

Новокузнецкий институт (филиал)  
федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
“Кемеровский государственный университет”

На правах рукописи



Штейнбрехер Ольга Александровна

**Разработка метода, алгоритма и программного обеспечения для  
оптимизации анизогридных конструкций из композиционных  
материалов**

05.13.18–Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
д.т.н., доцент Бурнышева Т.В.

Новокузнецк - 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ .....	14
1.1 Роль оптимизационного расчета в проектировании силовых конструкций. Связь с другими этапами проектирования .....	14
1.2 Критерии оптимизации и ограничения при проектировании силовых конструкций аэрокосмического назначения .....	18
1.3 Особенности оптимизации по массе сетчатых конструкций из композиционных материалов .....	27
1.4 Цель и задачи диссертационной работы.....	31
2 ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ПРОЧНОСТИ, ЖЕСТКОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ .....	34
2.1 Структура расчетных моделей анизотридных конструкций для определения запасов по прочности, жесткости и устойчивости .....	34
2.2 Постановка задачи оптимального проектирования анизотридных конструкций.....	46
2.3 Геометрическая структура области факторного пространства, определяемой ограничениями по прочности, жесткости и устойчивости...	50
2.4 Выводы по главе.....	55
3 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	56
3.1 Применение R-предикатов для отыскания условного экстремума целевой функции на границе .....	56
3.2 Модель упругого симплекса .....	63
3.3 Тестирование алгоритма оптимизации на контрольных примерах.....	70
3.4 Выводы по главе.....	81
4 КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	83
4.1 Модернизация комплекса «Композит НК» для оптимизации анизотридных конструкций .....	83

4.2 Классы генерации моделей, вычисления откликов и симплексного поиска .....	93
4.3 Выводы по главе.....	99
<b>5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ</b> .....	<b>100</b>
5.1 Оптимизация сетчатых конструкций регулярной структуры .....	100
5.1.1 Оптимизация цилиндрической сетчатой оболочки регулярной структуры без обшивки .....	100
5.1.2 Оптимизация конической сетчатой оболочки регулярной структуры без обшивки .....	106
5.2 Оптимизация сетчатых конструкций нерегулярной структуры с обшивкой.....	120
5.3 Выводы по главе.....	127
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>128</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>129</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А</b> .....	<b>144</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б</b> .....	<b>146</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В</b> .....	<b>148</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования.**

В современных конструкциях аэрокосмического назначения широко используются анизогридные сетчатые оболочки, структура которых образуется пересечением семейств спиральных и кольцевых ребер. Уникальность каждой конструкции определяется наличием вырезов и подкрепляющих элементов. Данный класс конструкций относят к силовому типу, поэтому на стадии проектирования часто решается задача синтеза (оптимального проектирования). Суть задачи заключается в выборе такой структуры или таких параметров создаваемого изделия, которые обращают в максимум или минимум одну из его характеристик и удовлетворяют всем ограничениям по прочности, жесткости, устойчивости. В качестве целевых функций при оптимизации силовых конструкций аэрокосмического назначения наиболее часто используются такие как вес, меры жесткостных свойств, а также отношения, определяющие критические значения параметров нагружения, приводящих к потере устойчивости, для тонкостенных конструкций.

Задача оптимизации по массе многоэлементной статически неопределимой конструкции, к которым относятся анизогридные конструкции из композиционных материалов, является однокритериальной. Целевая функция (масса конструкции) зависит от варьируемых проектных параметров непрерывно вместе со своими производными. При использовании прямого метода минимизации число варьируемых параметров приходится ограничивать из соображений компьютерной эффективности, но вполне реалистично наличие нескольких десятков варьируемых параметров.

Ограничения по прочности, жесткости и устойчивости анизогридных конструкций выражаются через параметры напряженно-деформированного состояния при расчетных нагрузках, которые, в свою очередь, зависят от варьируемых проектных параметров конструкции. Поскольку параметры напряженно-деформированного состояния зависят от положения точки

(являются полями перемещений, напряжений и деформаций), ограничения по прочности и жесткости должны формулироваться для достаточно большого числа характерных точек конструкции. Применительно к анизотридным конструкциям, таких точек может быть несколько тысяч. Таким образом, в формулировку задачи может входить большое число ограничений, на несколько порядков превышающее число варьируемых параметров.

В настоящее время достаточно проработаны и известны методы оптимального проектирования сетчатых анизотридных конструкций регулярной реберной структуры при условии отсутствия обшивки. Решение задачи оптимального проектирования силовой анизотридной сетчатой конструкции нерегулярной структуры является актуальной и требует разработки метода и алгоритма решения задачи оптимизации, учитывающего все ограничения при определении области допустимых решений.

#### **Степень разработанности темы исследования.**

Основной вклад в разработку сетчатых анизотридных конструкций из композиционных материалов внесла школа В.В. Васильева.

Известны аналитические оценки напряжений регулярной реберной структуры сетчатой оболочки, полученные В.В. Васильевым и В.А. Бунаковым при использовании вариационного принципа и безмоментной теории с учетом замены реберной структуры условно сплошным слоем с осредненной жесткостью. Дискретный подход к моделированию сетчатых анизотридных конструкций для оценки напряженно-деформированного состояния использовали В.В. Васильев, А.Ф. Разин, А.А. Бабичев, В.П. Булдаков, М.В. Никитин и др. Исследования сетчатого адаптера (без обшивки) на устойчивость с использованием дискретного моделирования проводили Морозов Е.В., Лопатин А.В., Нестеров В.А.

Разиным А.Ф. получены аналитические оценки на проектные параметры сетчатых оболочек из композиционных материалов регулярной структуры без обшивки. Решались задачи оптимального проектирования сетчатых цилиндрических и конических оболочек при условии минимума

массы конструкции. В качестве ограничений выступали условия по прочности, общей, местной и осесимметричной формам потери устойчивости, а также ограничения, специфические для композитных сетчатых конструкций, изготавливаемых методом непрерывной намотки.

Морозовым Е.В., Лопатиным А.В. и Нестеровым В.А. были получены зависимости массы сетчатой цилиндрической реберной структуры от угла наклона спирального ребра к образующей и длины отсека. Сетчатая оболочка имела регулярную реберную структуру, моделирование которой проводилось дискретно.

В.П. Полиновский использовал численный метод при выборе оптимальных параметров композитного сетчатого отсека агрегата космического летательного аппарата по критерию минимума массы. Методика выбора оптимальных параметров анизогридных конструкций содержала несколько этапов – построение дискретных моделей с различными значениями углов наклона спиральных ребер, подбор высоты кольцевых и спиральных ребер и ширины спирального ребра при критерии минимума массы с учетом ограничений по прочности и устойчивости. Данный метод не гарантирует отыскание оптимума, поскольку не учитывает взаимное влияние размеров сечения и углов наклона спирального ребра.

Таким образом, в настоящее время достаточно разработаны аналитические методы решения задачи оптимального проектирования анизогридных конструкций регулярной структуры без обшивки при критерии минимума массы.

Определение оптимальных параметров анизогридной конструкции с обшивкой и нарушением регулярности реберной структуры рассматривалась для конкретных изделий с определенными условиями нагружения. Известные методы и алгоритмы решения задачи минимизации не позволяют в полной мере учесть особенности, возникающие в связи со сложной структурой анизогридных конструкций, состоящих из множества элементов и определяющих большое число ограничений и неизвестных. Это делает

актуальной разработку метода и алгоритма решения задач оптимального проектирования сетчатых анизотридных конструкций нерегулярной структуры из условия минимума массы с учетом ограничения структурных параметров и параметров состояния.

**Цель работы** заключается в разработке метода, алгоритма и реализующего их программного обеспечения для решения задачи минимизации массы сетчатых анизотридных конструкций с большим числом структурных параметров и переменных состояния.

**Идея работы** состоит в разработке и реализации эффективного алгоритма минимизации целевой функции (массы сетчатой анизотридной конструкции) с учетом большого числа ограничений (габаритные параметры конструкции, геометрические размеры структурных параметров конструкции, ограничения по прочности и устойчивости).

Для достижения этой цели в работе поставлены следующие **задачи**:

1. Разработка математической модели объекта оптимизации посредством представления множества ограничений в виде аппроксимации кусочно-гладкой границы аппаратом R-функций.

2. Разработка численного метода решения задачи оптимизации, основанного на гладкой аппроксимации границы области возможных решений, в котором последовательность приближений строится по модели упругого симплекса.

3. Разработка и программная реализация алгоритма численного метода минимизации массы анизотридных конструкций с учетом большого числа ограничений структурных параметров и параметров состояния по методу упругого симплекса.

4. Тестирование разработанного численного метода задачи минимизации при учете нескольких ограничений на задачах, имеющих точное аналитическое решение.

5. Апробация разработанных численного метода и алгоритма оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций из

условия минимума массы на сетчатых оболочках регулярной и нерегулярной структуры с учетом ограничений на большое число переменных состояния.

### **Научная новизна работы.**

1. Разработана математическая модель объекта оптимизации посредством представления множества ограничений в виде аппроксимации кусочно-гладкой границы аппаратом R-функций.

2. Разработан численный метод расчета минимума целевой функции на основе симплексного поиска, в котором множество кусочно-гладких границ области допустимых решений заменяется единым выпуклым R-предикатом, а симплекс считается связанным с ближайшими границами посредством упругих связей, реакции которых влияют на направление поиска.

3. Разработан новый алгоритм решения задачи оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций по массе с ограничениями на структурные параметры и переменные состояния.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическая значимость работы заключается:

- в разработанном методе и алгоритме минимизации нелинейной целевой функции с учетом большого числа ограничений по модели упругого симплекса;

- в разработанном программном обеспечении, реализующем алгоритм минимизации нелинейной целевой функции с учетом большого числа ограничений по модели упругого симплекса;

- в возможности применять разработанные метод, алгоритм и программное обеспечение для оптимизации проектных параметров силовых анизотридных композиционных конструкций нерегулярной структуры по массе с учетом множества ограничений.

Результаты работы внедрены:

- в ОАО «ЦНИИСМ» - разработанные метод, алгоритм и созданное программное обеспечение для оптимального проектирования силовых

анизотридных композиционных конструкций нерегулярной структуры с повышенным весовым совершенством;

- в учебном процессе НФИ КемГУ – в качестве разделов учебных курсов бакалавров и магистров направления «Прикладная математика и информатика».

### **Методология и методы исследования.**

Методология и методы исследования основаны на использовании: метода симплексного поиска, теории R-функций, метода конечных элементов для решения краевых задач статики и устойчивости, методов вычислительного эксперимента.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Математическая модель объекта оптимизации, в которой число ограничений уменьшается заменой нескольких участков кусочно-гладкой границы одним гладким участком с использованием аппарата R-функций.

2. Численный метод решения задачи оптимизации, в котором приближения строятся по модели упругого симплекса.

3. Алгоритм оптимизации проектных параметров анизотридных конструкций по массе с множеством ограничений методом упругого симплекса.

4. Программный комплекс, реализующий алгоритм оптимизации проектных параметров анизотридных конструкций по массе с ограничениями по модели упругого симплекса.

5. Применимость разработанного метода, алгоритма и программного модуля для оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций по массе с ограничениями по прочности, жесткости и устойчивости.

### **Достоверность результатов.**

Достоверность результатов обеспечивается корректным применением апробированных теоретических положений, использованием проверенных численных математических методов и алгоритмов, и подтверждается

согласием результатов расчета по методу и алгоритму, предложенным в диссертационной работе, с результатами расчетов других исследователей.

**Апробация результатов.** Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы были опубликованы, докладывались и обсуждались на научно-практических конференциях и семинарах: III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», 2014 (г. Новосибирск); IV Всероссийская научно-практическая конференция «Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах», 2016 (г. Новокузнецк); IX всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», 2016 (г. Томск); XIII Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование», 2016 (г. Новокузнецк); XX Юбилейная международная научно-практическая конференция, посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева «Решетневские чтения», 2016 (г. Красноярск); VI Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2016», 2016 (г. Томск); XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства, 2017 (г. Москва); III Международная конференция и молодежная школа "Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2017)", 2017 (г. Самара).

### **Личный вклад автора.**

Личный вклад автора заключается в формулировке цели и идеи диссертационного исследования, определении его программы, в постановке задачи оптимизации анизотридной конструкции по массе с множеством ограничений, в разработке математической модели задания границ области допустимых решений поставленной задачи в виде обобщенного R-предиката,

в разработке алгоритма минимизации нелинейной целевой функции с учетом большого числа ограничений по модели упругого симплекса.

При непосредственном участии автора разработано программное обеспечение для дискретного моделирования сетчатых анизотридных конструкций и решения задач статики и устойчивости.

Отдельные расчеты проведены совместно с соавторами по публикациям, приведенным в автореферате.

Доля личного участия автора составляет: в постановке задач исследования, в выборе методов их решения – 100%, в разработке математической модели задания границ области допустимых решений задачи оптимизации – 80%, в разработке алгоритма минимизации нелинейной целевой функции с учетом большого числа ограничений по модели упругого симплекса – 80%, в постановке задачи оптимизации анизотридной конструкции по массе с множеством ограничений – 100%, в проведении численных экспериментов – 80%, в анализе и обобщении полученных результатов – 100%, в формулировке выводов и положений, выносимых на защиту – 100%, в разработке программного обеспечения, реализующего алгоритм минимизации нелинейной целевой функции с учетом большого числа ограничений по модели упругого симплекса – 100%, в разработке и реализации программного обеспечения расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости анизотридных конструкций – 15%, во внедрении результатов – 25%. Соавторы не возражают против использования совместных результатов в диссертации.

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в 20 печатных работах, из них 5 – в рецензируемых периодических изданиях из перечня ВАК.

#### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка используемой литературы из 127 наименований и 3 приложений. Общий объем основной части составляет 151 страница и включает 49 рисунков и 9 таблиц.

## **Краткое содержание работы**

**Первая глава** диссертационной работы посвящена описанию особенностей оптимизации по массе сетчатых конструкций из композиционных материалов. Приведены типовые характеристики (неизвестные), критерии оптимизации и ограничения при проектировании сетчатых конструкций аэрокосмического назначения. Представлено описание разработанных методов оптимизации сетчатых конструкций, в том числе реализованных в известных САД-системах.

**Вторая глава** посвящена математической модели задания границы области допустимых решений задачи оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций из условия минимума массы на основе задания множества ограничений в виде обобщенной границы. В ней представлена постановка задачи оптимального проектирования сетчатых конструкций и геометрическая структура области факторного пространства.

В **третьей главе** приведена модификация симплексного метода оптимизации с использованием теории R-функций для приведения задачи на области с кусочно-гладкой границей, имеющей большое число участков, к задаче с меньшим числом ограничений. Показана оценка расстояния от текущего численного решения до границы области допустимых решений с помощью математического аппарата теории R-функций. Представлены основные этапы алгоритма решения задачи оптимизации с большим числом ограничений. Показано применение разработанного алгоритма к контрольным примерам, в том числе к задаче определения оптимальных геометрических параметров консольной балки.

В **четвертой главе** представлена схема комплекса программ «Композит НК» с учетом внедренного модуля оптимизационного расчета, приведена функциональная схема модуля, описаны основные взаимосвязи.

В **пятой главе** представлены описание, этапы и результаты оптимизационного расчета сетчатых анизотридных конструкций регулярной

и нерегулярной структуры, реализованные с помощью разработанных метода, алгоритма и программного комплекса.

**В заключении** приведены выводы и основные результаты работы.

# **1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

## **1.1 Роль оптимизационного расчета в проектировании силовых конструкций. Связь с другими этапами проектирования**

К силовым конструкциям относят конструкции, сочетающие в себе набор силовых элементов, который обеспечивает прочность и жесткость конструкции под действующими нагрузками [36-37, 43, 62-67].

В общем случае действующие силы разделяют на природные, не связанные с самой конструкцией, внешние силы упругости и трения и силы взаимодействия между элементами конструкции. К природным силам относят силы инерции, гравитации и т.д.

Цель проектирования конструкций заключается в построении такой конструкции, которая будет соответствовать определенным установленным экономическим и техническим критериям для эксплуатации, производства и транспортировки изделия. При реализации процесса проектирования, в том числе, решается задача синтеза, которая заключается в выборе такой структуры или таких параметров создаваемого изделия, которые обращают в максимум или минимум одну из его характеристик и удовлетворяют всем ограничениям.

Рассмотрим проектирование конструкции с позиции последовательного выполнения этапов процесса проектирования и с позиции формирования конструкторской документации по изделию.

Установленный процесс проектирования конструкций включает в себя три этапа (рисунок 1.1) [20]: предварительное проектирование (внешнюю и внутреннюю компоновку нагрузки и выбор силовой схемы), детальное проектирование (сборочные чертежи и техническая документация, проверочные расчеты конструкции) и подготовку к производству (натурные испытания и сертификация и начало серийного производства и

модификация). При этом отклонения и ошибки, возникающие на этапах подготовки производства, приводят к изменению решения на этапе выбора силовой схемы, и влечет изменения во всех последующих шагах проектирования.



Рисунок 1.1 – Традиционная схема проектирования силовых конструкций

Существует другой подход к процессу проектирования, который в американской технической литературе обозначается термином “concurrent design paradigm” [20, 111] (рисунок 1.2). В качестве недостатка традиционной схемы выделяется большое отклонение от оптимума на начальном этапе, связанное с принятием решений на основе прототипов или анализа нескольких вариантов решения, а также выявлению большого числа ошибок и неточностей при проведении проверочных расчетов и натурных испытаний, приводящих к увеличению времени разработки, что связано с упрощением и недостатками проектировочных расчетов на стадии рабочего проектирования.

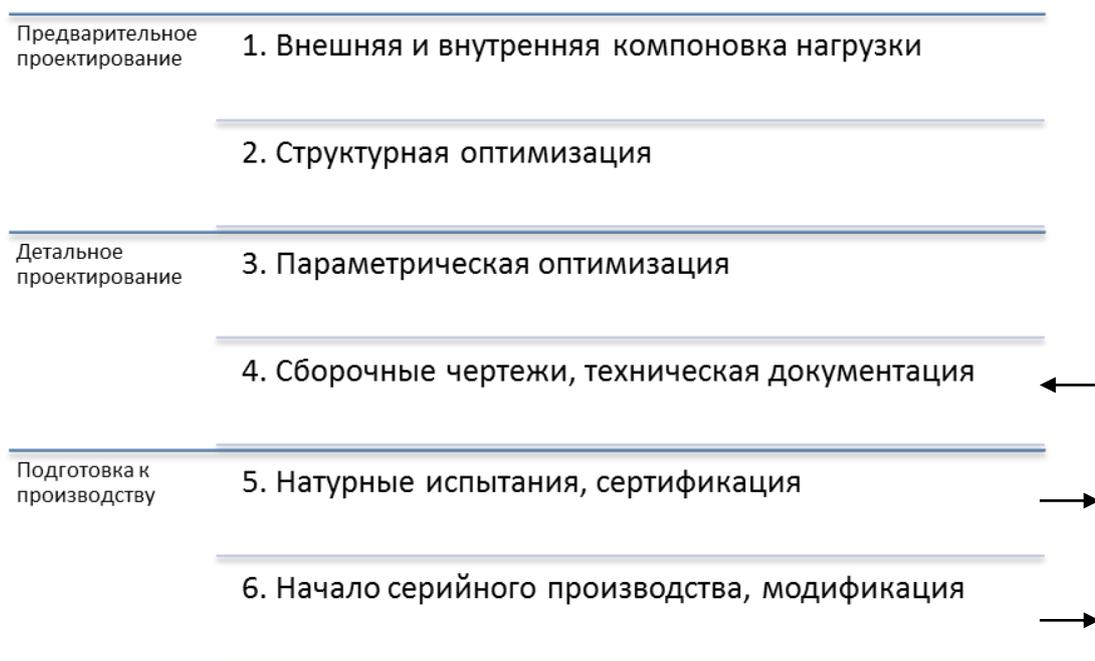


Рисунок 1.2 – Измененная схема проектирования силовых конструкций

Весь процесс проектирования конструкций документируется. Единая система конструкторской документации предусматривает несколько этапов проектирования: этап технического задания (гост 2.114-73), технического предложения (гост 2.118-73), эскизного проекта (гост 2.119-73) и технического проекта (гост 2.120-73).

До этапа эскизного проектирования проводится техническое и технико-экономическое обоснование целесообразности разработки силовой конструкции и проводится сравнительный анализ различных вариантов решения, если это предусматривает техническое задание. На данном этапе – этапе технического предложения – рассматриваются варианты возможных решений, их сравнительная характеристика и устанавливаются требования к изделию и последующим стадиям разработки для оптимального варианта решения.

Техническое предложение является основанием для разработки эскизного проекта – принципиальных конструктивных решений, дающих общее представление об устройстве и принципе работы конструкции. На данном этапе рассматриваются вопросы транспортировки изделия,

соответствия требованиям эргономики и техники безопасности, проводится проверка принципов работы изделия, разработка технических решений, направленных на обеспечение показателей надежности и установление особенностей вариантов возможных решений.

Поиск оптимальных параметров конструкции является частью подготовки эскизного проекта, который предшествует этапу рабочего проектирования, а именно опытно-конструкторским работам, созданию опытных образцов, испытаний и выпуску серийной продукции. Данные полученные на этапе оптимального проектирования позволяют сократить временные и материальные затраты на этапах испытаний и избежать разрушения серийных конструкций при их эксплуатации.

Установленные на этапе технического предложения требования – технические характеристики и показатели качества – дополняются технико-экономическими характеристиками, рассмотренными на этапе эскизного проекта – параметры упаковки и транспортировки, оценки изделия по показателям стандартизации и унификации, соответствия требованиям эргономики, технике безопасности и технической эстетики. На основании данных требований и устанавливаются критерии оптимизации и условия ограничений для оптимального проектирования.

Окончательная оценка эксплуатационных данных, соответствия требованиям экономики и технической эстетики, возможности транспортирования, хранения и монтажа, анализ конструкции изделия на технологичность с учетом конкретного производства и согласование габаритных, установочных и присоединительных размеров с основным потребителем происходит на этапе технического проектирования, результатом которого является окончательное техническое решение, дающее полное представление об устройстве разрабатываемого изделия.

На практике при проектировании объектов сложной структуры и формы множество варьируемых параметров является разнородным, поэтому решение задачи оптимального проектирования может состоять из нескольких

последовательных процессов (этапов), таких как структурная (топологическая) оптимизация конструкции [18, 35], параметрическая оптимизация [60] и оптимизация формы силовых элементов [46].

Таким образом, процедура проведения оптимизационного расчета является одним из существенных этапов подготовки эскизного проекта, учитывающим все эксплуатационные, технические и экономические требования к силовой конструкции.

## **1.2 Критерии оптимизации и ограничения при проектировании силовых конструкций аэрокосмического назначения**

Особый интерес вызывают задачи оптимального проектирования конструкций аэрокосмического назначения. Так, агрегаты космических летательных аппаратов являются составными конструкциями, которые могут включать в себя как сетчатые анизотропные оболочки из композиционных материалов, так и подкрепленные оболочечные конструкции из различных алюминиевых сплавов. Далее в диссертационной работе будут рассматриваться силовые конструкции аэрокосмического назначения.

На разных этапах оптимального проектирования описанных выше силовых конструкций могут быть использованы различные целевые функции. Их выбор зависит от числа характеристик, для которых требуется достигнуть экстремума. На выбор данных характеристик влияют назначение конструкции, условия эксплуатации, технологические возможности ее создания, ограничения по стоимости и другие факторы [47]. В случае если таких характеристик несколько, используют различные способы свертки нескольких целевых функций в одну с введением весовых коэффициентов, причем в ходе свертки может теряться физический смысл проектной задачи. Значения коэффициентов определяют методом экспертных оценок.

В качестве характеристик при оптимизации силовых конструкций аэрокосмического назначения наиболее часто используются такие как вес, меры жесткостных свойств, а также отношения, определяющие критические

значения параметров нагружения, приводящих к потере устойчивости, для тонкостенных конструкций.

При выборе целевой функции следует учитывать, что для некоторых алгоритмов оптимизации требуется, чтобы функция была дифференцируема. Кроме того, необходимо учесть будут ли произвольные значения проектных параметров входить в допустимую область.

Одной из основных характеристик конструкции является её масса, поэтому в задачах оптимального проектирования силовых аэрокосмических конструкций в качестве критерия оптимальности рассматривается минимум массы конструкции. Это связано с экономическими соображениями производства конструкции, а также с тем, что масса конструкции определяет возможность полета и транспортную эффективность.

