М.: Наука, 1982. - Ч. 1. Теория моделей.
4. Baldwin J.T. Fundamentals of stability theory (Perspectives in Mathematical logic) / J.T.Baldwin. - Berlin: Springer-Verlag, 1988.
5. Buechler S. Essential Stability Theory / S.Buechler. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hong Kong; London; Milan; Paris; Santa Clara; Singapore; Tokyo: Springer, 1996.
6. Fraïssé R. Theory of relations / R.Fraïssé. - Amsterdam: North-Holland, 1986.
7. Pillay A. An introduction to stability theory / A.Pillay. - Oxford: Oxford University Press, 1983.
8. Pillay A. Geometric Stability Theory / A.~Pillay. – Oxford: Clarendon Press, 1996.
9. Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models / S.Shelah. - Amsterdam: North-Holland, 1990.
10. Wagner F.O. Simple theories / F.O.Wagner. - Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Экзаменующемуся предлагаются 2 вопроса. За один раскрытый вопрос выставляется оценка «удовлетворительно», за два раскрытых вопроса с замечаниями – «хорошо», за два полностью раскрытых вопроса – «отлично». В противном случае ставится оценка «недовлетворительно».