Одним из разделов проектирования летательных аппаратов (самолетов) является «весовое проектирование» [124], оперирующее понятиями «весовых формул». Существуют множество «весовых формул» для оценки абсолютных и относительных масс конструкций. Относительная масса конструкции зависит от геометрических факторов, распределения нагрузки, размеров и размещения вырезов, прочностных и жесткостных характеристик материалов и других. Различные весовые формулы дают довольно большой разброс результатов [123].

Одним из этапов оптимального проектирования является выбор проектных переменных – вектора варьируемых параметров конструкции. Их выбор зависит от физического смысла задачи и используемых вычислительных алгоритмов. Зачастую методы оптимизации накладывают ограничения на количество варьируемых параметров из-за существенного роста времени расчета. Число параметров можно уменьшить, если учесть возможность взаимного выражения одних параметров через другие из их физической или геометрической взаимосвязи.

Для проведения оптимального проектирования силовых конструкций требуется наиболее полно представить возможные ограничения. Очевидным

набором ограничений являются минимально допустимые значения проектных параметров, обусловленные конструктивными и производственными особенностями и общим физическим смыслом значения параметра. На минимально допустимые значения также оказывает влияние особенности эксплуатации конструктивных элементов на различных этапах.

Как правило, в конструкциях аэрокосмического назначения основными ограничениями являются ограничения на прочность и устойчивость.

Условия прочности заключаются в не превышении максимальными нормальными напряжениями предела прочности материала на растяжение (сжатие), а максимальными напряжениями поперечного сдвига – предела прочности на сдвиг для всех сечений элементов конструкции. В процессе эксплуатации аэрокосмических конструкций на них действуют нагрузки, имеющие различный характер приложения и величину, возникающие за счет большого влияния вероятностных факторов – состояния атмосферы, рельефа и т.д. На основании обработки статистических данных испытаний и математического моделирования различных ситуаций, определяются характерные варианты нагружений – «расчетные случаи». Определяющим для прочности аэрокосмических конструкций являются условия полета, а расчет конструкции на прочность при наземной эксплуатации обычно является поверочным и позволяет установить режимы эксплуатации, допускаемые прочностью корпуса. При этом случаи нагружения, задаваемые для каждой части конструкции нормами прочности, как правило, соответствует предельным режимам полета.

Условия на устойчивость конструкции подразумевают, что заданная нагрузка не превышает критическую, приводящую к потере устойчивости. Учет требований по устойчивости особенно существенен при проектировании тонкостенных конструкций из высокопрочных материалов. При исследовании устойчивости важным является изучение изменений геометрии конструкции, поэтому динамический подход считается наиболее

общим. Но для широкого класса задач допустим анализ устойчивости, основанный на статическом представлении. Задача упругой устойчивости состоит в отыскании минимальной величины первых собственных значений и соответствующего распределения прогибов из решения линейной краевой задачи.

При учете устойчивости в задачи оптимизации могут возникать сложности связанные с появлением кратности критических значений (собственных значений) [9, 13, 22, 29, 45, 46, 86, 88, 89, 114]. При допущении возможности появления кратных критических нагрузок собственными формами потери устойчивости могут быть любые линейные комбинации симметричных и ассиметричных функций.

Целью структурной или топологической оптимизации является определение количества и типа силовых элементов, их расположение в пространстве и способы соединения между собой. Таким образом, результатом топологической оптимизации является оптимальная конструктивно-силовая схема. Для ее определения в качестве целевой функции будет выступать величина потенциальной энергии системы, а ограничения будут наложены на объем материала [117]. Проектная область разбивается на элементы, для которых вводится функция наличия материала. Оптимально конструктивно-силовая схема может быть определена различными методами: метод гомогенизации [5], SIMP-метод [4, 32, 40].

Первоначально данный вид оптимизации был использован при решении задач оптимизации ферменных конструкций [35]. Автор статьи указал, что при топологической оптимизации конструкция может превращаться в механизм, что не является решением исходной задачи.

Топологическая оптимизация конструкции на основе представления как пористого материала была впервые рассмотрена в работе Комарова А.А. [84]. В дальнейшем этот подход получил распространение в работах следующих авторов: AllaireG., BrunsT.E., LipkaA., RammE., EschenauerH.A.,

OlhoffN., RozvanyG.I.N., KirschU., MinS.J., SekimotoT., SigmundO., SuzukiK., NoguchiH. и других [6, 12, 18].

Авторами работ [15, 39] предложен подход к топологической оптимизации, учитывающий ограничения на напряжения силовой конструкции – метод оптимизации конструкции ESO.

Топологическая оптимизация в большинстве случаев выполняется с помощью прикладных пакетов. Такая оптимизация реализована в ABAQUS [33], ANSYS [2, 50, 82, 98] и других CAD-системах [8, 28, 93, 119, 125, 126].

Задача параметрической оптимизации обычно определяет проектные параметры конструкции, описывающие размеры сечений элементов при фиксированной ранее определенной силовой схеме [94, 122]. Например, толщины пластин или площади поперечного сечения стержня. Как правило, для задач параметрической оптимизации на практике ищется приближенное решение задачи по эвристическим алгоритмам.

Набор разработанных и используемых в настоящий момент подходов и методов для оптимального проектирования силовых конструкций достаточно велик. В общем случае все методы к решению задачи оптимального проектирования аэрокосмических конструкций можно разделить на аналитические и численные (поисковые). К аналитическим методам относят метод возмущения или метод продолжения по параметру [46]. Применение метода возмущения предполагает разложение в ряд по малому параметру управляющей функция (вектор-функции проектных переменных), вектор-функции переменных состояний конструкции и вектор-функции проектирования, описывающей форму тела (для топологической оптимизации). Дифференциальные операторы, представляющие условия краевой задачи и краевые условия, также будут разложены в ряд по малому параметру. В дальнейшем задачу оптимизации можно представить как систему более простых задач. При этом применение данного метода не ограничено случаями, где основные соотношения содержат малый параметр

в явном виде – существуют методы введения малого параметра в задачу искусственно [49, 72].

Несмотря на существование аналитических методов решения задачи оптимального проектирования, их применение затрудняется высокой размерностью задач оптимизации многоэлементной конструкции. Поэтому в настоящее время известные точные аналитические решения модельных задач небольшой размерности используются в качестве эталонов для тестирования и настройки поисковых алгоритмов, а также для качественной проверки и анализа получаемых численных и экспериментальных результатов.

Широкое применение получили численные методы, реализованные в пакетах прикладных программ. Рассматривая методы, реализованные в САД-системах [8, 10, 11, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 27, 28, 30, 31, 38, 93], можно выделить методы нелинейного программирования, генетического алгоритма и однопараметрические методы. Кроме данных групп методов, можно отметить также методы проекции градиента, методы частных критериев оптимальности и методы с элементами случайности.

**Однопараметрические методы**, такие как метод дихотомии, не представляют значительного интереса, так как в практических задачах зачастую целесообразно рассматривать группу оптимизационных параметров, не имеющих между собой явной связи.

**Методы нелинейного программирования** предполагают, что нелинейные зависимости выходных и входных параметров дифференцируемы, и включают в себя как безусловные методы, например симплексные и градиентные методы, так и условные методы оптимизации – использование функций Лагранжа и квадратичное программирование. Нелинейное программирование с использованием функций Лагранжа заключается в построении новой целевой функции, учитывающей ограничения в виде штрафа, и решение такой задачи стандартными методами. Квадратичное программирование ограничивает задачи линейными ограничениями и квадратичной формой целевой функции. Стоит

заметить, что в методах нелинейного программирования существует ограничение на выпуклость критерия и ограничений.

**Генетические алгоритмы** представляют собой класс методов, основанных на имитации естественного отбора, и направленных на поиск наиболее приспособленной особи – особи с наибольшей функцией приспособления – численной характеристикой, определенной в соответствии с задачей. Универсальность генетических алгоритмов обусловлена тем, что от конкретной задачи зависят только функции приспособленности – целевые функции – кодирование решений. Стоит заметить, что генетический алгоритм не имеет гарантий обнаружения глобального решения за приемлемое время, а также не гарантирует, что найденное решение является оптимальным. Тем не менее, при больших размерах задач и отсутствии упорядоченности исходных данных генетический алгоритм имеет преимущества перед другими алгоритмами. Многокритериальный генетический алгоритм подразумевает нахождение множества оптимальных (в смысле Парето) «хромосом», так как многокритериальная оптимизация в общем случае необязательно имеет решение, являющееся оптимальным относительно всех критериев вследствие возможных конфликтов.

**Методы критериев оптимальности** относятся к непрямому подходу, в котором исходная задача заменяется косвенной, и ищется рациональная конструкция, которая должна отвечать некоторому критерию, выведенному из математической формулировки задачи или основанному на особенностях поведения класса конструкции. **Стохастические методы или методы с элементами случайности** позволяют отыскать глобальный минимум задачи оптимизации, но имеют низкую эффективность при большом количестве проектных переменных, а, следовательно, при проектировании силовых конструкций со сложной геометрической формой. В случайном поиске также используется некоторая рекуррентная зависимость, выражающая смещение в пространстве проектных переменных, рабочим или предварительным шагом в случайном направлении. Если результат предварительного шага приводит к

уменьшению целевой функции, то направление используется для выполнения рабочего шага, в некоторых случаях для поиска направления рабочего шага используется результат нескольких предварительных шагов. Развитие данного метода предполагает применение самообучающихся алгоритмов, накапливающих информацию о целевой функции и функциях ограничений, что может привести к уменьшению вероятности нахождения глобального минимума.

Программные пакеты численного моделирования в настоящее время предполагают наличие модуля оптимизации, основанного на численных методах оптимизации. Идея оптимизации, заложенная в программных пакетах, заключается в проведении нескольких виртуальных экспериментов, в которых учитывается разброс входных параметров – возможный диапазон изменения основных размеров и физико-механических параметров – затем определить взаимосвязь между ними и выходными параметрами. Из расчетных данных выбирается оптимальная конструкция, задав критерии оптимизации.

Различные пакеты программ предполагают разные наборы методов оптимизации. Так в ППП ANSYS имеется два модуля – AnsysDesignXplorer [1] и AnsysOptimetrics [3], первый из которых имеет четыре метода оптимизации по поверхности отклика: смешанный метод Хаммерсли, MOGA (многокритериальный генетический алгоритм), NLPQL (нелинейное программирование с квадратичными функциями Лагранжа), MISQP (смешанное целочисленное последовательное квадратичное программирование). Модуль AnsysOptimetrics поддерживает квазиньютоновский метод, метод логического нелинейного программирования, метод прямого поиска, генетический алгоритм и подключение оптимизаторов MATLAB на основе введенных пользователем целевой функции и критериях оптимизации.

Пакет ABAQUS имеет встроенную методологию BESO, которая реализует метод топологической оптимизации, основанный на SIMP-методе.

Так же в пакете реализованы алгоритмы, основанные на элементной чувствительности и минимизации узловых значений энергии деформации [100]. Кроме того для пакета существует несколько сторонних модулей, но встроенные в пакет алгоритмы топологической оптимизации являются более эффективными по времени вычисления и простоты эксплуатации.

Пакет NASTRAN [26, 125] содержит широкий выбор параметров, которые могут быть использованы как целевые функции или ограничения, такие как вес, объем, частоты собственных колебаний, перемещения, напряжения и т.п., и также предоставляет возможность задания пользователем функциональных связей для формирования специальных целевых функций и функций ограничений. В качестве методов расчета в пакете представлены метод возможных направлений, метод последовательного линейного программирования, метод последовательного квадратичного программирования.

ППП T-FlexCAD [34] поддерживает методы быстрого поиска, последовательного приближения и дихотомии.

Зачастую этап оптимизации в CAD-системах представлен или предваряется параметрическим анализом – моделированием множества вариантов, используя одну начальную модель, при определении ряда значений в диапазоне или переменной развертке. Как начальный этап процесса оптимизации, параметрический анализ позволяет определить разумный диапазон значений переменных.

Однако, реализованные в описанных пакетах прикладных программ численные методы оптимизации не учитывают особенности современных конструкций, например анизотридных сеток, требующих выполнения десятков тысяч ограничений, включающих геометрические размеры структурных элементов и параметры состояния.

### 1.3 Особенности оптимизации по массе сетчатых конструкций из композиционных материалов

Одним из видов конструкций аэрокосмического назначения являются сетчатые конструкции из композиционных материалов [36-37, 43, 62-67], представляющие собой регулярную структуру спиральных и кольцевых ребер (рисунок 1.3).

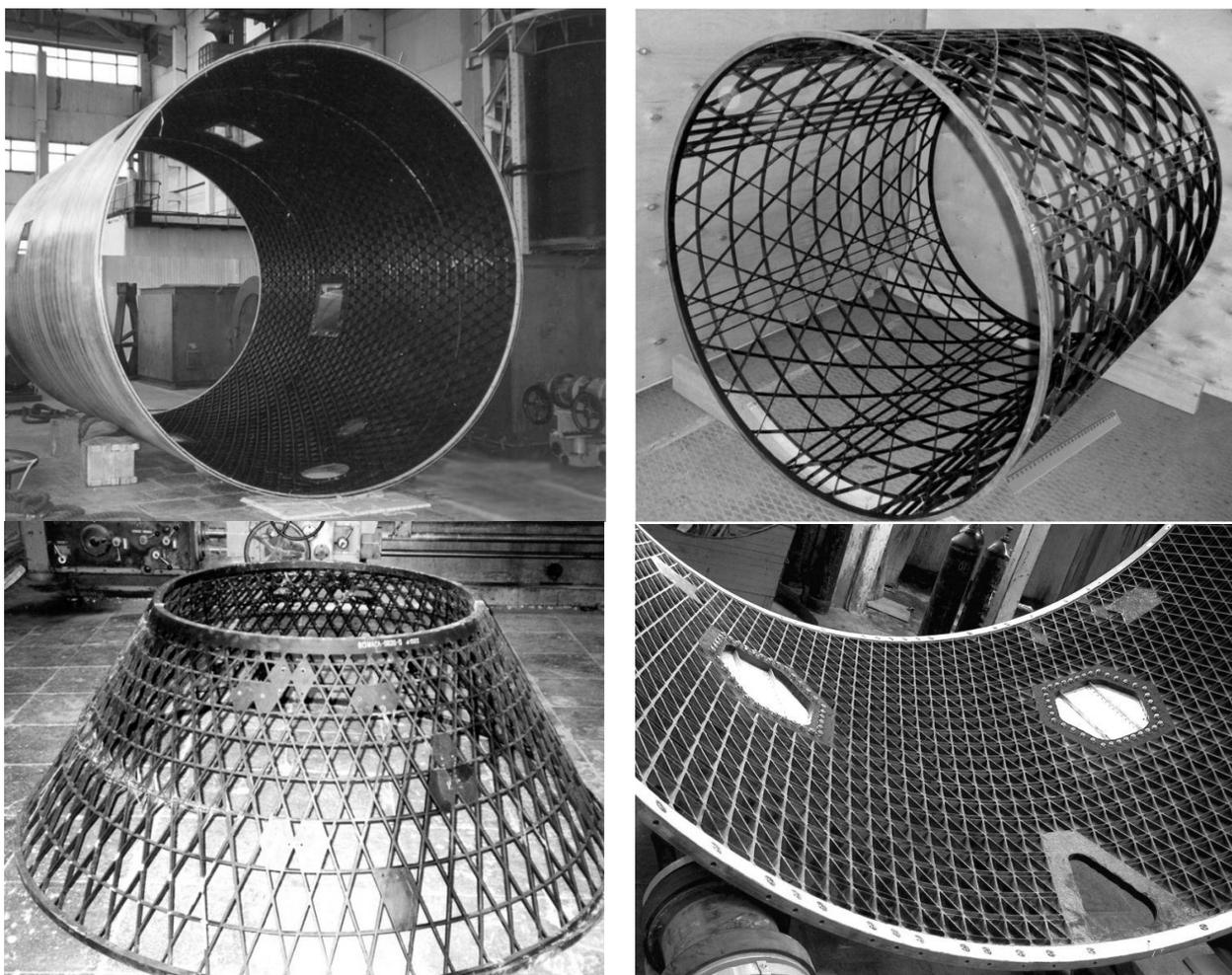


Рисунок 1.3 – Сетчатые оболочечные конструкции, выполненные из композиционных материалов

Типовая сетчатая конструкция характеризуется следующими проектными параметрами: толщиной сетчатой структуры  $h$ , толщинами спиральных и кольцевых ребер  $\delta_c$  и  $\delta_k$ , расстояниями между спиральными

ребрами  $a_c$  (по нормали к оси ребра) и между кольцевыми ребрами  $a_k$ , углом наклона спиральных ребер (по отношению к образующей) (рисунок 1.4).

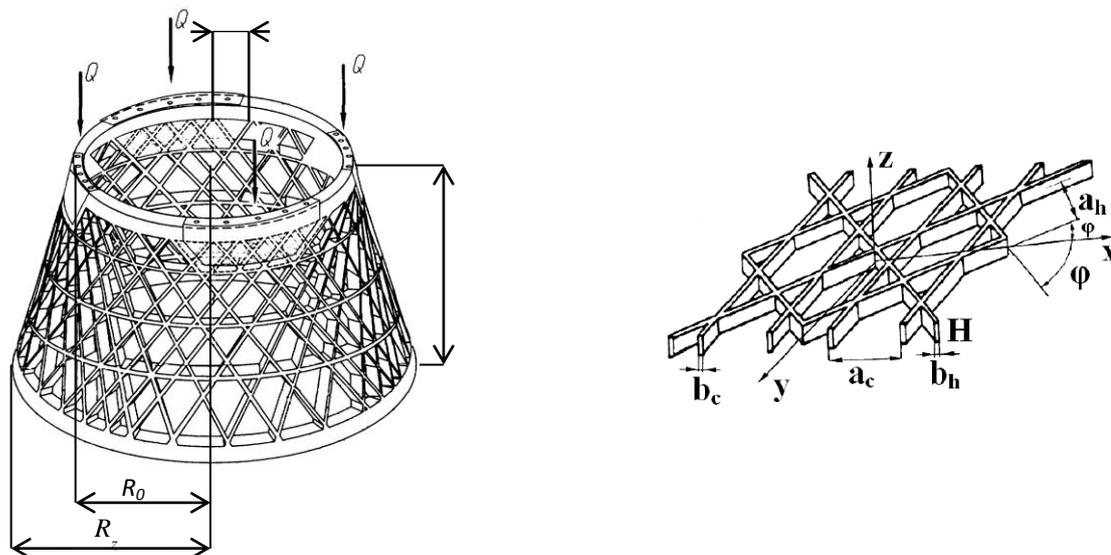


Рисунок 1.4 – Сетчатая структура

Оптимальное проектирование таких конструкций осуществляется только при условии отсутствия обшивки. В настоящее время сетчатые конструкции или не имеют обшивки или имеют наружную одностороннюю обшивку. Минимальное использование двухсторонней обшивки связано с тем, что при изготовлении такой обшивки формирующий материал остается в конструкции, что увеличивает ее массу. При использовании однослойной обшивки эффект достигаемый в повышении несущей способности и жесткости системы не превышает увеличения массы конструкции, кроме того применение обшивки снижает эффективность сетчатого слоя [43].

Задача оптимизации по массе многоэлементной статически неопределимой конструкции, к которым относятся анизотридные конструкции из композиционных материалов, является однокритериальной. Целевая функция (масса конструкции) зависит от варьируемых проектных параметров непрерывно вместе со своими производными, причем число варьируемых параметров может быть весьма большим. При использовании прямого метода минимизации число варьируемых параметров приходится

ограничивать из соображений компьютерной эффективности, но вполне реалистично наличие нескольких десятков варьируемых параметров.

Известно, что для таких конструкций основными формами разрушения при нагружении являются разрушение спиральных ребер при сжатии, общая потеря устойчивости и местная потеря устойчивости участков спиральных ребер между узлами пересечения ребер. Можно заметить, что в случае цилиндрических оболочек напряжение растяжения в кольцевых ребрах не велико.

Ограничения по прочности, жесткости и устойчивости выражаются через параметры напряженно-деформированного состояния конструкции при расчетных нагрузках, которые, в свою очередь, зависят от варьируемых проектных параметров конструкции. Поскольку параметры напряженно-деформированного состояния зависят от положения точки (являются полями перемещений, напряжений и деформаций), ограничения по прочности и жесткости должны формулироваться для достаточно большого числа характерных точек конструкции. Применительно к анизогридным конструкциям, таких точек может быть несколько тысяч. Таким образом, в формулировку задачи может входить большое число ограничений, на несколько порядков превышающее число варьируемых параметров.

Разработка метода и алгоритма решения задачи оптимизации анизогридных конструкций по массе, позволяющих учесть все ограничения и определить область допустимых решений является актуальной.

Расчет напряженно-деформированного состояния и особенно критических нагрузок потери устойчивости представляет собой сложную задачу, требующую существенных затрат компьютерного времени. Заметим, что вычисление производных по варьируемым проектным параметрам практически трудно выполнимо, что делает необходимым применение к оптимизации анизогридных конструкций методов, не требующих вычисления градиента. Существенным фактором повышения эффективности алгоритма оптимизации является сокращение числа пробных точек, т.е.

сочетаний проектных параметров, при которых выполняется расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости конструкции.

Существуют различные подходы к расчету напряженно-деформированного состояния конструкции и расчету оптимальных проектных параметров на основе полученных результатов: можно выделить континуальный и дискретный подходы. Континуальные модели использовались в работах В.А. Бунакова [7, 51], В.В. Васильева, В.А. Никитюка, А.Ф. Разина и В.В. Федорова [96] и продолжают использоваться при создании сетчатых конструкций регулярной структуры [87]. Недостаток континуального подхода к оптимизации заключается в получении усредненных оценок напряженно-деформированного состояния сетчатой структуры, что неприемлемо для конструкций с вырезами, местными усилениями и другими нарушениями регулярности структуры. Полную оценку концентрации напряжений в анизотридных конструкциях нерегулярной структуры можно получить только при использовании в расчетах дискретного моделирования [52].

Так дискретный подход использовался в работе В.П. Полиновского [102] для проектирования сетчатых отсеков. Методика выбора оптимальных параметров содержала несколько этапов – построение моделей с различными значениями углов наклона спиральных ребер, подбор высоты кольцевых и спиральных ребер и ширины спирального ребра при критерии минимума массы с учетом ограничений по прочности и устойчивости. Данный метод не гарантирует отыскание оптимума, поскольку не учитывает взаимное влияние размеров сечения и углов наклона спирального ребра. Исследования влияния изменения угла наклона спирального ребра на устойчивость также приведены в работе Морозова Е.В., Лопатина А.В., Нестерова В.А. [24, 25]. Сетчатая оболочка имела регулярную реберную структуру, моделирование которой проводилось дискретно.

## 1.4 Цель и задачи диссертационной работы

**Объектом исследования** являются анизотридные сетчатые оболочки из композиционных материалов с регулярной и нерегулярной структурой ребер.

В работе используются следующие критерии.

**Критерий прочности** анизотридной оболочечной конструкции из композиционного материала: напряжения вдоль армирования, поперек армирования и напряжения поперечного сдвига не должны превышать соответствующих пределов прочности материала.

**Критерий общей устойчивости** анизотридной оболочечной конструкции из композиционного материала: нагрузка не превышает критическую, приводящую к потере устойчивости.

**Критерий местной устойчивости** анизотридной оболочечной конструкции из композиционного материала: сжимающие силы в каждом отрезке ребра между точками пересечения с соседними ребрами меньше эйлеровой критической силы.

**Цель работы:** разработка метода, алгоритма и реализующего их программного обеспечения для решения задачи минимизации массы сетчатых анизотридных конструкций с большим числом структурных параметров и переменных состояния.

Для достижения этой цели поставлены следующие задачи.

1. Разработка математической модели объекта оптимизации посредством представления множества ограничений в виде аппроксимации кусочно-гладкой границы аппаратом R-функций.

2. Разработка численного метода решения задачи оптимизации, основанного на гладкой аппроксимации границы области возможных решений, в котором последовательность приближений строится по модели упругого симплекса.

3. Разработка и программная реализация алгоритма численного метода минимизации массы анизотридных конструкций с учетом большого числа ограничений структурных параметров и параметров состояния по методу упругого симплекса.

4. Тестирование разработанного численного метода задачи минимизации при учете нескольких ограничений на задачах, имеющих точное аналитическое решение.

5. Апробация разработанных численного метода и алгоритма оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций из условия минимума массы на сетчатых оболочках регулярной и нерегулярной структуры с учетом ограничений на большое число переменных состояния.

При решении поставленных задач используются следующие методы.

1. Метод дискретного моделирования анизотридных сетчатых конструкций с регулярной структурой ребер.

2. Метод конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния анизотридных сетчатых конструкций с регулярной структурой ребер.

3. Методы построения нормализованного предиката области аппарата теории R-функций для аппроксимации участков границы.

4. Методы оптимизации для определения значений целевой функции при множестве ограничений.

5. Методы объектно-ориентированного программирования на основе функционально-объектной парадигмы при реализации разработанных алгоритмов в программном комплексе.

### **Идея работы.**

При построении эффективного алгоритма минимизации нелинейной целевой функции (массы конструкции) в качестве основы был выбран один из наиболее быстрых методов отыскания минимума функции - метод деформируемого многогранника (метод симплексного поиска).

Замена кусочно-гладкой границы области поиска решения на гладкую аппроксимацию с помощью аппарата R-функций позволила построить итерационный процесс движения симплекса вдоль гладкой границы области поиска решения в направлении экстремума модифицированной нелинейной целевой функции (суть которой – масса конструкции).

Таким образом, алгоритм, основой которого является модель упругого симплекса, можно применять к решению задач оптимизации с большим числом ограничений.

Решение перечисленных выше задач предполагает использование метод конечных элементов [41, 44, 61, 70, 71, 73, 74, 75, 83, 90, 95, 97, 99, 110, 113, 116, 118] для решения краевых задач статики и устойчивости.

## **2 ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ПРОЧНОСТИ, ЖЕСТКОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ**

Формулировка задачи оптимизации включает выбор критерия оптимальности и ограничений на варьируемые факторы. Применительно к оптимизации по массе сетчатых анизотридных конструкций критерием оптимизации является масса, а ограничениями – условия прочности, жесткости, устойчивости и технологической реализуемости проектируемой конструкции. Для формализации задачи и её математической постановки необходима математическая модель, в которой варьируемыми факторами будут конструктивные параметры (размеры конструктивных элементов), а откликами – функции, определяющие массу и запасы по прочности, жесткости и устойчивости.

### **2.1 Структура расчетных моделей анизотридных конструкций для определения запасов по прочности, жесткости и устойчивости**

К основному признаку, классифицирующему анизотридные сетчатые композиционные оболочки, относят наличие семейств пересекающихся ребер, траектории армирования которых являются скрещивающимися (а не пересекающимися) в пространстве линиями. Далее в работе будем рассматривать силовые конструкции в виде оболочек вращения, ребра которых расположены регулярно и образуют два семейства: спиральные и кольцевые ребра. Оболочка может содержать обшивку, которая, при используемой технологии изготовления [91], совместно с ребрами представляет собой цельную (монокридную) конструкцию.

Структура модели анизотридной сетчатой оболочки как системы взаимодействующих конструктивных элементов представлена на рисунке 2.1.

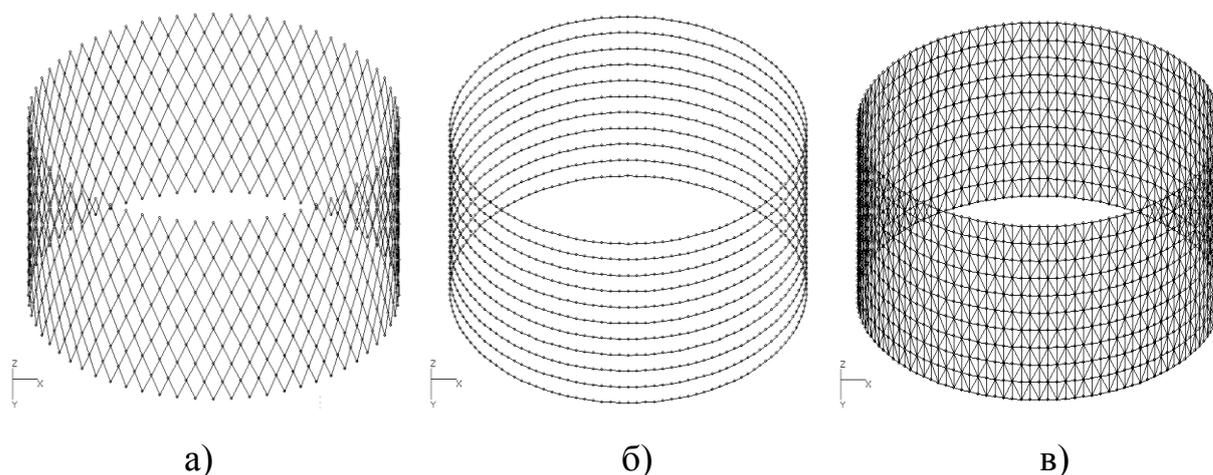


Рисунок 2.1 – структура модели анизотридной сетчатой оболочки:

а – спиральные ребра; б – кольцевые ребра; в – обшивка

Как правило, по верхней и нижней кромке анизотридная сетчатая оболочка подкреплена торцевыми шпангоутами, которые используют для соединения данной конструкции с другими отсеками агрегата летательного аппарата.

При дискретном моделировании методом конечных элементов структура модели совпадает со структурным членением силовой конструкции. Модель имеет спиральные, кольцевые ребра, верхний и нижний шпангоут, обшивку и усиления (при их наличии).

В качестве основного вида нагружения, рассматриваемого класса анизотридных конструкций, выступает осевое сжатие, представляющее собой действие сжимающей осевой силы и изгибающих моментов в крайних сечениях анизотридной оболочки. К силовым оболочечным конструкциям приложены и массовые силы. Если оболочка является составной частью агрегата космического летательного аппарата (часть ракеты), то массовые силы действуют главным образом вдоль оболочки, а их поперечная составляющая существенно мала. Такой вид нагружения приводит к тому, что в основных случаях спиральные ребра конструкции сжимаются, а кольцевые растягиваются. Этот случай нагружения является основным, и оптимизация проводится именно по отношению к таким нагрузкам.

Оптимизация сетчатых конструкций космических летательных аппаратов по отношению к другим случаям нагружения, связанным с нагрузками при наземной транспортировке, не представляет практического интереса: такие расчётные случаи являются предметом только поверочных расчётов.

Нагрузка при дискретном моделировании описанных выше анизотридных оболочек может быть задана двумя способами (рисунок 2.2):

- равномерным или неравномерным распределением в узлах модели на верхней кромке;
- приложением сосредоточенной силы в «жёстком» узле.

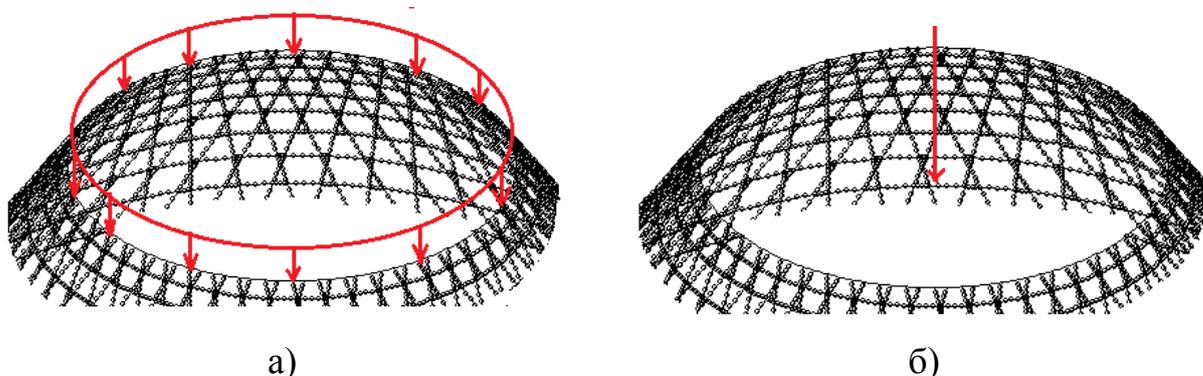


Рисунок 2.2 – схема приложения нагрузки при моделировании анизотридной сетчатой оболочки: а – распределение по верхней кромке; б – приложение в «жёстком» узле

Напряженно-деформированное состояние конструкции при приложенных нагрузках напрямую зависит от проектных параметров и физико-механических характеристик композиционного материала. Если нагрузки и свойства материалов заданы, то проектные параметры – геометрические размеры конструктивных элементов – являются варьируемыми факторами, которые и должны быть определены при оптимизации.

Таким образом, в основе задачи оптимизации лежит модель, определяющая зависимость запасов по прочности, устойчивости и жесткости от варьируемых факторов, т.е. модель напряжённо-деформированного состояния. При её формулировке будем использовать вариационную

постановку задачи в перемещениях на основе принципа Лагранжа [75]: из всех кинематически допустимых полей перемещений уравнениям равновесия и статическим граничным условиям удовлетворяет то, которое доставляет минимум потенциальной энергии конструкции. Данная вариационная постановка позволяет рассчитать поля перемещений деформаций и напряжений, возникающие в конструкции при статическом нагружении, методом конечных элементов [41, 44, 61, 70, 71, 73, 74, 75, 83, 90, 95, 97, 99, 113, 116].

Опишем математическую модель, основанную на полном дискретном моделировании сетчатой конструкции и достаточно хорошо апробированную на решении задач статики и устойчивости [55].

За основу при выводе разрешающих уравнений задачи статики принимается условие [48]:

$$\Pi = \min_{u \in U} \Pi(u), \quad (2.1)$$

где  $u$  – варьируемое поле перемещений,

$U$  – пространство кинематически возможных полей перемещений,

$\Pi(u)$  – потенциальная энергия как функционал, зависящий от перемещений.

Потенциальная энергия равна разности энергии деформации и работы внешних сил:

$$\Pi(u) = W(u) - A(u), \quad (2.2)$$

где  $W(u)$  – полная энергия деформации,

$A(u)$  – работа внешних сил.

Работа внешних сил:

$$A(u) = \int_V u^T q dV + \int_{S_1} p^T u ds, \quad (2.3)$$

где  $V$  – область, на которой распределены нагрузки  $q$ ,

$S_1$  – часть границы, на которой заданы внешние нагрузки  $p$ .

Энергия деформации:

$$W(u) = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dV, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon$  – вектор-столбец компонент деформации,

$\sigma$  – вектор-столбец компонент напряжения.

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния конструкции при статических нагрузках сводится к минимизации потенциальной энергии  $\Pi$ , которая равна энергии деформации  $W$  за вычетом работы внешних сил  $A$  и выражается функционалом (2.2). Энергия деформации выражается через перемещения узлов. Перемещения и напряжения на элементе отсчитываются в местных координатах  $(s, t, n)$ , где  $s$  – осевая координата,  $t$  – окружная координата,  $n$  – координата, отсчитываемая по нормали. Перемещения в произвольной точке выражаются через перемещения узлов конечного элемента в следующем виде:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N_i]^T [\delta_i], \quad (2.5)$$

где  $u, v, w$  – перемещения точек координатной поверхности в направлениях  $(s, t, n)$  соответственно,

$N_i$  – матрица, содержащая базисные интерполяционные функции, количество которых зависит от типа элемента;

$\delta_i$  – перемещения в соответствующих узлах.

Ребра анизотридной сетчатой оболочки представлялись в виде набора балок, а обшивка – в виде набора пластин. В качестве конечного элемента для ребер была выбрана двухузловая балка Тимошенко [104] (рисунок 2.3-а), в качестве элемента для обшивки – трехузловой треугольник Зенкевича [75] (рисунок 2.3-б).

Связь деформаций координатной поверхности (приведения) с узловыми перемещениями определяется следующим образом:

$$\varepsilon = B \delta, \quad (2.6)$$

где  $B$  – матрица, получаемая дифференцированием матрицы базисных функций  $N$ .

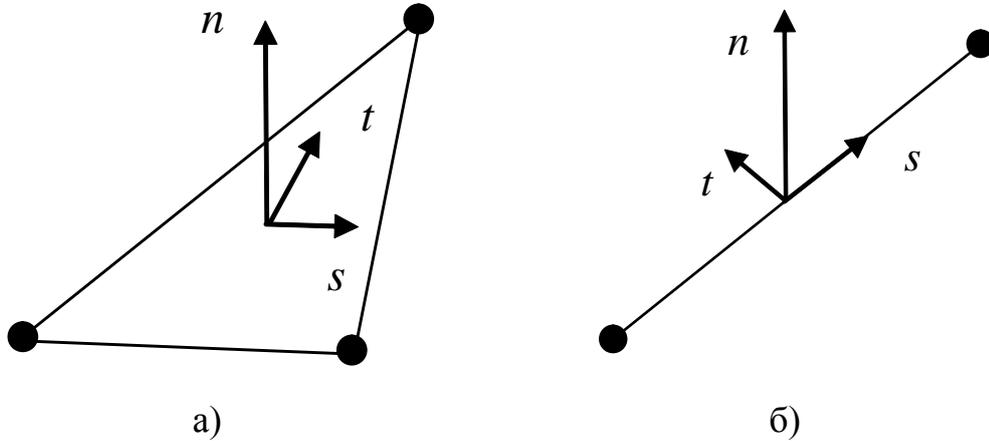


Рисунок 2.3 – Конечные элементы: а – для пластины, б – для балки

В предположении упругого поведения соотношения между напряжением и деформацией будут линейными:

$$\sigma = D\varepsilon = DB\delta, \quad (2.7)$$

где  $D$  – матрица упругости, содержащая характеристики материала,  $\varepsilon$  – деформация координатной поверхности приведения.

Выражение для полной потенциальной энергии определяется следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T \left( \int_V B^T DB dV \right) \delta - \delta^T \left( \int_V N^T q dV + \int_{S_1} N^T p dS \right). \quad (2.8)$$

Энергия деформации принимает вид квадратичной формы:

$$W = \frac{1}{2} \delta^T K \delta, \quad (2.9)$$

где  $K$  – глобальная матрица жесткости:

$$K = \int_V B^T DB dV. \quad (2.10)$$

В качестве математической модели деформирования сетчатой оболочки использовалась модель совместного деформирования обшивки и реберной

структуры сетчатой анизотридной конструкции, разработанная Бурнышевой Т.В. [55].

В этой модели перемещения поверхности приведения определяются функциями двух криволинейных координат. Выбор поверхности приведения зависит от объекта моделирования. Если конструкция содержит и обшивку, и рёбра, за поверхность приведения выбирают поверхность соединения реберной структуры и обшивки. Если моделируется сетчатая структура без обшивки, то в этом случае поверхность приведения может быть выбрана, например, посередине поперечного сечения кольцевого ребра.

Перемещения ребер и обшивки совпадают на линиях поверхности приведения, проходящих параллельно осям ребер (линиях приведения для ребер). Таким образом, структура поля перемещений включает линейные перемещения поверхности приведения, а также добавочные перемещения, различные для обшивки и рёбер, которые зависят от угла поворота материальной нормали и обращаются в нуль на поверхности приведения (рисунок 2.4).

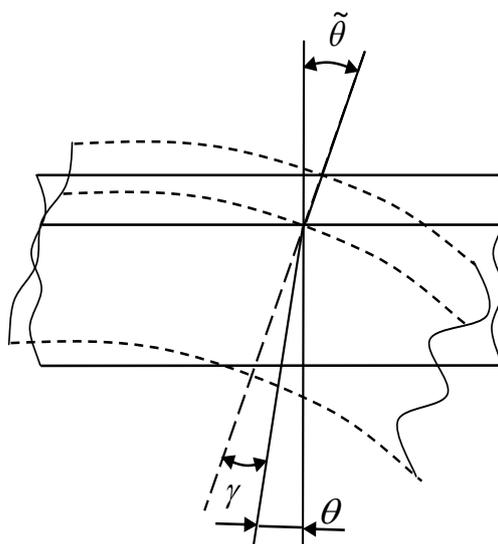


Рисунок 2.4 – Совместное деформирование обшивки и реберной структуры:

- - - - геометрическая нормаль, ————— материальная нормаль;

$\tilde{\theta}$  - угол поворота геометрической нормали к обшивке,

$\theta$  - угол поворота материальной нормали к ребрам,  $\gamma$  - угол сдвига

Введём вспомогательную цилиндрическую систему координат  $(z, \varphi, r)$ , где ось  $z$  совпадает с осью оболочки, угол  $\varphi$  отсчитывается от произвольно выбранной образующей, ось  $r$  направлена по внешней нормали к поверхности приведения. Зададим поверхность приведения в цилиндрической системе координат в виде:  $r=r(z)$ . Определение нормальной координаты произвольной точки  $(z, r)$  позволяет рассматривать перемещения как функцию осевой, нормальной и окружной координат:

$$\vec{u}(z, n, \varphi) = \vec{u}_0(z, \varphi) + n \cdot \begin{cases} \vec{\psi}^+(z, \varphi), & n > 0 \\ \vec{\psi}^-(z, \varphi), & n < 0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Функция  $\vec{u}_0(z, \varphi)$  определена только на поверхности раздела (является функцией двух координат) и непрерывна. Тогда пучок функций (2.11) является непрерывным при произвольных непрерывных неопределённых компонентах пучка  $u_0$ ,  $\vec{\psi}^+$  и  $\vec{\psi}^-$ .

Неопределёнными компонентами пучка являются векторные функции, каждая из которых имеет по три координаты. Производные от перемещений в пределах обшивки выражаются через два кинематических параметра – углы поворота нормали (не учитывается поворот относительно нормали к поверхности приведения). В пределах ребра учитывается три поворота сечения относительно всех трёх координатных осей. Число скалярных неопределённых коэффициентов (координат) в пучке (2.11) равно восьми: три координаты вектора  $\vec{u}_0$ , три координаты вектора  $\vec{\psi}^-$  и две независимые координаты вектора  $\vec{\psi}^+$ .

Векторы перемещений  $\vec{u}_0$ ,  $\vec{\psi}^+$  и  $\vec{\psi}^-$  могут быть отнесены к любой системе координат. В каждой точке поверхности приведения введём базис  $(s, t, n)$ , в котором ось  $s$  направлена по касательной к оболочке, ось  $t$  – по образующей от задней кромки оболочки к передней, ось  $n$  – по внешней нормали. К этому базису будем относить перемещения точек моделируемого

объекта, перемещения точек поверхности приведения обозначим через  $u, v, w$ , где  $u$  – перемещения вдоль оси  $s$ ;  $v, w$  – перемещения вдоль осей  $t, n$  соответственно.

Линейные перемещения поверхности приведения вдоль осей  $(s, t, n)$  обозначим через  $u_{s'}, u_{t'}, u_{n'}$ . С учетом выше сказанного, каждая точка конструкции на поверхности приведения может быть определена координатами  $(z, \varphi)$  (координата  $n$  на поверхности приведения равна нулю):

$$u_s = u_s(z, \varphi), u_t = u_t(z, \varphi), u_{n'} = u_n(z, \varphi). \quad (2.12)$$

Функции линейных перемещений (2.12) определяют  $\vec{u}_0(z, \varphi)$  пучка (2.11).

Тогда координаты вектора  $\vec{\psi}^-$  определим как углы поворота сечений ребер относительно осей  $s, t$  и  $n$  в виде  $\theta_s, \theta_t, \theta_n$ ; координаты вектора  $\vec{\psi}^+$  в системе координат  $(s, t, n)$  поверхности приведения  $\tilde{\theta}_{s'} = \frac{\partial w}{\partial s'}$  и  $\tilde{\theta}_{t'} = \frac{\partial w}{\partial t'}$  – углы поворота геометрической нормали обшивки от исходного состояния до деформированного (рисунок 2.5).

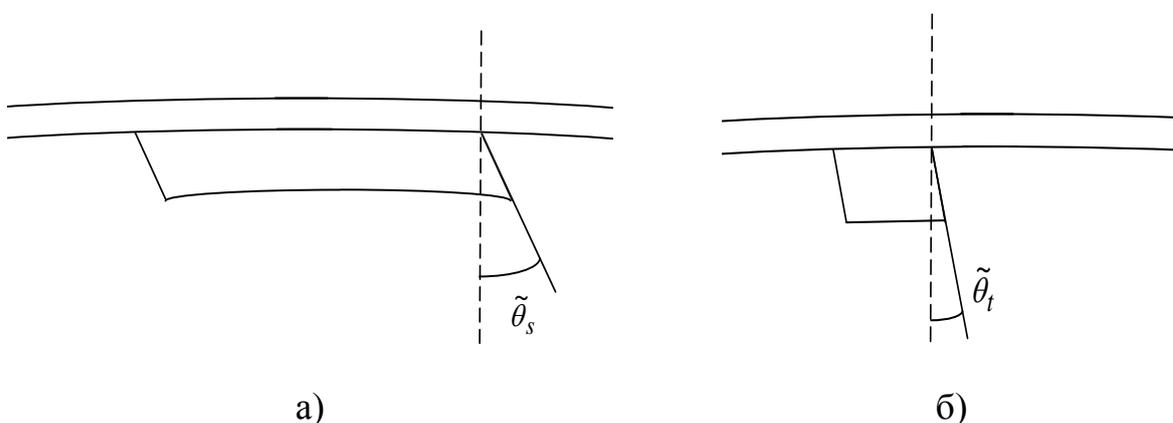


Рисунок 2.5 – Материальная и геометрическая нормаль в ребрах и обшивке:

а – продольное сечение ребер, б – поперечное сечение ребер

Таким образом, поле перемещений сетчатой конструкции с обшивкой однозначно определяется **восьмью функциями двух координат  $z$  и  $\varphi$** :

- тремя функциями линейных перемещений поверхности приведения  $u_s(z, \varphi)$ ,  $u_t(z, \varphi)$ ,  $u_n(z, \varphi)$ ;
- тремя углами поворота сечения балок в реберной структуре  $\theta_s(z, \varphi)$ ,  $\theta_t(z, \varphi)$ ,  $\theta_n(z, \varphi)$ ;
- двумя углами поворота геометрической нормали к обшивке  $\tilde{\theta}_s(z, \varphi)$ ,  $\tilde{\theta}_t(z, \varphi)$ .

При рассмотрении частого случая (оболочки без обшивки) введенные выше углы поворота геометрической нормали к обшивке  $\tilde{\theta}_s(z, \varphi)$ ,  $\tilde{\theta}_t(z, \varphi)$  будут отсутствовать. Таким образом, модель деформирования реберной структуры будет включать **шесть функций двух координат  $z$  и  $\varphi$** :

- три функции линейных перемещений поверхности приведения  $u_s(z, \varphi)$ ,  $u_t(z, \varphi)$ ,  $u_n(z, \varphi)$ ;
- три угла поворота сечения балок в реберной структуре  $\theta_s(z, \varphi)$ ,  $\theta_t(z, \varphi)$ ,  $\theta_n(z, \varphi)$ .

Непрерывность перемещений реберной структуры и обшивки в используемой математической модели достигается в узлах конечно-элементной модели на поверхности приведения. Это позволяет провести исследование сетчатой оболочки на устойчивость как монолитной конструкции.

Пусть в исходном состоянии равновесия для оболочки известна внешняя нагрузка  $P$ , перемещения  $u$  и напряжения  $\sigma$ . Пусть после малых возмущений внешней нагрузки, оболочка переходит в смежное состояние равновесия с перемещениями  $u + \tilde{u}$ .

Представим функционал полной потенциальной энергии конструкции в дискретном виде, как функцию приращений узловых переменных  $\delta^*$ :

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \left( \delta^{*T} K^{(e)} \delta^* + \delta^{*T} G^{(e)} \delta^* \right) - \tilde{P}^T \delta^{*}, \quad (2.13)$$

где  $K^{(e)}$  - матрица жесткости на элементе;  $\tilde{P}$  - приращение внешней нагрузки;  $G = \int_V G_{ij} \sigma_{ij} dV$  - матрица геометрической жесткости элемента.

В общем виде матрицу геометрической жесткости элемента можно представить как

$$G^{(e)} = \int_{V^{(e)}} G_{ij}^{(e)} \sigma_{ij}^{(e)} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{ G_s^{(e)} \sigma_s^{(e)} + G_t^{(e)} \sigma_t^{(e)} + G_n^{(e)} \sigma_n^{(e)} + (G_{sn}^{(e)} + G_{ns}^{(e)}) \tau_{sn}^{(e)} + (G_{st}^{(e)} + G_{ts}^{(e)}) \tau_{st}^{(e)} + (G_{nt}^{(e)} + G_{tn}^{(e)}) \tau_{nt}^{(e)} \} dV^{(e)}, \quad (2.14)$$

где  $G_{ij}^{(e)}$  – матрицы нелинейных деформаций на элементе,

$\sigma_{ij}^{(e)}$  – напряжения на элементе, полученные при решении задачи статического деформирования.

Учитывая принятые статические, кинематические гипотезы и тип конечного элемента обшивки, выражение (2.14) для вычисления матрицы геометрической жесткости обшивки имеет вид:

$$G^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \left( G_s^{(e)} \sigma_s^{(e)} + G_t^{(e)} \sigma_t^{(e)} + (G_{st}^{(e)} + G_{ts}^{(e)}) \tau_{st}^{(e)} \right) dV^{(e)}. \quad (2.15)$$

Матрица геометрической жесткости балки, соответственно

$$G^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \left( G_s^{(e)} \sigma_s^{(e)} + (G_{st}^{(e)} + G_{ts}^{(e)}) \tau_{st}^{(e)} + (G_{sn}^{(e)} + G_{ns}^{(e)}) \tau_{sn}^{(e)} \right) dV^{(e)}. \quad (2.16)$$

Матрицы нелинейных деформаций на элементе рассчитываются путем дифференцирования базисных функций элемента:

$$G_s = \frac{\partial N^T}{\partial s} \frac{\partial N}{\partial s}, \quad G_t = \frac{\partial N^T}{\partial t} \frac{\partial N}{\partial t}, \quad G_{st} = \frac{\partial N^T}{\partial s} \frac{\partial N}{\partial t}, \quad G_{sn} = \frac{\partial N^T}{\partial s} \frac{\partial N}{\partial n}. \quad (2.17)$$

Суммируя по элементам, получим глобальные матрицы жесткости  $K$  и геометрической жесткости  $G$ . Условие стационарности функционала (2.13) для сетчатой оболочки в целом запишется в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$(K + G)\Delta^* = \tilde{P}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta^*$  – приращение узловых перемещений,  $\tilde{P}$  – приращения эквивалентных узловых сил.

Предполагая, что приращение внешней нагрузки на элементе изменяется пропорционально параметру  $\lambda$  и смежное состояние конструкции близко к исходному, приращения перемещений в узлах  $\delta^*$  элемента также будут изменяться пропорционально  $\lambda$ .

Тогда для определения  $\Delta^*$  имеем следующую систему:

$$(K + \lambda G)\Delta^* = \lambda P_0, \quad (2.19)$$

где  $P_0$  - внешние нагрузки при исходном состоянии.

Корректное решение (2.19) существует в случае, когда  $\det(K + \lambda G) \neq 0$ , иначе малое изменение приложенной внешней нагрузки к конструкции приведет к появлению бесконечно больших приращений перемещений, что соответствует потере устойчивости оболочки. Поэтому задача определения критических параметров устойчивости конструкции сводится к обобщенной проблеме на собственные числа пары глобальных матриц (жесткости и геометрической жесткости) [73, 92, 120]:

$$(K + \lambda G)\Delta^* = 0. \quad (2.20)$$

Для нахождения собственных значений и соответствующих им собственных векторов использовался метод итераций в подпространстве [74, 101], реализованный в ПП «Композит НК».

Сказанное выше позволяет рассматривать математическую модель статического деформирования силовой конструкции на уровне «черного ящика» [77], в которой внутреннее строение моделируемого объекта не раскрывается и фиксируются только реакция объекта на приложенные воздействия:

$$q = K(p)r. \quad (2.21)$$

Здесь  $q$  – вектор переменных состояния (перемещений, напряжений и деформаций);

$r$  – вектор переменных воздействий (приложенные силы);

$K$  – оператор модели, который отображает элементы пространства воздействий на элементы пространства состояний;

$p$  – вектор параметров модели, включающий «внутренние» характеристики моделируемого объекта (физико-механические константы материалов, геометрические размеры конструкции, размеры сечений конструктивных элементов и т.п.).

Модель (2.21) использовалась в работах [56, 57, 59, 60, 79, 127] для формальной постановки задачи рационального проектирования сетчатых анизотридных конструкций нерегулярной структуры, для формализации задач диагностики (задачи идентификации нагрузок сетчатой анизотридной конструкции, определения фактических структурных параметров).

Тем самым определены функциональные зависимости коэффициентов запаса анизотридной конструкции по прочности, жесткости и устойчивости по отношению к заданным воздействиям в основном расчётном случае.

Однако откликами в такой модели являются переменные состояния, имеющие различную физическую размерность (напряжения, перемещения и критические силы). Это не даёт возможности учитывать их единым образом в ограничениях, накладываемых при оптимизации. Далее в этой главе модель будет дополнена специальным преобразованием откликов.

## **2.2 Постановка задачи оптимального проектирования анизотридных конструкций**

На ранних стадиях проектирования проводится **оптимизация конструкции по массе**, которую можно сформулировать таким образом: найти значения структурных параметров  $p$ , обеспечивающих минимум массы конструкции при условии, что параметры состояния  $q$  удовлетворяют системе заданных ограничений. Применительно к сетчатым оболочкам рассматриваются ограничения по прочности, жесткости и устойчивости, а в отдельных случаях вводятся дополнительные условия.

Формально задача оптимизации конструкции по массе на основе модели (2.21) может быть поставлена в следующем виде.

**Известно:**

- начальные значения структурных параметров модели  $X_0 \in \rho$ ,
- вектор переменных воздействий  $r$ ,
- модель реакции конструкции на воздействия  $q = K(p)r$ .

**Требуется определить:**

структурные (проектные) параметры модели  $X \subseteq p$ , при которых выполняются ограничения на структурные параметры  $F(p) \geq 0$  и ограничения на отклики модели - переменные состояния:  $\Phi(q) \geq 0$ , обеспечивающие минимум целевой функции  $Z(p) \rightarrow \min$ . В качестве целевой функции  $Z(p)$  выбирается масса конструкции.

В качестве ограничения параметров состояния конструкции следует рассматривать и учитывать следующее.

1. Ограничения по прочности: во всех сечениях каждого ребра конструкции максимальные нормальные напряжения не превосходят предела прочности материала на растяжение (сжатие), а максимальные напряжения поперечного сдвига не превосходят предела прочности на сдвиг.

2. Ограничения по жесткости: линейные и угловые перемещения реперных точек конструкции не превосходят заданных пределов.

3. Ограничения по общей устойчивости: критическая нагрузка, приводящая к общей потере устойчивости, не меньше заданной нагрузки.

4. Ограничения по местной устойчивости: сжимающие силы в каждом отрезке ребра между точками пересечения с соседними ребрами меньше эйлеровой критической силы.

Входными данными оптимизационного расчета выступают значения фиксированных проектных параметров; пределы варьирования определяемых параметров, обусловленные возможностями производства; физико-механические параметры материалов. Значения напряжений, деформаций и перемещений, полученные для рассматриваемого варианта конструкции, являются откликами модели напряжённо-деформированного состояния.

Целевая функция и функции, входящие в ограничения, для сетчатой конструкции, не имеющей особенностей, могут быть заданы аналитическими выражениями. Однако отличительной особенностью современных анизотропных конструкций является нарушение регулярности реберной структуры, наличие вырезов и их усилений в виде окантовок. В этом случае получение аналитических выражений для функций ограничений и целевой функции не представляется целесообразным, однако их можно получить, используя аппроксимацию откликов при проведении вычислительного эксперимента с варьированием определяемых проектных параметров при заданных геометрических и физических характеристиках модели [54, 68, 115, 121].

Для применения математических методов и разработки алгоритмов решения необходимо представить приведенную выше задачу оптимизации силовой конструкции по массе в формализованном виде.

В области допустимых решений  $\Omega$ , принадлежащей  $n$ -мерному пространству варьируемых проектных параметров  $x_i$ , требуется найти точку  $x$  с координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в которой функция массы  $n$  переменных принимает минимальное значение:

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min_{\Omega \in R^n}, \quad (2.22)$$

где  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – целевая функция,

$x_i$  – варьируемые проектные параметры конструкции,

$\Omega$  – область допустимых решений, определяемая системой из  $N$  ограничений-неравенств структурных параметров и параметров состояния конструкции,

$$\Omega: \begin{cases} \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \omega_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ \omega_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0, \\ \dots \\ x_n > 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Область допустимых решений (2.23) для задачи оптимального проектирования сетчатых анизотропных конструкций, с учетом безразмерности функций ограничений будет иметь вид:

$$\Omega: \begin{cases} \frac{\sigma_{кр} - \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sigma_{кр}} \geq 0, \\ \frac{u_{кр} - u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{u_{кр}} \geq 0, \\ 1 - \lambda_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_j > 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

где  $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – напряжения в  $i$  конечном элементе,

$\sigma_{кр}$  –прочность материала,

$u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  –перемещения в  $i$  конечном элементе,

$u_{кр}$  –жесткость конструкции,

$\lambda_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  –собственные числа.

В дальнейшем для краткости не будем выписывать скалярные аргументы функций, входящих в (2.22) - (2.24), а будем считать их функциями точки  $x$  в пространстве  $R^n: z(x) \equiv z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Таким образом, поставлена задача оптимизации сетчатой конструкции по массе и показано, что при полном дискретном моделировании число учитываемых ограничений в несколько раз превышает число конечных элементов дискретной модели. Это требует усовершенствования численного метода оптимизации.

### 2.3 Геометрическая структура области факторного пространства, определяемой ограничениями по прочности, жесткости и устойчивости

Далее будем считать, что определяемые факторы варьируются независимо, и их можно считать независимыми координатами точки в факторном пространстве. Для удобства примем, что факторное пространство евклидово, и в нем обычным образом определена норма:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (2.25)$$

Эта норма определяет «расстояние» между двумя вариантами конструкции с различными сочетаниями варьируемых факторов:

$$\|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}. \quad (2.26)$$

является мерой различия между вариантами конструкций с наборами параметров  $x$  и  $y$ .

Далее введём меру выполнения выбранного ограничения из системы ограничений (2.23). Функция  $\omega(x)$  положительна внутри допустимой области, когда ограничение выполняется со строгим неравенством, и равна нулю на границе допустимой области. Тогда мерой выполнения ограничения естественно считать расстояние от точки факторного пространства  $x$  до ближайшей точки границы допустимой области. Расстояние имеет знак «плюс», если ограничение выполняется, и знак «минус», если ограничение не выполняется. Тогда в качестве критерия принадлежности точки факторного пространства к допустимой области можно использовать критерий неотрицательности расстояния от точки до всех границ.

Областью Дирихле некоторой базисной точки пространства  $M_i$  называют область точек, расстояния до которых от базисной точки  $M_i$  меньше, чем от других базисных точек пространства. В случае, когда в пространстве дано две базисных точки, областями Дирихле является полуплоскости. Построение области Дирихле  $M$  при большом числе

базисных точек происходит как пересечение полуплоскостей, определяемых для пары точек  $M$  и  $M_i$ .

Поверхность Дирихле (рисунок 2.6) является геометрическим местом точек, в которых два или более предикатов равны между собой. В зависимости от числа учитываемых предикатов могут быть поверхности размерности  $N-1$  (два предиката),  $N-2$  (три предиката) и т.д., вплоть до линии Дирихле ( $N-1$  линейно независимых предикатов).

Будем временно считать, что все предикаты линейно зависят от координат (в действительности достаточно, чтобы существовало гладкое отображение, приводящее предикаты к линейным функциям). Это позволяет считать, что поиск проводится в многограннике, а поверхности Дирихле являются гиперплоскостями.

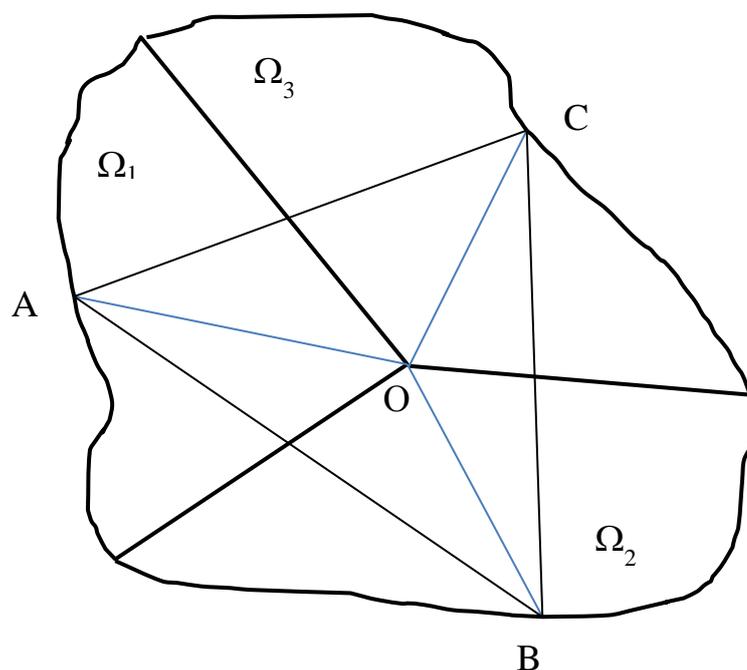


Рисунок 2.6 – Поверхности Дирихле для граней (трехмерный случай)

Одним из наиболее быстрых методов отыскания минимума нелинейной функции является метод деформируемого многогранника [112]. В основе метода лежит идея симплексного поиска, суть которого состоит в

последовательном отражении вершины топологического симплекса с «наихудшем» значением целевой функции относительно центра противоположной грани. Данный метод хорошо зарекомендовал себя в задачах нелинейного программирования без ограничений.

Безградиентные методы оптимизации состоят в последовательном выборе в пространстве  $R^n$  локальной «пробной» подобласти  $S$ , имеющей набор характерных точек, вычислении целевой функции  $z$  и ограничивающих функций  $\omega$ , анализе значений этих функций и изменении  $S$ , приводящем к приближению к искомому решению. В частности, если в качестве  $S$  используется выпуклый многогранник, имеющий  $n+1$  вершину, получаем различные варианты симплексного поиска. Обозначим характерный размер пробной области через  $h$ , а именно – потребуем, чтобы расстояние между любыми двумя точками области  $S$  не превышало  $h$ . Представляется естественным, что конечная неопределенность в определении положения минимума (погрешность решения) сопоставима с величиной  $h$ . Наилучшей пробной областью будет та, которая, во-первых, не содержит точек, удаленных от границы  $\partial\Omega$  области допустимых решений  $\Omega$  более чем на  $h/2$ , и во-вторых – максимальное значение целевой функции в характерных точках этой области не превышает значения целевой функции в соответствующих точках любой другой области  $S$  того же размера. Тогда задача (2.22) - (2.23) может быть сформулирована в более слабой постановке. Введем в рассмотрение множество  $h$ -симплексов, т.е. наборов точек  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n+1}\}$ ,  $s_k \in R^n$ , таких, что

$$\max_{i, j \in \{1, n+1\}} \|s_i - s_j\| \leq h, \quad (2.27)$$

(здесь и всюду далее используется евклидова норма), и обозначим это множество через  $\Sigma_h$ . Множество  $h$ -симплексов, дополнительно удовлетворяющее условию:

$$\max_k \left( \min_{x \in \partial\Omega} \|s_k - x\| \right) \leq \frac{h}{2} + \varepsilon, \quad (2.28)$$

где  $x$  – произвольная точка на границе области  $\Omega$ ,

$\varepsilon \ll h$  - малая положительная величина,

назовем множеством граничных  $h$ -симплексов. Тогда приближенное решение задачи оптимизации (2.22) - (2.23) определим как граничный  $h$ -симплекс

$S^* = \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n+1}^*\}$ , отвечающий условию:

$$\max_k z(s_k^*) \leq \max_k z(s_k) \quad (2.29)$$

для любого другого  $h$ -симплекса  $S$ .

Вычисления, связанные с поиском граничного  $h$ -симплекса безградиентными методами, не требуют дифференцирования целевой функции и ограничивающих функций. Однако при построении алгоритма поиска для выяснения его свойств и доказательства условий сходимости необходимо наложить на функции, входящие в формулировку задачи (2.22) - (2.23), некоторые дополнительные условия гладкости, которые в задачах оптимизации многоэлементных конструкций обычно выполняются.

Удобно изменить масштаб координат так, чтобы размер симплекса  $h$  был равен единице, и в дальнейшем рассматривать симплексы из множества  $\Sigma_1$  (если не оговорено другое).

Пусть целевая функция  $z$  непрерывна вместе с производными по координатам и в любой области пространства параметров, имеющей диаметр порядка нескольких единиц, может быть приближена линейной функцией координат с достаточно малой погрешностью. Это позволяет при анализе нескольких последовательных шагов алгоритма не учитывать изменение градиента целевой функции. Оправданность такого допущения основана на том, что масса сетчатой конструкции выражается через варьируемые параметры (размеры сечений ребер, угол наклона спиральных ребер к образующей) в виде аналитических функций, градиент которых изменяется достаточно медленно.

Далее, потребуем, чтобы ограничивающие функции в неравенствах (2.23) были непрерывны вместе с производными по координатам до второго

порядка включительно, причем в пределах пробного симплекса, имеющего единичный диаметр, градиент каждой из этих функций изменялся достаточно мало.

Следствием этого условия является то, что каждое из неравенств (2.23) определяет в  $R^n$  область  $\Omega_i$  с гладкой границей  $\partial\Omega_i$ , на которой функция  $\omega_i(x)$  равна нулю. В дальнейшем будем предполагать, что с удалением от границы  $\partial\Omega_i$  функция  $\omega_i(x)$  монотонно возрастает, по крайней мере, в области поиска решения.

Проблема применения метода симплексного поиска к задачам с ограничениями в первую очередь связана с тем, что граница области поиска решений является кусочно-гладкой. Так, если на некоторой итерации все узлы топологического симплекса лежат на границе области допустимых решений, нет возможности определить, какому гладкому участку границы они принадлежат.

В качестве решения данной проблемы предлагается заменить кусочно-гладкую границу области допустимых решений задачи (2.22)-(2.23) на гладкую аппроксимацию границы. Для этого используя аппарат R-функций [76, 106-109], заменим множество функций кусочно-гладкой границы на один гладкий R-предикат.

Таким образом, область допустимых решений, определяемая системой неравенств (2.23), является подобластью пространства  $R^n$  с кусочно-гладкой границей. В случае линейных ограничений она представляет собой выпуклый многогранник (не обязательно конечный). В общем случае, когда ограничивающие функции нелинейны, область допустимых решений может быть аппроксимирована выпуклым многогранником, все вершины которого лежат на границе  $\partial\Omega$ .

Тем самым в допустимой области факторного пространства введена система линий и поверхностей Дирихле, а также поверхностей уровня R-предикатов. Эти геометрические объекты будут в дальнейшем

использоваться для выбора рациональных направлений поиска экстремума целевой функции с учётом ограничений.

## 2.4 Выводы по главе

1. Сформулирована постановка задачи оптимизации силовой анизотридной конструкции по массе в формализованном виде. Граница области допустимых решений определяется из ограничений на структурные параметры и параметры состояния конструкции с учетом их обезразмеривания.

2. Приведены: структура дискретных моделей анизотридных конструкций и схемы приложения осевой нагрузки; модель совместного деформирования обшивки и реберной структуры анизотридной конструкции; известные вариационные постановки задач статики и устойчивости силовых конструкций, этапы решения задач методом конечных элементов.

3. Показано, что при полном дискретном моделировании силовых сетчатых анизотридных конструкций число учитываемых ограничений в задаче оптимизации по массе в несколько раз превышает число конечных элементов дискретной модели.

4. Для решения поставленной задачи оптимизации предложено использовать метод симплексного поиска, кусочно-гладкую границу области допустимых решений предлагается заменить на один гладкий  $R$ -предикат. Для определения гладкой аппроксимации использовать аппарат  $R$ -функций.

### 3 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Поставленная в главе 2 задача оптимизации сетчатых конструкций сводится к отысканию точки экстремума в факторном пространстве большой размерности при большом количестве ограничений (порядка десятков тысяч), каждому из которых соответствует гладкий участок кусочно-гладкой границы допустимой области. Для уменьшения времени поиска необходимо построить алгоритм, учитывающий геометрическую структуру допустимой области для рационального выбора направления поиска. На основе теории R-функций задача на области с кусочно-гладкой границей, имеющей большое число участков, приводится к задаче с меньшим числом ограничений.

#### 3.1 Применение R-предикатов для отыскания условного экстремума целевой функции на границе

Используем предикатное описание области допустимых решений [106-109]. Каждое из неравенств (2.23) является двузначным булевым предикатом области  $\Omega_i$ , принимающим в произвольной точке  $x \in R^n$  значение «истина», если эта точка принадлежит области  $\Omega_i$  или лежит на её границе, и значение «ложь» - если точка не принадлежит данной области. Тогда булев предикат области  $\Omega$ , определяемой системой неравенств (2.23), можно записать в виде конъюнкции булевых предикатов областей  $\Omega_i$ .

Используя методы теории R-функций [106-109], построим числовой R-предикат области допустимых решений. С этой целью используем один из видов операции R-конъюнкции:

$$a \wedge_{\alpha} b \equiv R_{\alpha}(a, b) = \frac{1}{1+\alpha} \left( a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - 2\alpha ab} \right), \quad (3.1)$$

где параметр  $\alpha$  может принимать значения из интервала  $-1 < \alpha \leq 1$ , которая обладает следующими алгебро-логическими свойствами:

- 1)  $a \wedge_{\alpha} b > 0$ , если и только если оба операнда положительны;
- 2)  $a \wedge_{\alpha} b < 0$ , если и только если хотя бы один операнд отрицателен;
- 3)  $a \wedge_{\alpha} b = 0$ , если и только если один операнд равен нулю, а другой – положителен или равен нулю.

Следует отметить также, что  $R_{\alpha}$ -конъюнкция (3.1) ассоциативна только при  $\alpha=1$ .

Таким образом, R-конъюнкция частных предикатов  $\omega_i(x)$

$$\omega(x) = \omega_1(x) \wedge_{\alpha} \omega_2(x) \wedge_{\alpha} \omega_3(x) \dots \quad (3.2)$$

является R-предикатом области  $\Omega$ , принимая положительные значения внутри этой области, нулевые – на её границе и отрицательные в точках, внешних по отношению к  $\Omega$ .

Кроме того,  $R_{\alpha}$ -конъюнкция обладает следующими дифференциальными свойствами [109]:

- 4)  $R_{\alpha}$ -конъюнкция (3.1) непрерывно дифференцируема по координатам при любых значениях  $\alpha$ , кроме единицы;
- 5)  $R_1$ -конъюнкция (при  $\alpha=1$ ) непрерывно дифференцируема по координатам всюду, за исключением точек  $a=b$ ;
- 6) градиент  $R_{\alpha}$ -конъюнкции двух функций  $\omega_1(x) \wedge_{\alpha} \omega_2(x)$  на любом участке границы направлен по нормали к границе;
- 7) производная  $R_{\alpha}$ -конъюнкции двух функций  $\omega_1(x) \wedge_{\alpha} \omega_2(x)$  по нормали к границе на участке, на котором одна из этих функций (например,  $\omega_1(x)$ ) обращается в нуль, а вторая положительна, равна производной  $\omega_1(x)$ ;
- 8) если каждая из функций нормализована (её нормальная производная равна единице на том участке границы, на котором эта функция обращается в нуль), то  $R_{\alpha}$ -конъюнкция сохраняет нормализацию.

Итак, выражение вида (3.2) является R-предикатом области допустимых решений. Если каждая из функций  $\omega_i(x)$  нормализована каким-либо способом, которые будут рассмотрены ниже, то R-предикат (3.2) также нормализован, т.е. на границе области  $\Omega$  его градиент направлен вдоль внутренней нормали к границе, а нормальная производная равна единице.

### *Вспомогательная целевая функция*

Аппарат R-функций, описанный кратко выше, позволяет построить вспомогательную целевую функцию, обладающую следующими свойствами:

- 1) внутри области допустимых решений на достаточном удалении от границы «исправленная» целевая функция мало отличается от исходной;
- 2) на границе области допустимых решений значения исправленной целевой функции равны значениям исходной целевой функции, а производная по нормали равна нулю (градиент исправленной целевой функции на границе равен проекции градиента исходной функции на плоскость размерности  $n-1$ , касательную к границе);
- 3) вблизи границы градиент исправленной целевой функции имеет нормальную компоненту, направленную к границе.

Можно предположить, что при выполнении обычных условий гладкости исправленной целевой функции её минимум совпадает с искомым решением задачи (2.13) – (2.14). Более подробно это будет показано далее.

Наиболее просто выполнить второе из указанных условий. Для этого достаточно выбрать функцию из пучка  $\varphi(x)$ , удовлетворяющего на границе области  $\Omega$  одновременно двум граничным условиям – Дирихле и Неймана:

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} = z(x), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\nu$  - внутренняя нормаль. Такой пучок имеет вид:

$$\varphi(x) = z(x) - \omega(x) \cdot (\nabla z, \nabla \omega) + \Phi(x) \cdot \omega^2(x). \quad (3.5)$$

Здесь скобками обозначено скалярное произведение,

$z(x)$  – исходная целевая функция (2.2),

$\omega(x)$  – нормализованный R-предикат области  $\Omega$ ,

$\Phi(x)$  – неопределенная компонента пучка.

Поведение функции из пучка (3.5) на удалении от границы зависит от выбора неопределенной компоненты. За счет этого в дальнейшем будут выполнены свойства 1 и 3, но эта задача достаточно сложна и будет описана в следующих разделах.

Предикатное описание позволяет, исходя из значений частных R-предикатов и их градиентов, классифицировать ограничения по степени их выполнения на определенном шаге поиска. Так, пусть мы имеем некоторый пробный симплекс  $S$ , и в его вершинах вычислены значения целевой функции  $z$  и всех частных предикатов  $\omega_i(x)$ . Исходя из требований к гладкости, это дает возможность получить приближенную оценку их градиентов. Тогда:

а) ограничение несущественно на данном шаге поиска, если соответствующий частный предикат возрастает в направлении антиградиента целевой функции, т.е. скалярное произведение градиента частного предиката и целевой функции положительно;

б) ограничение неактивно, если соответствующий предикат больше некоторой пороговой величины (т.е. симплекс находится достаточно далеко от соответствующего участка границы);

в) ограничение не выполнено, если соответствующий ему частный предикат отрицателен.

Под «доминантой» границей будем понимать ограничения определяющиеся следующим образом: каждому узлу соответствует ограничение, которое имеет минимальное значение нормализованного предиката в данном узле – ближайшее к узлу ограничение. При этом если для данного узла не был установлен предикат на предыдущем шаге, то найденное

ограничение записывается в качестве «доминанты». В ином случае между текущим значением ограничения и найденным значением выбирается то, которое имеет наименьшее значение нормализованного предиката.

При использовании безградиентного метода оптимизации точное вычисление градиентов целевой функции и R-предиката допустимой области невозможно, поэтому для их оценки необходимо использовать приближенные численные методы. Наиболее просто оценивать градиенты функций, если известны их значения в узлах пробного симплекса, путем дифференцирования интерполяционных выражений.

В случае интерполяции по топологическому симплексу, имеющему  $n+1$  узел, базисные функции линейно зависят от координат. Представим интерполянт предиката  $\omega(x)$  в виде [109]:

$$\omega^h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_v(x) \cdot \omega_v, \quad (3.6)$$

где  $\omega_v$  - значение предиката в узле симплекса с номером  $v$ ,

$L_v(x)$  - линейная функция координат, равная единице в узле  $v$  и нулю – в остальных узлах (безразмерная L-координата точки):

$$L_v(x) = a_v + b_v x_1 + c_v x_2 + \dots + d_v x_n, \quad (3.7)$$

$a_v, b_v, c_v, \dots, d_v$  - постоянные коэффициенты, полностью определяемые координатами узлов симплекса.

Дифференцируя (3.6) по координатам, получим аппроксимацию градиента:

$$\nabla^h \omega(x) = \nabla \omega^h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \nabla L_v(x) \cdot \omega_v. \quad (3.8)$$

В случае гладкого предиката погрешность оценки градиента в центре тяжести симплекса имеет первый порядок малости относительно диаметра симплекса [109]:

$$\left\| \nabla^h \omega(x) - \nabla \omega(x) \right\| = o(h). \quad (3.9)$$

Однако для построения алгоритма оптимизации представляется целесообразным использовать предикаты, построенные с помощью  $R_1$ -конъюнкции. Это позволяет наилучшим образом оценивать расстояние от границы области допустимых решений по величине самого предиката. В идеале в качестве предиката может использоваться нормальная функция, значение которой в каждой внутренней точке области допустимых решений равно расстоянию от точки до ближайшей границы [106-109]. Такой предикат является гладким только в пределах области Дирихле, а на границах раздела областей Дирихле производные предиката по координатам имеют конечный разрыв. В связи с этим, оценка (3.9) становится неприменима, если симплекс попадает на границу раздела. Теоретически возможен случай, когда одна грань симплекса находится в одной области Дирихле и расположена параллельно поверхности раздела, а противоположная вершина находится в смежной области Дирихле на таком же расстоянии от границы. Тогда значения нормальной функции во всех узлах симплекса одинаковы, и формула (3.8) дает нулевой градиент (поскольку сумма  $L$ -координат тождественно равна единице, её градиент равен нулю).

Приближенная оценка градиента негладкого предиката обладает следующим свойством:

а) внутри области Дирихле справедлива оценка (3.9), т.е. формула (3.8) дает достаточно хорошее приближение для градиента;

б) на границе раздела областей Дирихле формула (3.8) дает заниженную величину градиента, вплоть до нуля, причем погрешность зависит от случайного фактора – расположения симплекса относительно границы раздела.

Заметим, что этот результат применим к границе раздела любого числа областей Дирихле; для случая двух областей граница имеет размерность  $n-1$ , для трех – пересечение двух границ размерности  $n-1$  каждая имеет размерность  $n-2$  и т.д., вплоть до размерности 1 в случае попадания

симплекса одновременно в  $n$  различных областях Дирихле и точки (размерность нуль) – если все узлы симплекса находятся в различных областях Дирихле.

*Критерий попадания на границу области Дирихле*

Полученный результат позволяет сформулировать достаточный критерий попадания симплекса на границу области Дирихле. Для этого будем считать, что частные предикаты нормализованы в соответствии с формулой:

$$\varpi_k^h(x) = \frac{\omega_k^h(x)}{\sqrt{a^2 \cdot (\omega_k^h)^2 + (\nabla \omega_k^h)^2}}. \quad (3.10)$$

Параметр  $a$  целесообразно связать с характерным размером симплекса. Воспользуемся ранее полученным результатом: отличие производной нормализованного предиката от единицы не превышает  $\varepsilon$  вплоть до расстояния от границы  $n_1 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}}$ . Потребуем, чтобы для заданного  $\varepsilon$  это расстояние составляло  $L$  размеров симплекса, т.е.  $n_1 = Lh$ . Тогда

$$a = \frac{1}{Lh} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}}. \quad (3.11)$$

Значение нормализованного предиката (1) при  $n_1 = Lh$  равно

$$\varpi_k^h(x) = \frac{\omega_k^h(x) \cdot Lh}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3} \cdot (\omega_k^h)^2 + (Lh \cdot \nabla \omega_k^h)^2}}. \quad (3.12)$$

Примем, что градиент исходного предиката в данной полосе можно считать постоянным, так что  $\omega_k^h(Lh) \approx Lh \cdot \nabla \omega_k^h$ . Тогда из (3.12) имеем:

$$\varpi_k^h(x) = \frac{Lh}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3} + 1}} \approx Lh \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right). \quad (3.13)$$

Таким образом, если нормализованный предикат становится меньше характерного размера  $n_1 = Lh$ , норма его градиента не должна отличаться от

единицы более чем на заданное  $\varepsilon$ . Если же норма градиента меньше, чем  $1-\varepsilon$ , это является признаком влияния соседних областей Дирихле.

Проведенный анализ существенно использует линейность исходного предиката. Однако если исходный предикат имеет ненулевую вторую производную по нормали к своей поверхности уровня, поведение нормированного предиката существенно изменяется. Так, если исходный предикат является выпуклым, то нормированный оказывается вогнутым, и норма его градиента, хотя и равна единице на границе, растет вдоль внутренней нормали. Это нарушает справедливость оценок, связанных с нормализацией в  $Lh$  – полосе.

На рисунке 3.1 приведены графики нормированного предиката при различных значениях параметра нормализации для исходного предиката  $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 3^2}{(x+1)^2}$  в виде выпуклой дробно-рациональной функции. Границе соответствует значение  $x=2$ .

Как видно из графиков, нормальная производная становится отрицательной за пределами области допустимых решений; на границе (при  $x=2$ ) она равна единице; с удалением от границы она увеличивается, а затем падает, асимптотически приближаясь к нулю. При вогнутости исходного предиката нормированный, напротив, оказывается выпуклым.

Таки образом показано, что использование для описания участков границ нормированных  $R$ -предикатов, позволяет получить гладкую, выпуклую область ограничений. Это позволяет при замене целевой функции на вспомогательную, учитывающую «доминантные» границы области, использовать безградиентный метод оптимизации (симплексный метод).

### 3.2 Модель упругого симплекса

При большом числе ограничений могут возникать недостижимые ограничения, частный предикат которых при движении вдоль антиградиента целевой функции обращается в нуль позже, чем другие частные предикаты.

Кроме того, при оптимизации многоэлементных конструкций существует проблема двойникования границ, когда два различных ограничения выполняются на одном и том же участке границы.

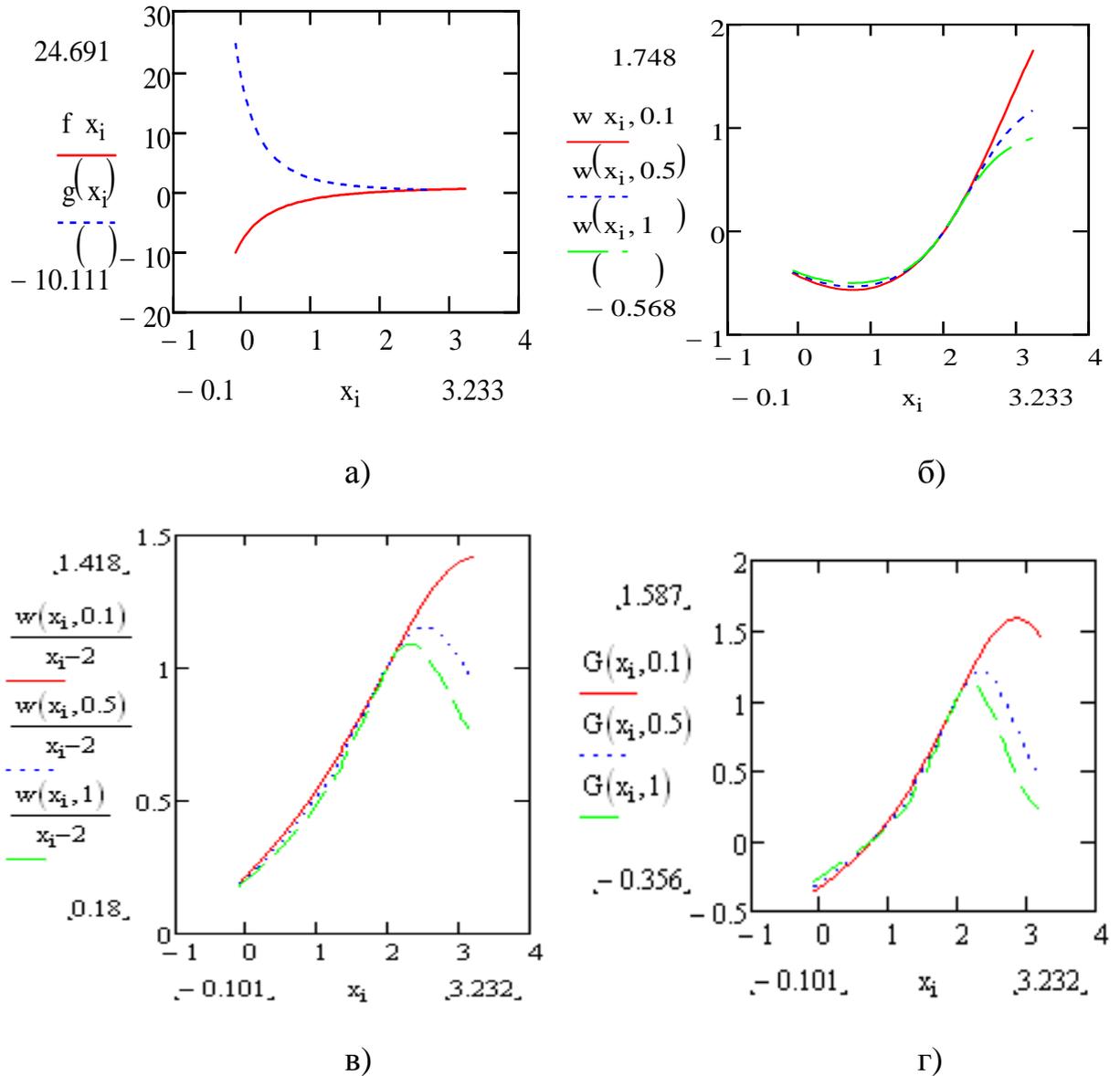


Рисунок 3.1 – Графики нормализованного предиката: а – исходный предикат и его производная, б – нормализованный предикат при  $a=0,1, 0,5$  и  $1,0$ ; в – отношение величины нормализованного предиката к расстоянию до границы; г – нормальная производная нормализованного предиката при тех же значениях параметра

Реализация алгоритма симплексного поиска с использованием в качестве целевой функции пучок функции (3.5), встретила сложности, обусловленные закливанием вблизи острых углов области поиска и «кратных» границ, определяемых линейно зависимыми ограничениями. Для решения этой проблемы алгоритм был модифицирован следующим образом.

Каждая доминанта заменялась упругой связью, которая действует на перемещаемый симплекс аналогично пружине, нормальной к поверхности  $\omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  (рисунок 3.2-а), а направление перемещения симплекса корректируется с учетом суммы реакций этих упругих связей (рисунок 3.2-б):

$$\nabla z' = u. \quad (3.14)$$

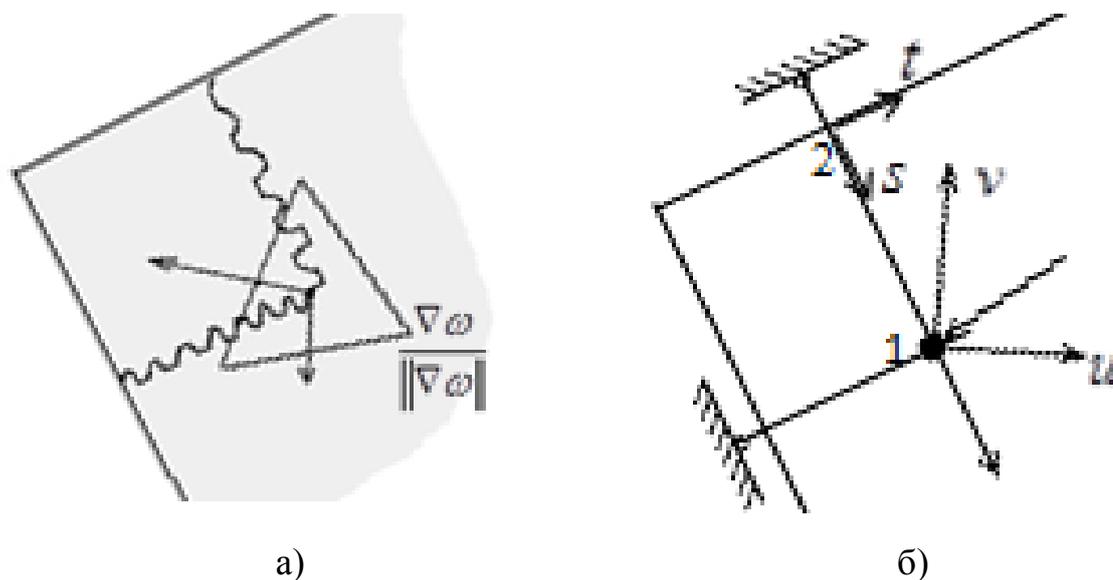


Рисунок 3.2 – Вычисление измененной целевой функции

Для расчета реакции упругих связей (3.14) решается двухэтапная задача:

$$\begin{aligned} Ku' &= -\nabla z \\ K^* u &= -\nabla z' \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $u$  - реакция упругих связей,  $\nabla z$  - градиент целевой функции,  $K = \sum_i K_i$ ,

$K^* = \sum_i K_i^*$  - глобальная матрица коэффициентов, вычисляемые как сумма

локальных матриц. Реакцию упругой связи одной пружины можно представить в виде вектора:

$$\delta' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где  $u_1'$ ,  $u_2'$  - перемещения соответствующих «узлов» «пружины». Вектор  $\delta'$  - является вектором перемещений в глобальном базисе, а в базисе пружины вектор перемещений

$$\delta = \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где базис пружины имеет вид:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_1^{(d)} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

На рисунке 3.3 представлено разложение вектора перемещений упругой связи в глобальном базисе и базисе пружины.

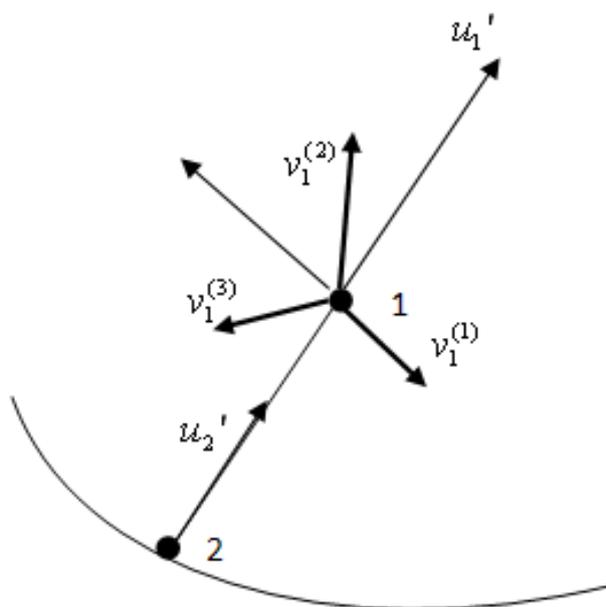


Рисунок 3.3 – Вектор перемещений

Расчет локальной матрицы коэффициентов  $K$  уравнения (3.15) одной упругой связи производится следующим образом:

$$K_i = P^T K' P, \quad (3.19)$$

где  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, K' = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$

$l = \|\omega\|$  – расстояние до границы,

$E$  – модуль упругости,

$F$  – приложенная сила, значения  $E$  и  $F$  могут быть приняты за 1.

Компоненты матрицы  $P$  уравнения (3.19) рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 &= [\cos(u', v^{(1)}) \quad \cos(u', v^{(2)}) \quad \dots], \\ P_2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $\cos(u', v^{(i)}) = \left[ \frac{\nabla \omega}{\|\nabla \omega\|} \right]_i$ .

Тогда, подставив (3.20) в формулу (3.19) получим:

$$K_i = P^T K' A = \begin{bmatrix} P_1^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T P_1 & -P_1^T \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = P_1^T P_1 \frac{EF}{l}. \quad (3.21)$$

Для второй итерации расчета упругих связей коэффициент рассчитывается с использованием полученных реакций:

$$K_i^{*'} = \frac{N_i}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где  $N_i = [1 \quad -1] P \cdot u'$ .

Таким образом, по мере убывания вспомогательной целевой функции симплекс движется на приблизительно равном расстоянии от доминант, вдоль линии Дирихле области поиска, и приходит в искомую точку по кратчайшему пути.

Для завершения поискового процесса требуется найти такую точку, в которой значения всех доминант обращаются в нуль. С учетом кратности границ, это требование ослабляется до поиска точки, в которой сумма квадратов доминант минимальна. Интерполируя по симплексу значение доминантного предиката в узле, найдем:

$$\Omega_i(L_1, \dots, L_D) = \sum_n N_n(L_1, \dots) \omega_i^n = \sum_{j=1}^D L_j \omega_i^j + L_{D+1} \omega_i^{D+1} = \sum_{j=1}^D L_j (\omega_i^j - \omega_i^{D+1}) + \omega_i^{D+1}, \quad (3.23)$$

где  $\Omega_i = \begin{cases} \omega_i^1 \\ \omega_i^2 \\ \dots \\ \omega_i^{D+1} \end{cases}$  – значение  $i$ -го предиката в узлах,

$L_j$  – L-координаты,

$N_n$  – интерполяционные коэффициенты.

Тогда для всех доминант интерполяционное выражение примет вид:

$$\omega(L) = \begin{bmatrix} \omega_1(L) \\ \dots \\ \omega_K(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 - \omega_1^{D+1} & \omega_1^2 - \omega_1^{D+1} & \dots & \omega_1^D - \omega_1^{D+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \omega_K^D - \omega_K^{D+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^{D+1} \\ \dots \\ \omega_K^{D+1} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

где  $K$  – количество доминант.

Таким образом, вектор значений доминант выражен через  $D$  линейно независимых L-координат. Введем обозначение:

$$\omega(L) = \Delta \cdot L + \omega^{D+1}. \quad (3.25)$$

Таким образом

$$\Sigma \omega_i^2 = \omega(L)^T \cdot \omega(L) = L^T \Delta^T \Delta L + \omega^{D+1T} \cdot \omega^{D+1} + 2L^T \Delta^T \omega^{D+1}. \quad (3.26)$$

Варьируя  $L$ , из условия минимума получим СЛАУ:

$$\Delta^T \Delta L = -\Delta^T \omega^{D+1}. \quad (3.27)$$

Решение (3.27) является вектором значений L-координат в искомой точке. Вычислив  $L_{D+1} = 1 - \sum_{i=1}^D L_i$ , найдем координаты искомой точки:

$$r = \sum_{i=1}^{D+1} L_i \cdot r_i, \quad (3.28)$$

где  $r_i$  – координаты  $i$ -го узла симплекса.

Приведенные рассуждения относятся к случаю, когда начальная точка находится внутри допустимой области. В общем же случае при произвольной начальной точке алгоритм включает следующие шаги.

**Шаг 1.** Задаются проектные параметры  $x$ -конструкции, определяющие  $n$ -мерное пространство переменных задачи оптимизации.

**Шаг 2.** Задается система ограничений-неравенств, определяющих область допустимых решений.

**Шаг 3.** Задаем точку  $X_0 \in R_n$ , которая определяет симплекс  $\Delta^0$  (многогранник n-мерного пространства) на нулевом шаге.

**Шаг 4.** В каждом узле симплекса вычисляется сумма его координат, умноженных на коэффициент  $R = -\sum \omega_i \bar{\omega}_i$ , где  $\omega_i$  - нормализованный предикат доминантного ограничения,  $\bar{\omega}_i$  - его среднее арифметическое значение. Когда все функции из (2.3) положительны во всех вершинах симплекса, начальное приближение симплекса считается найденным.

**Шаг 5.** Далее выполняется поиск в области допустимых решений при фиксированном размере симплекса. Поиск продолжается пока все доминанты не уменьшатся до заданного порогового значения.

На следующем этапе производится перестроение симплекса с уменьшением размера в два раза, и весь процесс поиска повторяется. Поиск завершается, когда размеры симплекса становятся меньше заданного значения погрешности  $\varepsilon$ . Окончательным решением является точка, в которой значение всех доминант обращается в нуль, т.е. находится точка минимума суммы квадратов доминант

Общая схема алгоритма изображена на рисунке 3.4.

Для учета большего количества ограничений в качестве функций ограничений симплексного алгоритма можно использовать аппроксимационные зависимости, полученные в ходе вычислительного эксперимента. Для обеспечения физического смысла задачи некоторые функции ограничений могут быть представлены в виде обратных зависимостей от параметров оптимизации, являющихся геометрическими размерами элементов конструкции. Проведение полнофакторного вычислительного эксперимента в многомерном пространстве варьируемых параметров является достаточно трудозатратным. При отсутствии взаимного

влияния факторов можно провести дробнофакторный вычислительный эксперимент, уменьшив тем самым количество численных расчетов.



Рисунок 3.4 – Общая схема алгоритма оптимизации

### 3.3 Тестирование алгоритма оптимизации на контрольных примерах

Для проверки работоспособности алгоритма рассмотрим его применение на тестовых задачах, имеющих точное аналитическое решение.

В первом примере рассматривается задача, в которой линейные функции ограничений образуют острый угол. Второй тестовый пример имеет локальные точки минимума при линейных ограничениях. В третьем, четвертом и пятом примерах рассматриваются нелинейные функции ограничений. Кроме того рассмотрена задача определения оптимальных параметров поперечного сечения консольной балки при фиксированном и переменном значении высоты сечения.

*Линейные ограничения, образующие острый угол*

Рассмотрим ограничения и целевую функцию, имеющую следующий линейный вид:

$$\begin{aligned} z(x_1, \dots, x_n) &= \sum C_i x_i, \\ \sum C_{ij} x_i &> C_0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Функции ограничений вида (1) могут образовывать острый угол:

$$\begin{cases} z(x, y) = 20x, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y < 4, \\ 6x + 30y > 180. \end{cases} \quad (3.30)$$

Для формирования начального положения симплекса выбрана координата центра (25;0) и размер симплекса равный 2. На рисунке 3.5–б изображен первоначальный симплекс и траектория к начальной точке алгоритма имеющей центр в точке с координатой (24,9993; 3). На данном этапе доминантным является ограничение  $6x + 30y > 180$ .

После первого цикла поиска доминантными являются ограничения  $y < 4$  и  $6x + 30y > 180$ . На следующем шаге с уменьшением симплекса доминантными остаются те же ограничения. На рисунке 3.5 – в показана траектория двух циклов поиск по Дирихле с уменьшением шага вдвое.

При достижении размера симплекса значения меньше  $\varepsilon = 10^3$  центр симплекса (рисунок 3.5–г) находится в точке с координатами (9,972; 4,0057). После уточнения значения симплекса, итоговый результат соответствует значениям  $x = 9,979$  и  $y = 4,004$ . Из рисунка 3.5–а видно, что минимум целевой

функции в области ограничения соответствует данному значению с учетом погрешности.

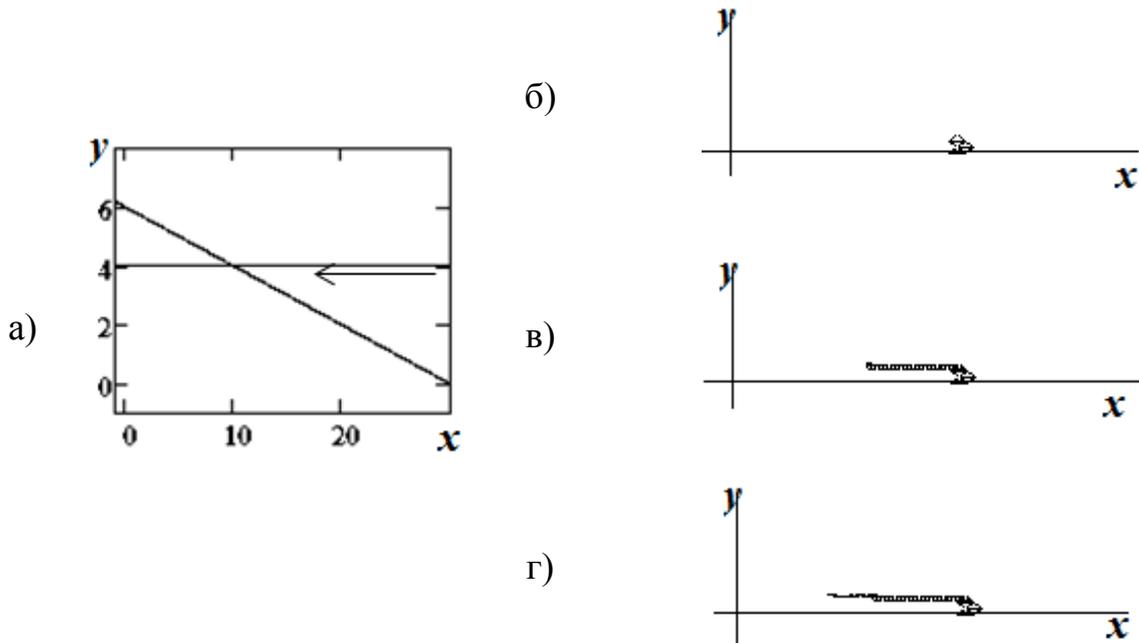


Рисунок 3.5 – Область определения, образованная линейными ограничениями (а) и траектория движения симплекса на шаге поиска начального приближения (б), в ходе шагов алгоритма упругого симплекса (в) и по окончании работы алгоритма (г)

*Линейные ограничения, образующие несколько угловых точек*

Ограничения могут образовывать границу, имеющую несколько углов, только один из которых является глобальным минимумом задачи (рисунок 3.6):

$$\begin{cases} z(x, y) = -10y, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ -x + 2y < 20, \\ 2x + 3y > 20, \\ x + 6y < 90, \\ 3x + y < 75, \\ -x + 2y > -20. \end{cases} \quad (3.31)$$

На рисунке 3.6 б показана траектория движения симплекса из точки (1;1), а на рисунке 3.6 в – из точки (10;20). В обоих случаях, алгоритм достигает точки минимума, с координатами (7,5;13,75).

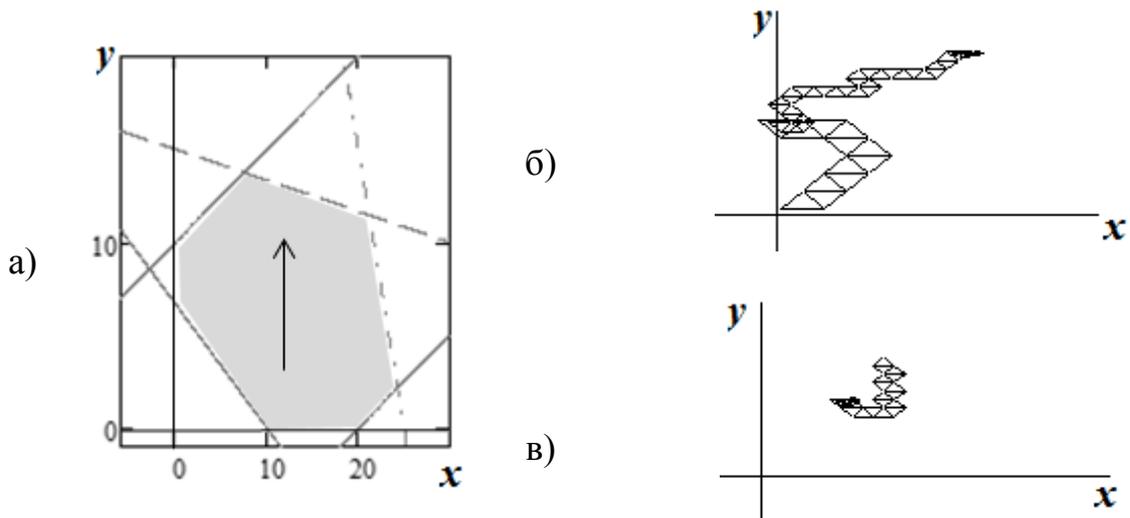


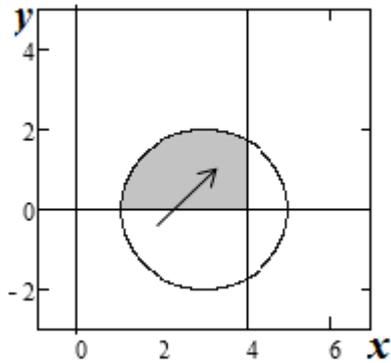
Рисунок 3.6 – Область определения, образованная линейными ограничениями (а) и траектория движения симплекса из начальной точки (1;1) (б) и точки (10;20) (в)

### *Нелинейные функции ограничений*

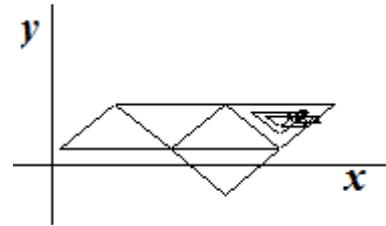
Целевая функция и функции ограничений может быть представлены в виде нелинейных функций, например:

$$\begin{cases}
 z(x, y) = -10x - 10y, \\
 x > 0, \\
 y > 0, \\
 y < 4, \\
 (x-3)^2 + y^2 < 4.
 \end{cases}
 \quad (3.32)$$

Минимальное значение целевой функции достигается в точке с координатами  $(4; \sqrt{3})$ . На рисунке 3.7 представлены функции ограничений и траектория движения симплекса, который достигает искомого значения с учетом погрешности.



а)



б)

Рисунок 3.7 – Область определения, образованная нелинейными ограничениями (а) и траектория движения симплекса (б)

*Нелинейные ограничения, образующие острый угол*

На рисунке 3.8 представлена задача (3.33) с нелинейными функциями ограничений, образующих острый угол и линейной целевой функцией:

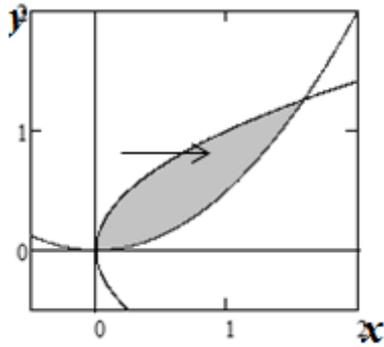
$$z(x, y) = -20x, \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 2y - x^2 > 0 \\ x - y^2 > 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Минимальное значение целевой функции достигается в точке с координатами  $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$  и  $y = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$ . Траектория движения симплекса с начальными значениями (1;1) представлена рисунке 3.8–б. При достижении размера симплекса значения меньше  $\varepsilon = 10^3$  после уточнения итоговый результат соответствует точке с координатами (1,587; 1,259).

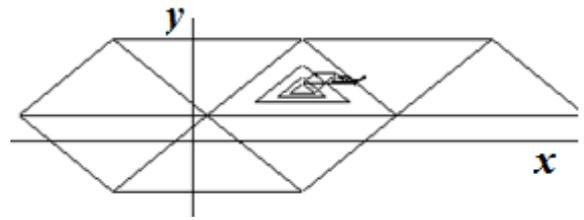
*Нелинейные ограничения, образующие несколько углов*

На рисунке 3.9 представлена задача, имеющая нелинейные ограничения, образующие несколько локальных минимумов на пересечении:

$$z(x, y) = -10y, \quad \begin{cases} x > 0, \\ 6x - y > -1, \\ 1 - xy > 0, \\ y - (x-1)^2 > 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

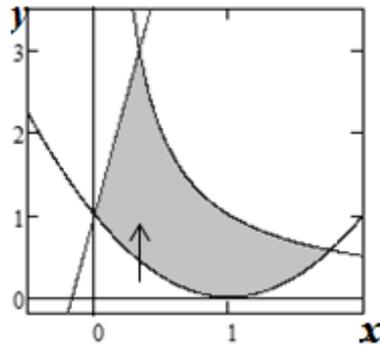


а)

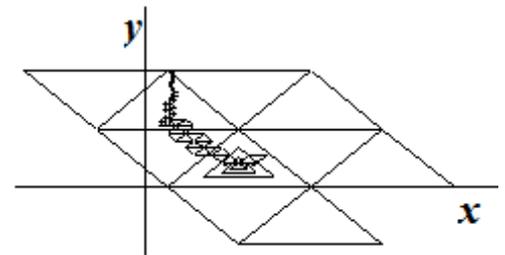


б)

Рисунок 3.8 – Область определения, образованная нелинейными ограничениями (а) и траектория движения симплекса (б)



а)



б)

Рисунок 3.9 – Область определения, образованная нелинейными ограничениями (а) и траектория движения симплекса (б)

Минимальное значение целевой функции достигается в точке с координатами  $x = \frac{1}{3} \approx 0,3333$  и  $y = 3$ . При движении симплекса (рисунок 3.9–б) из точки  $(2; 2)$ , находящейся за пределами симплекса, этап алгоритма «движение к начальной точке» приводит к точке с координатами  $(1,133; 0,5)$ .

Дальнейшее движение симплекса, при уменьшении его размера, идет вблизи границы  $1 - xy > 0$ , являющейся доминантной, до границы  $6x - y > -1$ . Итоговый результат поиска, после уточнения результата, соответствует точке с координатами  $(0,332; 2,971)$ .

Таким образом, во всех рассмотренных примерах получена сходимость к искомой точке. Погрешность вычисления координат оптимума не превышает размеров симплекса.

*Определение оптимальных геометрических параметров консольной балки*

Рассмотрим задачу определения оптимальных геометрических параметров сечения балки, представленной на рисунке 3.10.

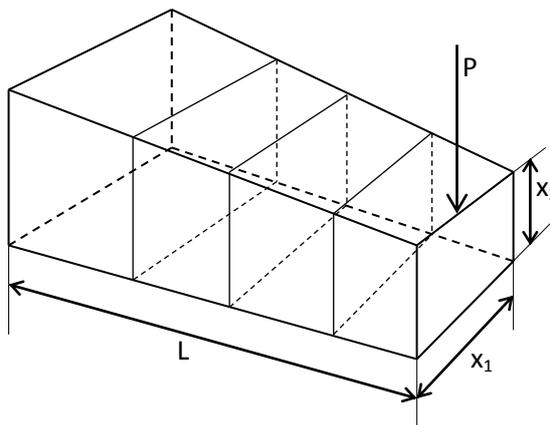


Рисунок 3.10 – Расчетная модель балки

В качестве проектных параметров рассматриваются геометрические размеры прямоугольного сечения балки на каждом из  $n$  участков, тогда целевая функция – объем балки, будет иметь следующий вид:

$$z(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \sum x_i y_i \Delta L, \quad (3.35)$$

где  $i$  – индекс участка балки,  $x_i$  - ширина сечения участка балки,  $y_i$  - высота сечения участка балки,  $\Delta L = \frac{L}{n}$  – длина участка балки,  $L$  – длина балки,  $n$  - количество участков разбиения.

В качестве ограничений будут рассматриваться физические ограничения размеров сечений – не отрицательность размеров и не превышения предельной высоты сечения, и ограничения по прочности конструкции:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i > 0, \\ \vdots \\ y_i > 0, \\ \vdots \\ y_i \leq H, \\ \vdots \\ \sigma_i \leq \sigma_{кр}. \end{array} \right. , \quad (3.36)$$

где  $\sigma_i = \frac{6M_{xi}}{J_{xi}} = \frac{6P(\Delta L \cdot i)}{x_i y_i^2}$  - значение напряжения в серединной точке участка балки, рассчитываемое как отношение изгибающего момента к моменту инерции,  $\sigma_{кр}$  - заданное предельное значение напряжение,  $H$  – максимальное значение высоты,  $P$  – значение приложенной силы,  $\Delta L = \frac{L}{n}$  – длина участка балки,  $L$  – длина балки,  $n$  – количество участков разбиения.

Если принять значение высоты постоянной – равной максимальной, то целевая функция и ограничения принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i H \Delta L \\ x_i > 0, \\ \vdots \\ \sigma_i = \frac{6P(\Delta L \cdot i)}{x_i H^2} \leq \sigma_{кр}. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Данная задача имеет линейные уравнения целевой функции и ограничений. На рисунке 3.11 изображены функции ограничений и антиградиент целевой функции для двумерной задачи, при параметре разбиения  $n=2$ .

В случае фиксированной высоты балки оптимальную ширину сечения можно вычислить аналитически [47]:

$$x_i = \frac{6P(\Delta L \cdot i)}{\sigma_{кр} H^2}. \quad (3.38)$$

На рисунке 3.12 приведены траектория движения симплекса при следующих значениях исходных параметров балки:  $H = 1$ ,  $L = 500$ ,  $P = 300$ ,  $\sigma_{кр} = 30000000$ ,  $n=2$ .

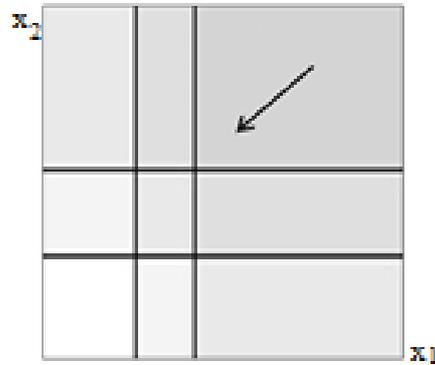


Рисунок 3.11 – Область определения и антиградиент функции для задачи с постоянной высотой балки

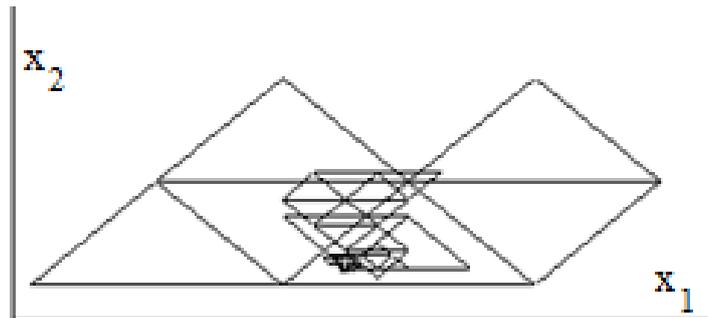


Рисунок 3.12 – Траектория движения симплекса

Значения проектных параметров вычисленных с помощью алгоритма и рассчитанных аналитически совпадают и составляют 0,225 и 0,075.

В таблице 3.1 представлены результаты оптимизационных расчетов при варьировании параметров разбиения для задачи с постоянным значением высоты балки. Процесс поиска остановлен при размере симплекса меньше  $10^{-3}$ . Количество варьируемых переменных при коэффициенте разбиения равном  $n$  составляет  $n$ , а количество ограничений  $2n$ .

Если рассматривать задачу с переменной высотой сечения, уравнения границ (3.36) и целевой функции (3.35) являются нелинейными. На рисунке 3.13 изображены функции ограничений и антиградиент целевой функции.

На рисунках 3.14 и 3.15 изображены траектории движения симплекса при параметре разбиения  $n=1$  и  $n=2$  соответственно. Значения проектных параметров составляют 0,15 и 1, для разбиения  $n=1$ .

Таблица 3.1 – Результаты расчета проектных параметров

Коэффициент разбиения $n$	Точное решение	Результат оптимизационного расчета	Погрешность
4	0,2622	0,2625	-0,1%
	0,1872	0,1875	-0,2%
	0,1122	0,1125	-0,3%
	0,0374	0,0375	-0,3%
8	0,281	0,2813	-0,1%
	0,2432	0,2438	-0,2%
	0,206	0,2063	-0,1%
	0,168	0,1688	-0,5%
	0,131	0,1313	-0,2%
	0,093	0,0938	-0,9%
	0,055	0,0563	-2,4%
	0,0182	0,0188	-3,3%
16	0,291	0,29063	0,1%
	0,272	0,27188	0,0%
	0,253	0,25313	-0,1%
	0,235	0,23438	0,3%
	0,216	0,215625	0,2%
	0,197	0,196875	0,1%
	0,179	0,17813	0,5%
	0,16	0,15938	0,4%
	0,141	0,140625	0,3%
	0,122	0,121875	0,1%
	0,103	0,103013	0,0%
	0,085	0,084375	0,7%
	0,066	0,065625	0,6%
	0,047	0,04688	0,3%
	0,028	0,028125	-0,4%
	0,009	0,00938	-4,2%

В задаче определения параметров балки с постоянной высотой сечения допустимая область не имеет кратных участков границ и острых углов, а в задаче с переменной высотой сечения – искомая точка находится в остром углу области. Несмотря на это, в обоих случаях поиск сходится к точному

решению, причём процесс поиска устойчив к возмущениям параметров задачи (нагрузке и предельной высоте сечения).

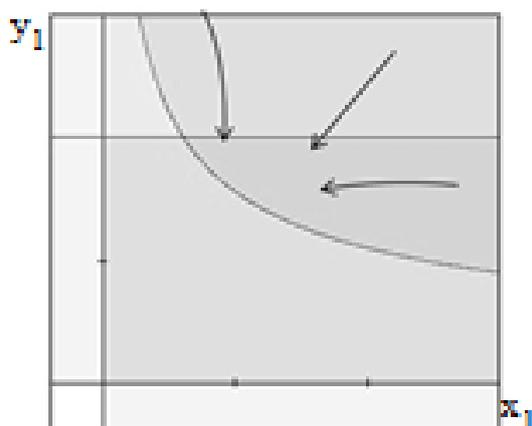


Рисунок 3.13 – Область определения и антиградиент функции для задачи с переменной высотой балки

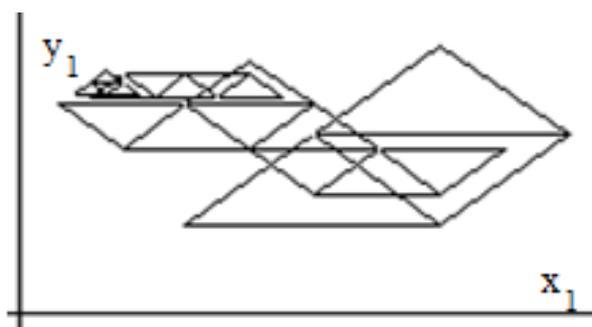


Рисунок 3.14 – Траектория движения симплекса при коэффициенте разбиения  $n=1$

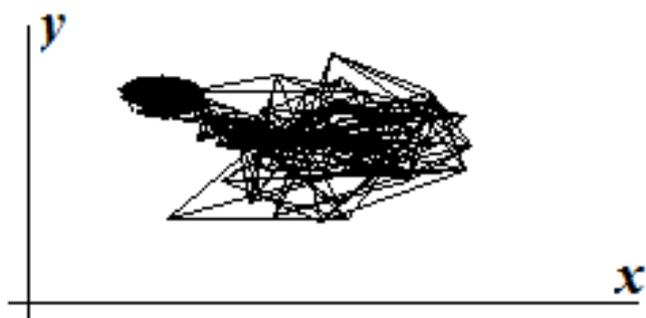


Рисунок 3.15 – Траектория движения симплекса при коэффициенте разбиения  $n=2$

Описанный подход к оптимизации сетчатых конструкций позволяет использовать полное дискретное моделирование при вычислении откликов. При наличии вырезов и нарушений регулярности структуры конструкции такая модель более адекватна, чем континуальная.

Показано, что алгоритм позволяет получить решение задачи оптимизации при наличии «двойникования» границ и угловых точек на границе области допустимых значений.

### 3.4 Выводы по главе

1. Показано, что использование для описания участков границ нормированных  $R$ -предикатов, позволяет получить гладкую, выпуклую область ограничений. Замена целевой функции на вспомогательную, учитывающую гладкие «доминантные» границы области, дает возможность использовать для решения безградиентный метод оптимизации (симплексный метод).

2. Введение упругих связей и расчет их реакции позволил корректировать направление перемещения симплекса, тем самым избежать заикливания последовательности численного решения вблизи острых углов области поиска и «кратных» границ.

3. Использование нормированных  $R$ -предикатов при описании участков границ области решения, введение упругих связей и расчета их реакции, позволило использовать и модифицировать симплексный метод для решения задачи оптимизации с учетом множества ограничений.

4. Модифицированный симплексный метод позволил разработать алгоритм решения задачи оптимизации с учетом множества ограничений.

5. Тестирование разработанного алгоритма оптимизации с учетом множества ограничений на основе модифицированного симплексного метода на контрольных примерах и задаче определения оптимальных геометрических параметров консольной балки показало:

- во всех рассмотренных примерах получена сходимость численного решения к искомой точке, погрешность вычисления координат оптимума не превышает размеров симплекса;

-алгоритм позволяет получить решение задачи оптимизации при наличии «двойникования» границ и угловых точек на границе области допустимых значений;

-результаты численного расчета согласуются с аналитическими решениями, последовательность приближенных решений сходиться к аналитическим решениям.

## **4 КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

### **4.1 Модернизация комплекса «Композит НК» для оптимизации анизотридных конструкций**

При решении задачи оптимального проектирования силовых конструкций аэрокосмического назначения возможно получение функций ограничений и целевой функции методами вычислительного эксперимента. Как показано на общей схеме алгоритма оптимального проектирования силовой конструкции с ограничениями по прочности и устойчивости, с использованием дискретного моделирования (рисунок 3.4) первоначально производится расчет напряженно деформированного состояния конструкции и расчет конструкции на устойчивость.

Пакет программ «Композит-НК Анизотрид» [54, 58, 78, 80, 81, 105] содержит модули решения задачи прочности и устойчивости силовых конструкций. Пакет программ представляет собой инструментарий для конструирования прикладных программ с использованием технологии визуального программирования, где алгоритм расчета представлен как последовательность вычислений значения функциональных объектов. При этом в качестве аргументов данных объектов выступают другие функциональные объекты. Каждый функциональный объект реализует конкретную подпрограмму (рисунок 4.1).

Композиция функциональных объектов представляется в виде ориентированного графа, где вершинами являются функциональные объекты, а дуги – подстановками значений других объектов в качестве аргументов и свободными аргументами.

При конструировании алгоритма процесса вычисления, он отображается в виде сети визуальных изображений программных объектов: выполняемых объектов, имеющих аргументы, и структурообразующих, отвечающих за реализацию циклов, ветвлений и получения ссылок на другие

блоки. Последовательность команд, из которых состоит процесс вычисления, формируется путем трансляции графического представления функционально-объектной схемы (рисунок 4.2).[78, 85, 103]

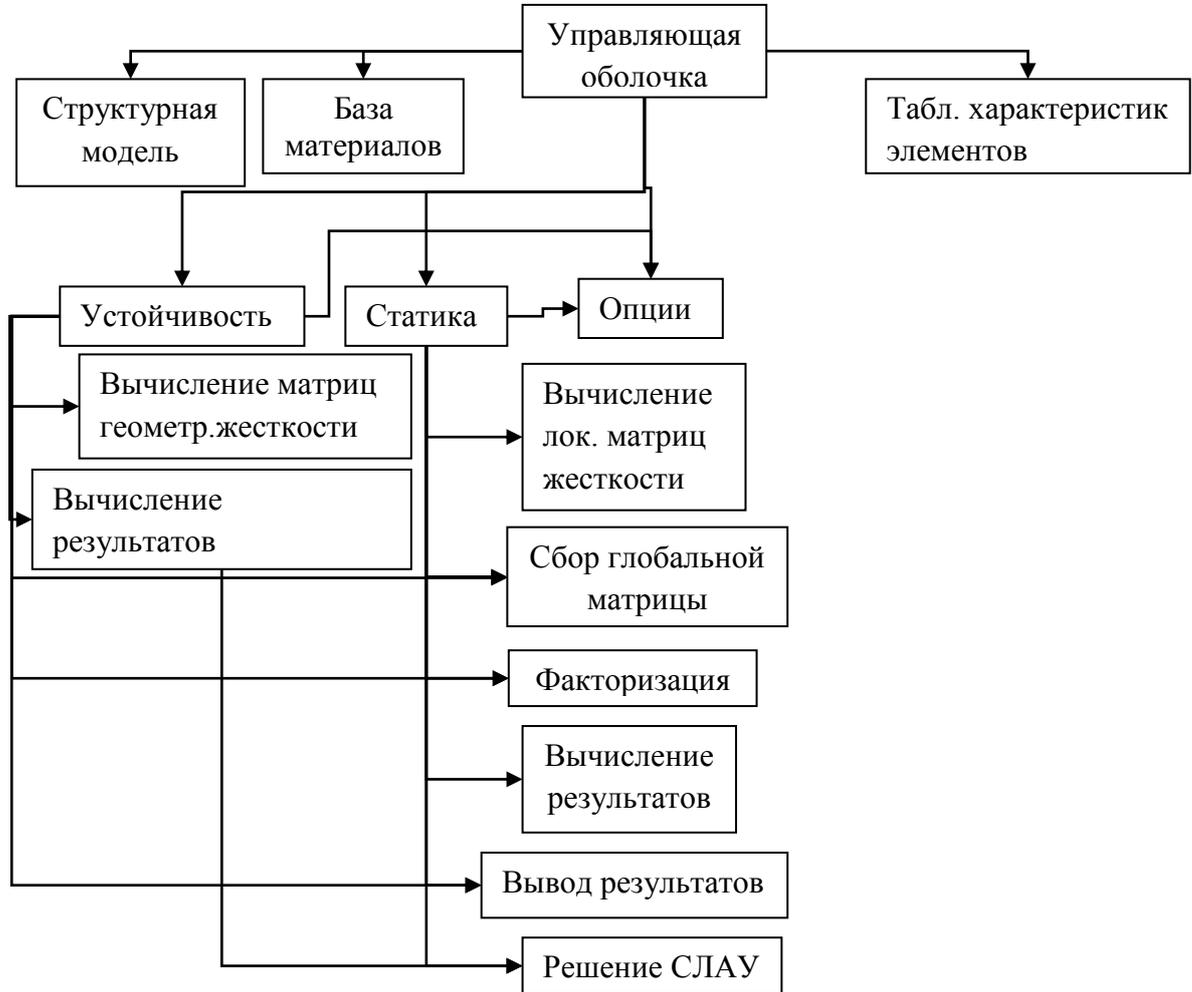


Рисунок 4.1 – Схема ПП «Композит НК Анизотрид»

В состав пакета программ «Композит-НК Анизотрид» включен модуль для автоматизированного построения аппроксимационных функций откликов по результатам вычислительных экспериментов. В качестве исходных данных выступают: текстовый файл, содержащий план-матрицу вычислительного эксперимента, и файлы с откликами. Построение функции аппроксимации предусматривает выполнение серии шагов:

- загрузки план-матрицы и откликов факторного эксперимента (рисунок 4.3);

- проверка полноты загрузки входных данных для построения аппроксимирующих функций;
- определение необходимого вида базисных функций и формирование набора базисных функций для функций откликов (рисунок 4.4);
- расчет коэффициентов аппроксимирующей функции.

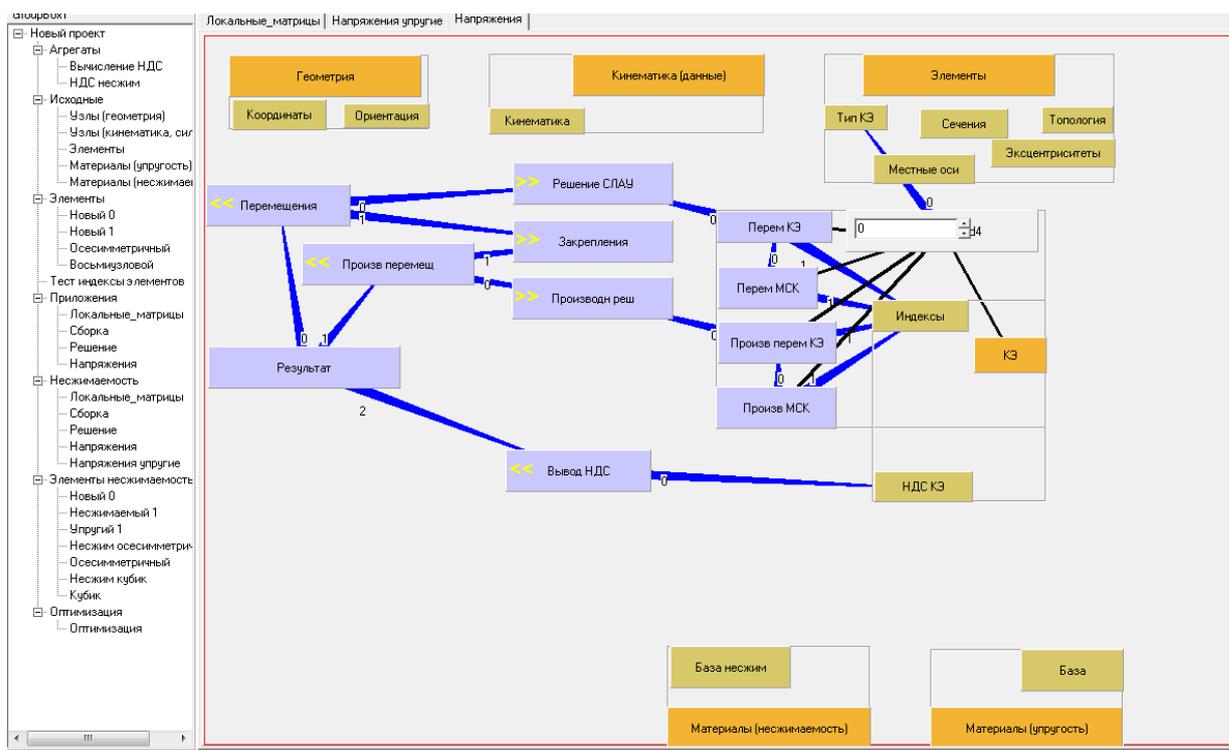


Рисунок 4.2 – Функциональная схема расчета напряженно-деформированного состояния

Пакет программ «Композит-НК Анизогрид» расширен модулем оптимизации. На рисунке 4.5 и 4.6 представлены схема пакета программ с учетом модуля оптимизации. В схеме, изображённой на рисунке 4.5, вычисление напряженно-деформированного состояния и устойчивости конструкции происходит для каждого набора значений параметров в узлах симплекса. В схеме, изображенной на рисунке 4.6, в качестве функций ограничений выступают результаты модуля для автоматизированного построения аппроксимационных функций откликов по результатам вычислительных экспериментов.

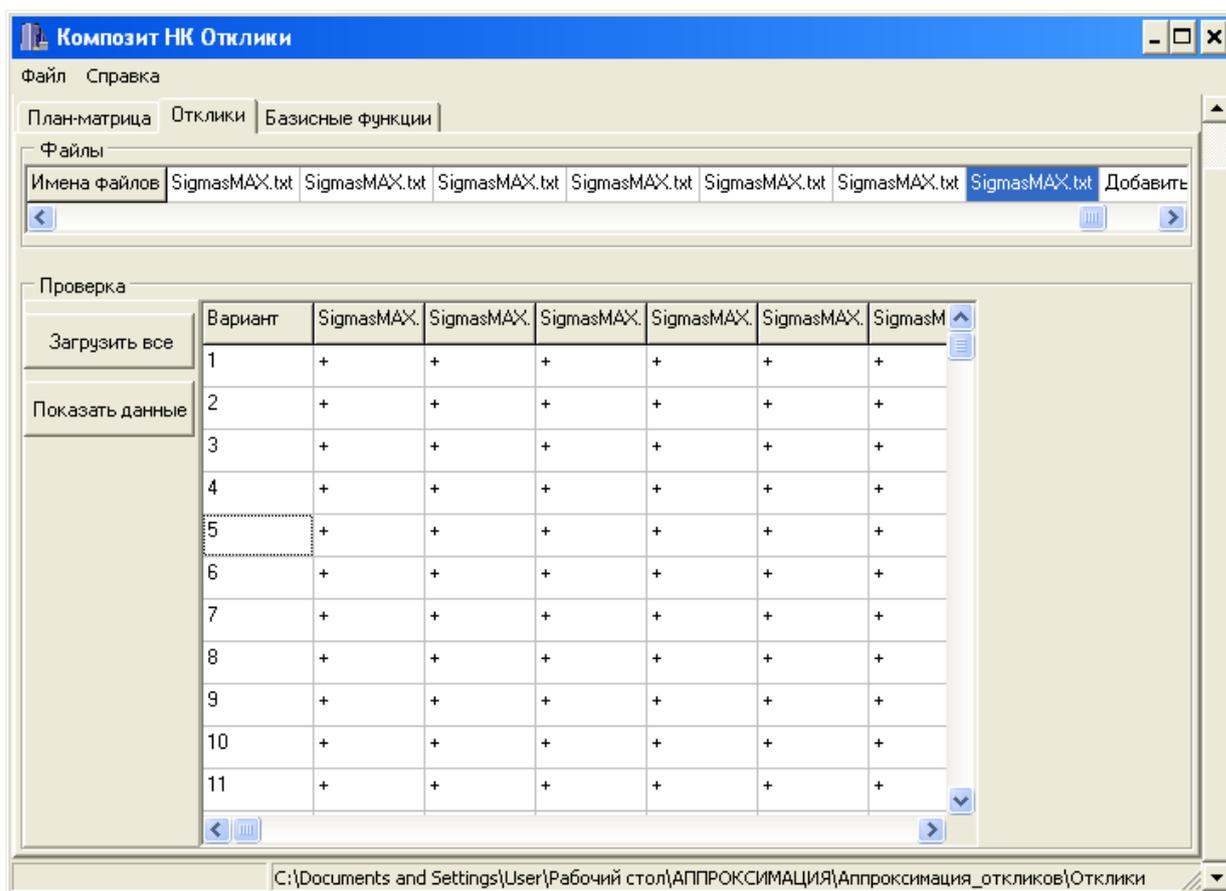


Рисунок 4.3 – Окно закладки «Отклики» соценкой загрузки исходных файлов

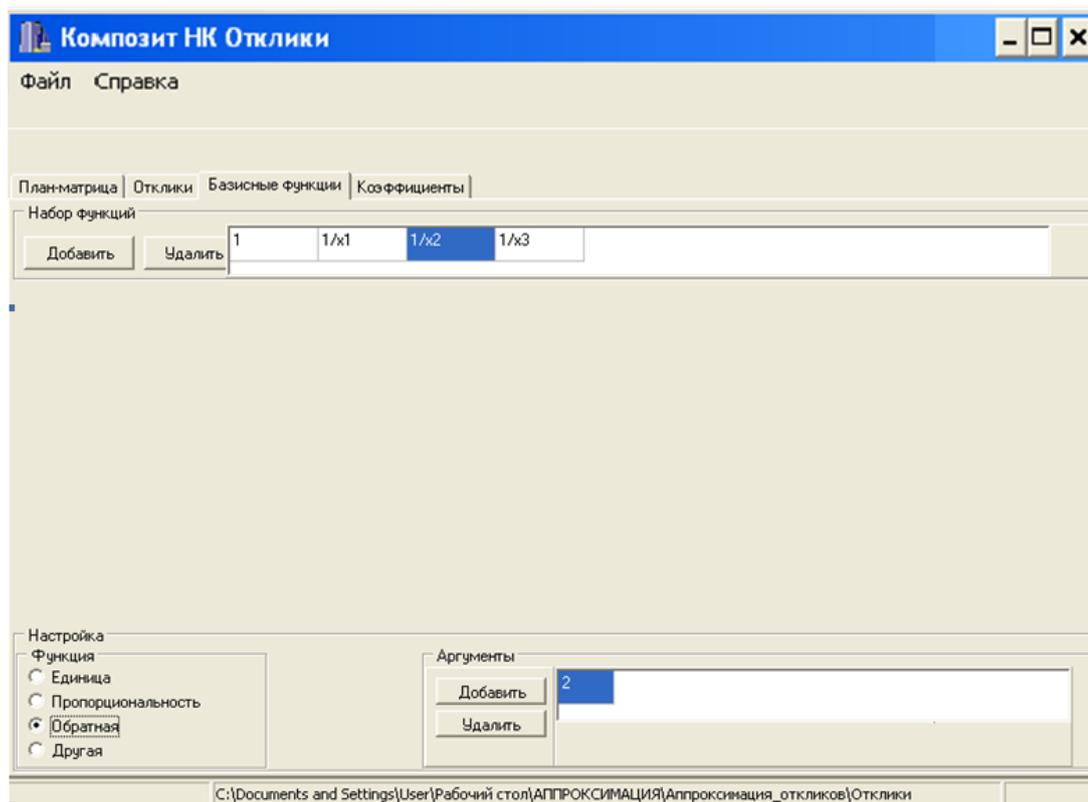


Рисунок 4.4 – Окно закладки «базисные функции»

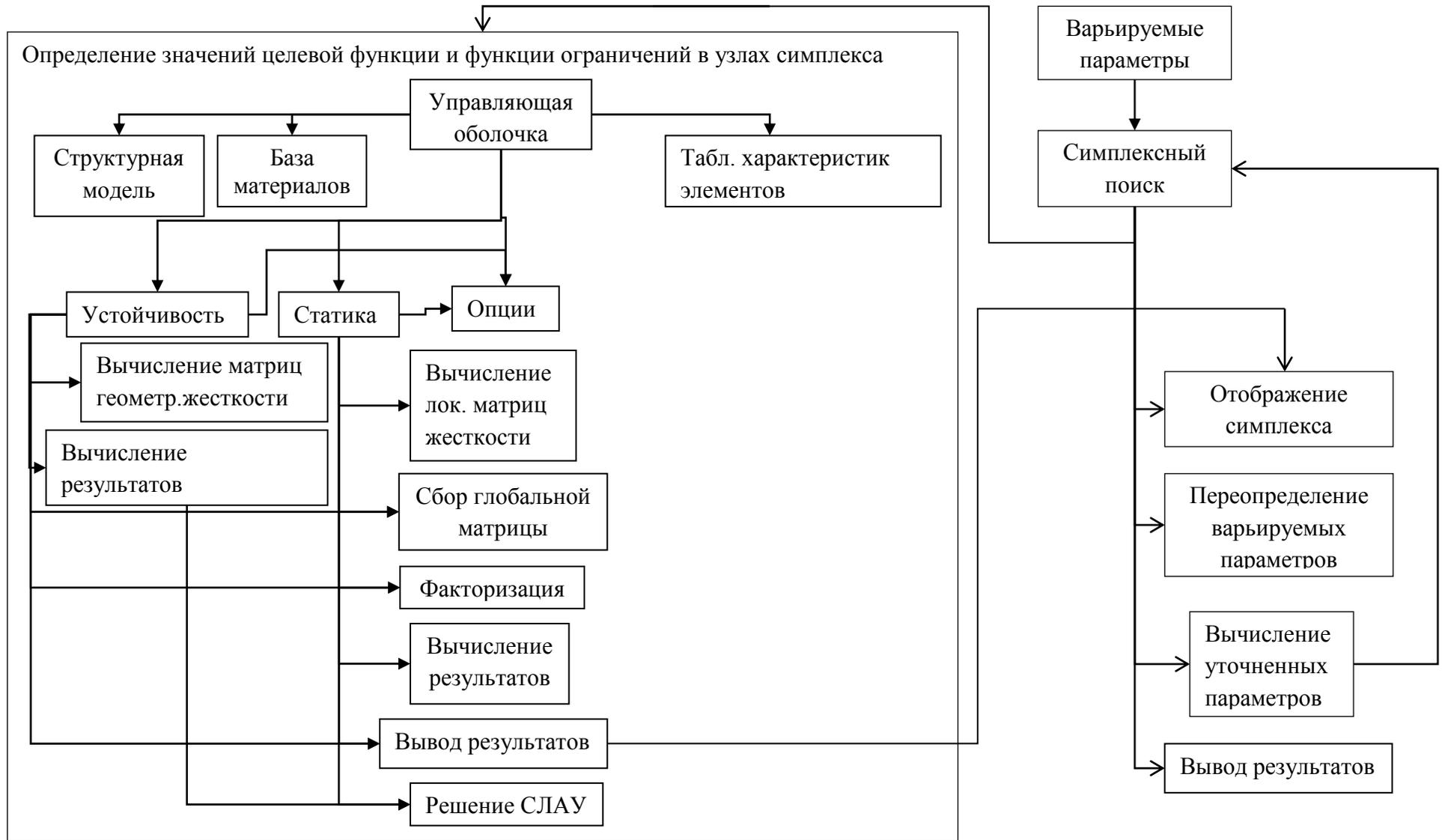


Рисунок 4.5 – Схема ПП «Композит НК Анизогрид» после внедрения модуля

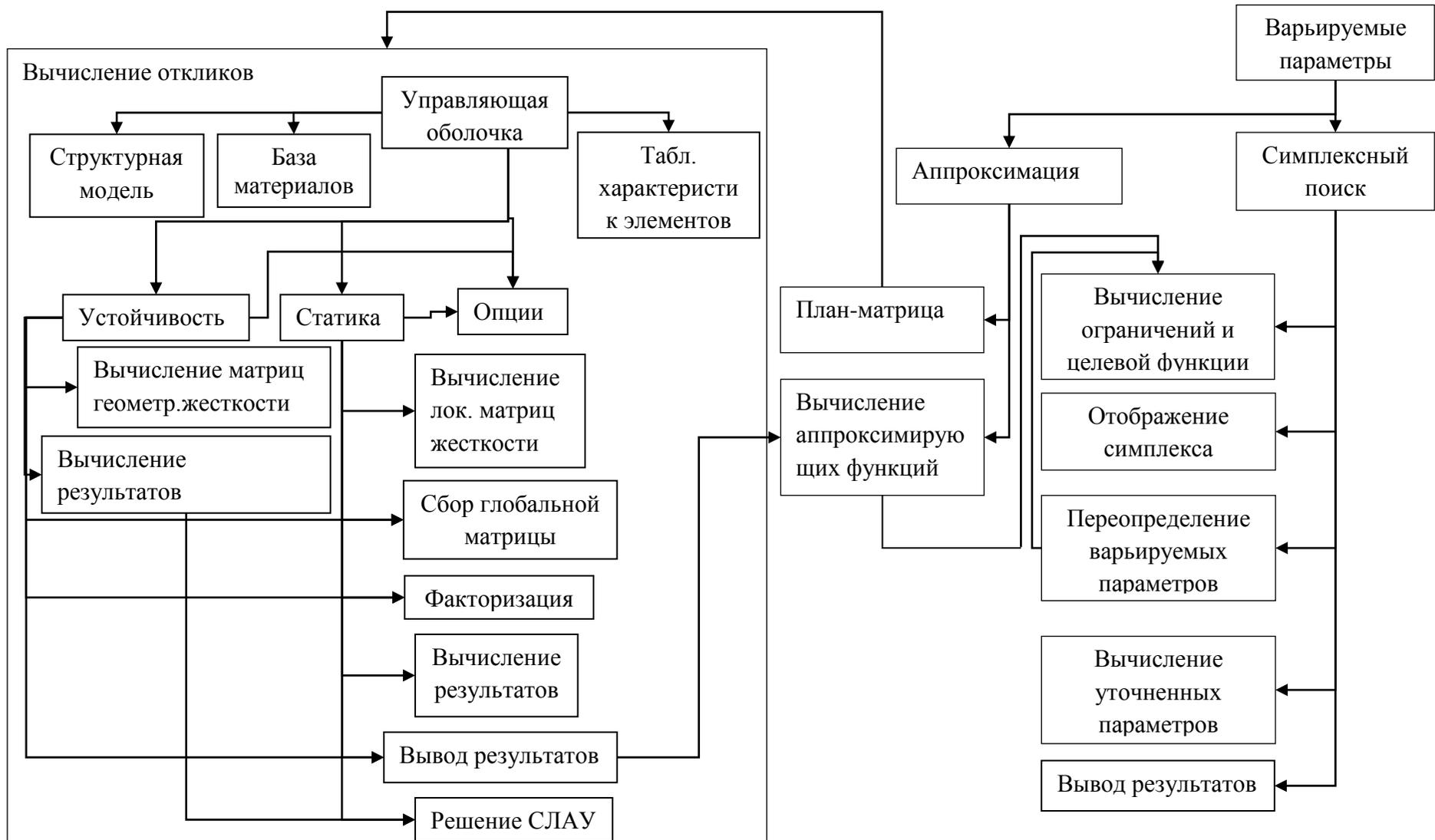


Рисунок 4.6 – Схема ПП «Композит НК Анизогрид»

Окно интерфейса модуля оптимизации представлено на рисунке 4.7. Приложение подразумевает загрузку файла данных, содержащего размерность факторного пространства, первоначальный размер симплекса, начальную точку алгоритма симплексного поиска и коэффициенты при аргументах целевой функции и функций ограничений. Загруженные входные данные отображаются в блоке (1) – «Исходные данные».

На форме отображаются: текущие значения данных симплекса на каждом шаге (2) – «Текущий симплекс»; значения целевой функции, исходных и нормированных предикатов в узлах симплекса и градиенты функций и предикатов на каждом итерационном шаге – область формы (3).

При работе с приложением предусмотрена возможность отдельного выполнения шагов алгоритма симплексного поиска, что позволяет пользователю отследить промежуточные результаты работы алгоритма – область формы (9). Автоматическое выполнение всей последовательности шагов выполняется при нажатии на кнопку «Шаг полностью». На форме отображаются текущие параметры итерационного шага:

- алгоритма движения симплекса к границе области ограничений: текущий размер симплекса, параметры R-конъюнкции и нормализации симплекса, минимальный уровень доминант и предикатов – область формы (5);

- алгоритма упругого симплекса: параметры первого этапа вычисления реакции упругих связей и длины упругих связей, параметры направления поиска – область формы (6).

Кроме того на форме отображаются текущие номера доминантных границ и значения предикатов этих границ – область формы (4).

Модуль имеет возможность демонстрации траектории движения симплекса. На форме отображена проекция движения симплекса на первые два параметра оптимизации – область формы (7). Предусмотрена возможность построения проекции движения симплекса на любую плоскость – область формы (8).

Симплексный поиск

Файл

Текущий симплекс

0	1	2	3	4	
0	0,151	0,379	0,382	0,54	0,326
1	7,597	7,378	7,766	7,606	7,635
2	0,49	0,49	0,56	0,433	0,197
3	6,971	6,734	6,707	7,007	6,774

Целевая функция

0	1	2	3	4	
0	5,481	10,046	10,454	12,986	7,526

Исходные предикаты

0	1	2	3	4	
0	0,151	0,379	0,382	0,54	0,326
1	7,597	7,378	7,766	7,606	7,635
2	0,49	0,49	0,56	0,433	0,197

Градиент целевой функции

20	0	5	0
----	---	---	---

Градиенты исходных предикатов

0	0,999	0	0	0
1	0	0,999	0	0
2	0	0	0,999	0
3	0	0	0	0,999

Нормированные предикаты

0	1	2	3	4	
0	0,151	0,379	0,382	0,54	0,326
1	7,597	7,378	7,766	7,606	7,635
2	0,49	0,49	0,56	0,433	0,197

Градиенты нормированных предикатов

0	0,999	0	0	0
1	0	0,999	0	0
2	0	0	0,999	0
3	0	0	0	0,999

Исходные

Размерность 4

Поперечник 2

Центр

25	1	25	3
----	---	----	---

Целевая

20	0	5	0
----	---	---	---

Предикаты

0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

Основной алгоритм

Доминанты

№	0	2
Средн	0,356	0,434
Нач	0,5	0,5

Параметры

Уровень домин. 0,5

Р-конъюнкция 1

Параметр норм. 1

Подготовка

Предикат

Коеф (W=C)

Коеф (Z>)

Коеф (Z=C)

Отражение

Сжатие

Поворот

Индикация

Размер симплекса 0,25

Коеф. при grad Z 1

Коеф. при grad W 1

Уровень предиката 1

Инициализация

Траектория


Проекция

7

9 Шаг к начальной

Поиск по Дирихле

Поиск регулярный

Уменьшение симплекса

Уточнение

Шаг полностью

Шаг от границы

Сброс цикла

Рисунок 4.7 – Окно модуля оптимизации

Для интеграции алгоритма симплексного поиска в пакет программ «Композит НК Анизогрид» была построена функциональная схема, представленная на рисунке 4.8. Данная реализация предусматривает автоматическое выполнение всех шагов алгоритма, причем вид функций ограничений и целевой функции загружается в виде файла входных данных в функциональных объектах «Функции», а параметры расчета – минимальное значение размера симплекса, параметры R-конъюнкции, вектор параметров оптимизации – загружаются в функциональном объекте «Опции». Вычисление коэффициентов ограничений и целевых функций выполняются на основе расчетов напряженно-деформированного состояния и расчета устойчивости, выполняемого в модулях пакета программ согласно план-матрице варьируемых факторов (рисунок 4.6).

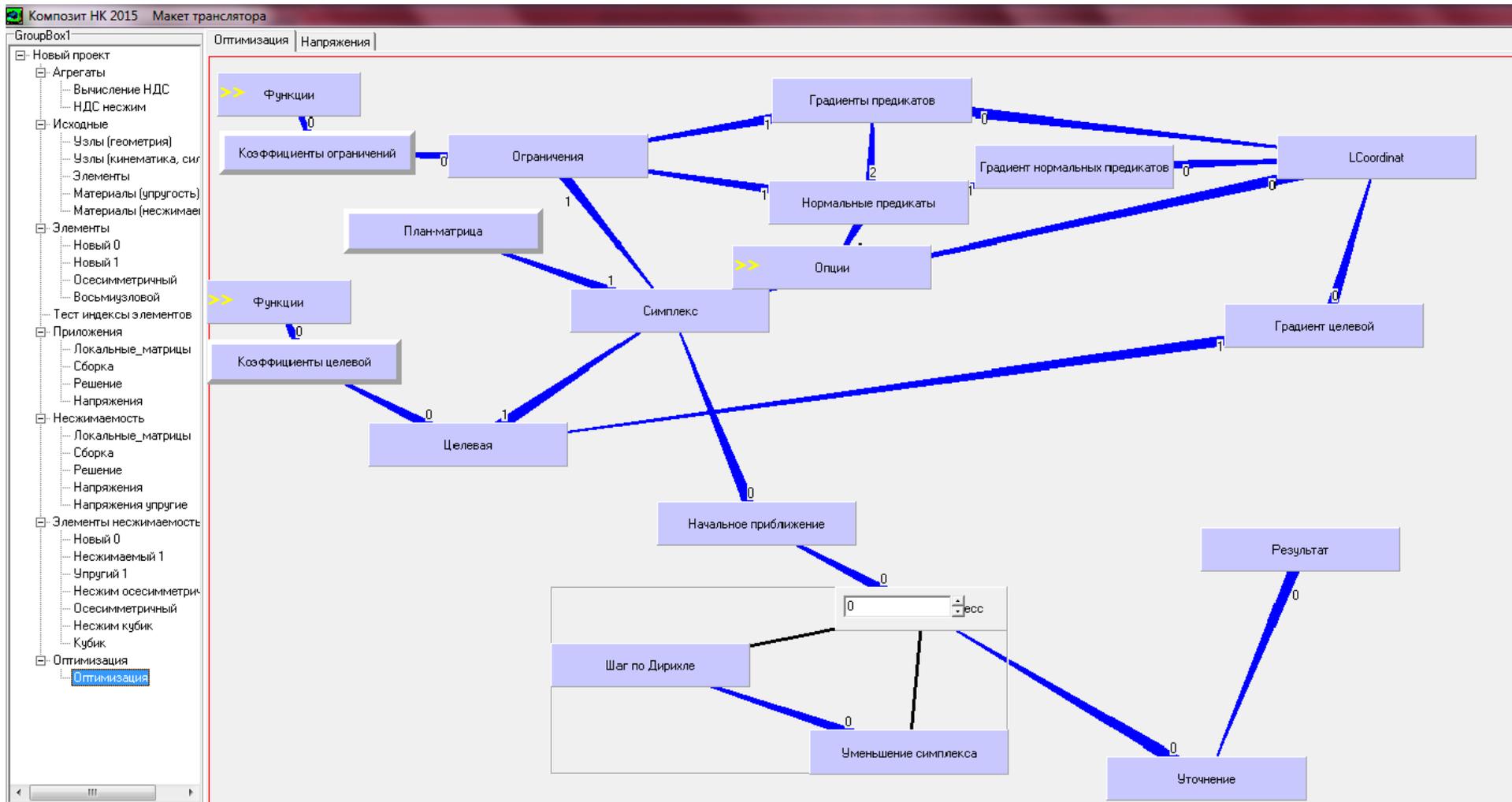


Рисунок 4.8 – Функциональная схема

Автором диссертации непосредственно осуществлялось проектирование и кодирование модуля расчета оптимальных параметров силовых конструкций; компоненты комплекса «Модуль автоматизации отклика факторного эксперимента» и «Модуль расчета напряженно-деформированного состояния силовых конструкций» реализовывались диссертантом совместно с соавторами (свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ № 2014613344 «Композит НК Анизогрид»)

#### **4.2 Классы генерации моделей, вычисления откликов и симплексного поиска**

Средой разработки пакета программ «Композит НК Анизогрид» является BorlandC++, что определяет среду разработки для всех дополнительных модулей пакета программ.

Для работы алгоритма симплексного поиска в модуле реализованы класс представления симплекса и действий над ним TR\_SimplexNew, классы вычисления функций ограничений и целевой функции в узлах симплекса TPredicats и TZielFunc и класс, реализующий вычисления основных шагов алгоритма TSearchStrategy.

Класс TR\_SimplexNew содержит в себе аргументы, хранящие текущие координаты симплекса в узлах, значения целевых функций, нормированных предикатов и их градиентов, методы реализующие вычисление нормированных предикатов ограничений и градиентов целевых функций. Для вычисления функций ограничений и целевой функции в узлах симплекса на итерационном шаге используются методы классов TPredicats и TZielFunc. Методы Value() данных классов содержат функции, коэффициенты которых загружаются во входных данных. Для класса TZielFunc входными параметрами метода Value() являются координаты узлов симплекса, а для класса TPredicats – еще и номер функции ограничения. В случае решения задач, имеющих сложный вид целевой функции и функций ограничений, определяемых известными аналитическими зависимостями и требующих

дополнительных вычислений, возможно расширение данных классов дополнительными методами.

Основным классом модуля расчета оптимальных параметров силовых конструкций является TSearchStrategy, содержащий методы, определяющие основные шаги алгоритма. Кроме того в данном классе реализовано представление доминант и действия с ними. Аргументы класса представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Аргументы класса TSearchStrategy

Наименование аргумента класса	Структура данных	Данные
intDim		Размерность симплекса
intCount		Количество ограничений
doubleZeroDiag;		Параметр регуляризации
double* Stiff;	одномерный массив жесткости связей	Вектор; число элементов – количество ограничений
double* L;	одномерный массив длин связей	Вектор; число элементов – количество ограничений
double* SummaryError;	одномерный массив накопленной ошибки	Вектор; число элементов – размерность симплекса
bool *IsDominante;	одномерный массив доминантности границы	Вектор; число элементов – количество ограничений; значения: 0 – не является доминантной границей, 1 – является доминантной границей
vector<int>Dominantes;		Номера доминантных границ

Класс TSearchStrategy содержит методы определяющие направление поиска при выборе различных стратегий, реализованных в шагах алгоритма симплексного поиска: CalcRichtungOnInitial() для движения к границе области ограничения для поиска начального приближения, CalcRichtungOnFree() для вычисления реакций упругих связей и CalcOnFinish() для уточнения результатов поиска. Один шаг алгоритма симплексного поиска – отображение наихудшей вершины симплекса в вычисленном направлении содержится в методе Step() данного класса. Кроме того в классе TSearchStrategy содержится набор методов для осуществления определения и работы с доминантными ограничениями. Более подробно методы данного класса представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Методы класса TSearchStrategy

Наименование метода класса	Параметры метода	Описание метода
1	2	3
Initialization(TR_SimplexNew*)	входные данные: экземпляр класса TR_SimplexNew	установка начальных значений симплекса
Step()		отображение наихудшей вершины симплекса относительно центра грани
TerminationCode()		критерий завершения
CalcRichtungOnInitial()		определение направления при поиске начального приближения

1	2	3
CalcRichtungOnFree()		определение направления для упругого симплекса
CalcOnFinish()		уточнение результата после поиска
AddDisplaceForDominantes()		направление на допустимую точку
DeleteAllDominante()		удаление всех доминант, очищение массивов
FirstFiltration()		начальная фильтрация ограничений
AddDominantes (double Min, double DefaultValue)	вх. данные: минимальный уровень доминантного предиката	добавление доминант, фильтрация ограничений
CalcMinOfDominantes()	вых. данные: значение минимальной доминанты	расчет минимальной среди доминант
ExclDominantes (double Max);	вх. данные: пороговый уровень доминант	фильтрация доминант, оставление только минимальных

1	2	3
CalcNiveau();	вых. данные: средний уровень доминанты	расчет среднего уровня предикат
CalcGlobalMatrix()		формирование матрицы жесткости для алгоритма упругого симплекса
CalcRightOfZiel()		формирование матрицы правых частей по целевой функции для алгоритма упругого симплекса
AddRightOfInitDef()		добавление к правым частям доминант для алгоритма упругого симплекса
Solution()		решение СЛАУ для алгоритмом упругого симплекса методом Гаусса
BadNode()	выходные данные: номер узла симплекса	вычисление наихудшего узла

1	2	3
Scalar (double* a, double* b, int n)	входные данные: массивы умножаемых векторов и размерность выходные данные: скалярное произведение	скалярное произведение

Для функциональной схемы, представленной на рисунке 4.5, описанные классы были связаны с функциональными объектами следующим образом.

Классы TPredicats и TZielFunc связаны с функциональными объектами «Ограничения» и «Целевая функция» соответственно.

Методы класса TR\_SimplexNew, отвечающие за расчет нормированных предикатов, матрицы L-координат и расчета градиентов были реализованы в виде отдельных классов и связаны с функциональными объектами «Нормальные предикаты», «LCoordinat», «Градиент нормальных предикатов», «Градиенты предикатов» и «Градиент целевой» соответственно. Класс функционального блока «Симплекс» содержит текущие координаты симплекса.

Методы класса TSearchStrategy также были реализованы в виде отдельных классов, соответствующих виду шагов алгоритма, и связаны с функциональными объектами «Начальное приближение», «Шаг по Дирихле», «Уменьшение симплекса» и «Уточнение».

### 4.3 Выводы по главе

1. На базе пакета программ «Композит-НК Анизогрид» разработан модуль оптимизации. Данная реализация предусматривает автоматическое выполнение всех шагов алгоритма оптимизации с учетом множества ограничений. Вычисление коэффициентов ограничений и целевых функций выполняются на основе расчетов напряженно-деформированного состояния и расчета устойчивости анизотропных сетчатых конструкций, выполняемого в модулях пакета программ согласно план-матрице варьируемых факторов.

2. Получено свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ «Композит НК Анизогрид».

## 5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОГРИДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Представленный в работе алгоритм симплексного поиска позволяет проводить оптимизационные расчеты, основываясь на вычислительном эксперименте для определения функций ограничений и используя полное дискретное моделирование для получения откликов. Поэтому алгоритм применим для сетчатых конструкций как регулярной, так и нерегулярной структуры.

### 5.1 Оптимизация сетчатых конструкций регулярной структуры

Рассмотрим применимость алгоритма для решения задачи оптимального проектирования сетчатых конструкций регулярной структуры на примере цилиндрической и конической оболочек без обшивки. Для расчета цилиндрической оболочки в качестве функций ограничений будут рассматриваться известные аналитические зависимости [42], а расчет конической оболочки будет проводиться на основе результатов вычислительного эксперимента проведенного в пакете «Композит НК Анизогрид».

5.1.1 Оптимизация цилиндрической сетчатой оболочки регулярной структуры без обшивки

Рассмотрим сетчатую цилиндрическую оболочку со следующими параметрами [70]:

внутренний радиус  $R=593,5$  мм,

длина конструкции  $L=1567$  мм,

сила осевого сжатия  $P = 531$  кН,

модуль упругости вдоль ребра  $E=180$  ГПа,

прочность ребра при сжатии  $\sigma_{\max}=480$  МПа.

Для приведенной оболочки с учетом введенных требований по жесткости в работе [69] приведены результаты проектного расчета по аналитическим зависимостям по выбору оптимальных параметров при действии сжимающих нагрузок [42] при фиксированном числе пар спиральных ребер, равном 32.

Для моделирования данной оболочки можно воспользоваться формулами Бунакова [51], описывающими оптимальный цилиндр, и сократить число параметров оптимизации до 4 – угла наклона спирального ребра  $\varphi$ , количества пар спиральных ребер  $m_h$ , высоты реберной структуры  $h$  и ширины сечения спирального ребра  $\delta_h$ . Площадь кольцевого ребра будет вычислена исходя из континуального моделирования [51] следующим образом:

$$F_k = \frac{P \sin \varphi}{2m \cos \varphi \cdot \sigma_b}. \quad (5.1)$$

Целевую функцию можно представить в виде суммы масс спиральных и кольцевых ребер:

$$M = 2\pi R L h \rho_h (2m_h \bar{\delta}_h + m_c \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c), \quad (5.2)$$

где  $\bar{\delta}_c = \frac{\delta_c}{a_c}$ ,  $\bar{\delta}_h = \frac{\delta_h}{a_h}$ ,  $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_h}$  – плотность материалов ребер.

В качестве ограничений используем известные функции [44], где ограничения имеют вид:

ограничение по прочности ребер  $|\sigma_c| \leq \bar{\sigma}_c$ :

$$P \leq \bar{P} = 2\pi D h \bar{\delta}_c c^2 \bar{\sigma}, \quad (5.3)$$

ограничение по общей устойчивости:

$$P \leq P_{кр} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} E_c \bar{\delta}_c h^2 c^2 s^2 \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{E_k \bar{\delta}_k}{2E_c \bar{\delta}_c s^4}}}, \quad (5.4)$$

ограничение по осесимметричной устойчивости:

$$P \leq P_{кр}^o = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} h^2 c^2 \sqrt{E_c E_k \bar{\delta}_c \bar{\delta}_k}, \quad (5.5)$$

ограничение по местной устойчивости:

$$P \leq P_{кр}^M = \frac{2}{3} \pi^3 k E_c D h \bar{\delta}_c^3 c^4 s^2 \quad (5.6)$$

В формуле (5.6) параметр  $k$  зависит от условий закрепления элемента спирального ребра, его окончательное значение определяется после того, как оптимальные проектные параметры найдены.

Используя формулы (5.3)-(5.6) можно решить задачу оптимизации, используя простой перебор. При фиксировании числа пар спиральных ребер, расчет параметров методом перебора дают следующий результат: угол наклона равный  $36^\circ$ , высота сечения ребра 13,84 мм, ширина сечения спирального ребра 3,66 и площадь сечения кольцевого ребра  $1,2 \cdot 10^{-5}$ . С учетом технологии производства параметры геометрической структуры можно округлить до значений определяемых технологией.

Для симплексного метода проведено два расчета – с фиксированным значением числа пар спиральных ребер и с варьируемым. На рисунке 5.1 серым цветом выделена область допустимых значений в плоскости  $\varphi - m_n$  при фиксированных значениях геометрических размеров сечений ребер сетчатой структуры, соответствующих результатам расчета при варьировании всех проектных параметров. С учетом антиградиента целевой функции оптимум находится в точке с координатами (38,5; 49) и доминантным ограничением является местная устойчивость конструкции.

При варьировании четырех проектных параметров (при вычислении площади кольцевых ребер исходя из предела прочности ребер) алгоритм симплексного поиска дает следующий результат: угол наклона спирального ребра к образующей  $38,67^\circ$ , количество пар спиральных ребер 48,86, высота сечения ребра 3,13 мм и ширина спирального ребра 5,234 мм.

В работе [69] указано, что при проектировании конструкций учитывается запас прочности не менее 1,25. При проведении оптимального расчета с фиксированным значением количества спиральных ребер с учетом запаса по прочности были получены следующие значения: угол наклона спиральных ребер –  $38,5^\circ$ , высота сетчатой структуры – 3,5мм, ширина

спирального ребра – 8мм и ширина кольцевого ребра – 4мм. При варьировании всех четырех факторов угол наклона равняется  $39^\circ$ , количество пар спиральных ребер – 52, высота сетчатой структуры – 3,5 мм, ширина спирального ребра – 5мм и ширина кольцевого ребра – 2,5 мм.

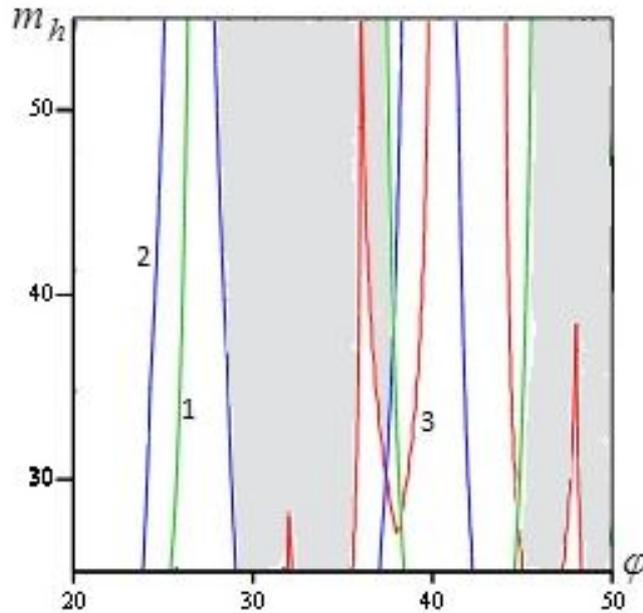


Рисунок 5.1 – Область допустимых значений в плоскости  $\varphi - m_h$ :

1 – ограничения по прочности, 2 – ограничения по общей устойчивости, 3- ограничения по местной устойчивости

Кроме того в работе [69] указано, что ограничения по жесткости являются определяющими и при этом запас прочности составляет 2. Результаты, полученные при данном запасе прочности, не отличаются от результатов, полученных при запасе прочности равном 1,25. Полученные результаты незначительно отличаются от результатов, полученных без учета запаса прочности. Поэтому результаты численного моделирования данных конструкций не приводятся.

Топологическая структура сетчатых моделей приведена на рисунке 5.2. В таблице 5.1 приведены результаты оптимизационного расчета и результаты численных расчетов напряженно-деформированного состояния моделей при осевом сжатии. Под номером 1 обозначены результаты проектного расчета

по аналитическим зависимостям по выбору оптимальных параметров при действии сжимающих нагрузок, под номером 2 – результаты расчета параметров методом перебора. Под номерами 3 и 4 – результаты применения рассматриваемого алгоритма с ограничениями (5.3)-(5.6) при фиксированном и переменном числе пар спиральных ребер соответственно. Под номерами 5 и 7 – результаты применения рассматриваемого алгоритма при запасе прочности 1,25 при фиксированном и переменном числе пар спиральных ребер соответственно. И под номерами 6 и 8 – при запасе прочности равном 2.

Представленные в таблице максимальные значения напряжений в спиральных  $\sigma_{\min}$  и кольцевых  $\sigma_{\max}$  ребрах и максимальные перемещения по образующей  $u_s$  и нормали к поверхности  $u_n$  и первые собственные значения  $\lambda$  были получены в результате численного расчета в пакете программ «Композит НК Анизогрид» [78, 103] на основе дискретной модели [52]. Для моделирования конструкции использовались конечные элементы типа балки Тимошенко, приложение нагрузки моделировалось с использованием «жесткого» узла [79].

На рисунке 5.3 представлены распределения напряжений в спиральных и кольцевых ребрах конструкции по высоте.

Таблица 5.1 – Результаты оптимального проектирования

Номер расчета	Результаты оптимизационного расчета					Объем $V, \text{ м}^3$	Напряженно-деформированное состояние				
	$\varphi$	$m_h$	h, мм	$\delta_h$ , мм	$\delta_c$ , мм		$\sigma_{\min}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{\max}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$u_s$ , мм	$u_n$ , мм	$\lambda$
1	24,5	32	21	6	3	429,9	-26,4	7,1	6	1,8	0.0122
2	36	32	14	4	1	665,9	-67,9	50,8	31	11,5	0.017
3	39	32	4	8	3,5	130,9	-70,4	55,33	54,8	13,2	0.0122
4	38,5	49	4	5,5	3	177,8	-44,8	39,5	43,1	8,2	0.0111

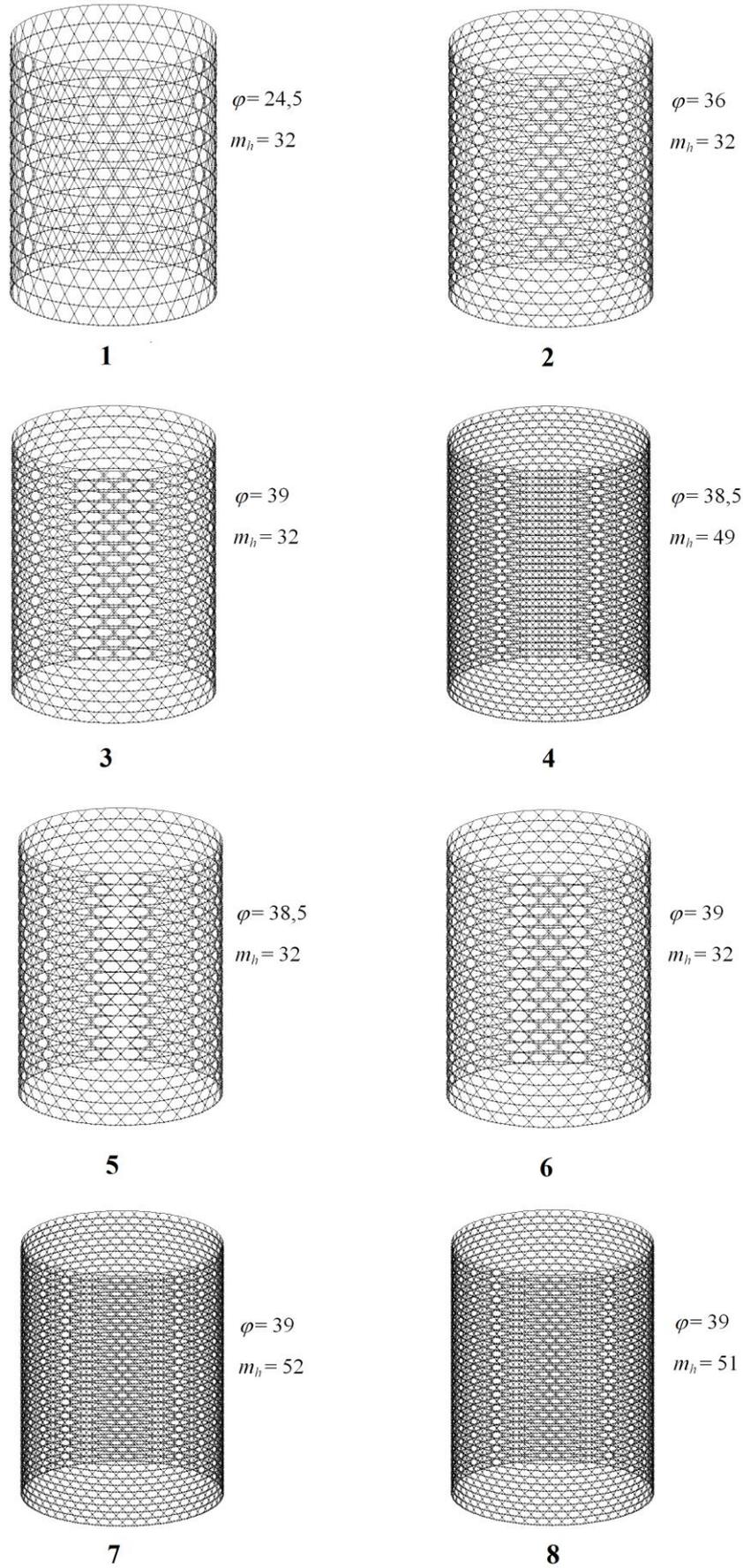


Рисунок 5.2 – Топологическая структура сетчатых конструкций, полученная в результате оптимизации

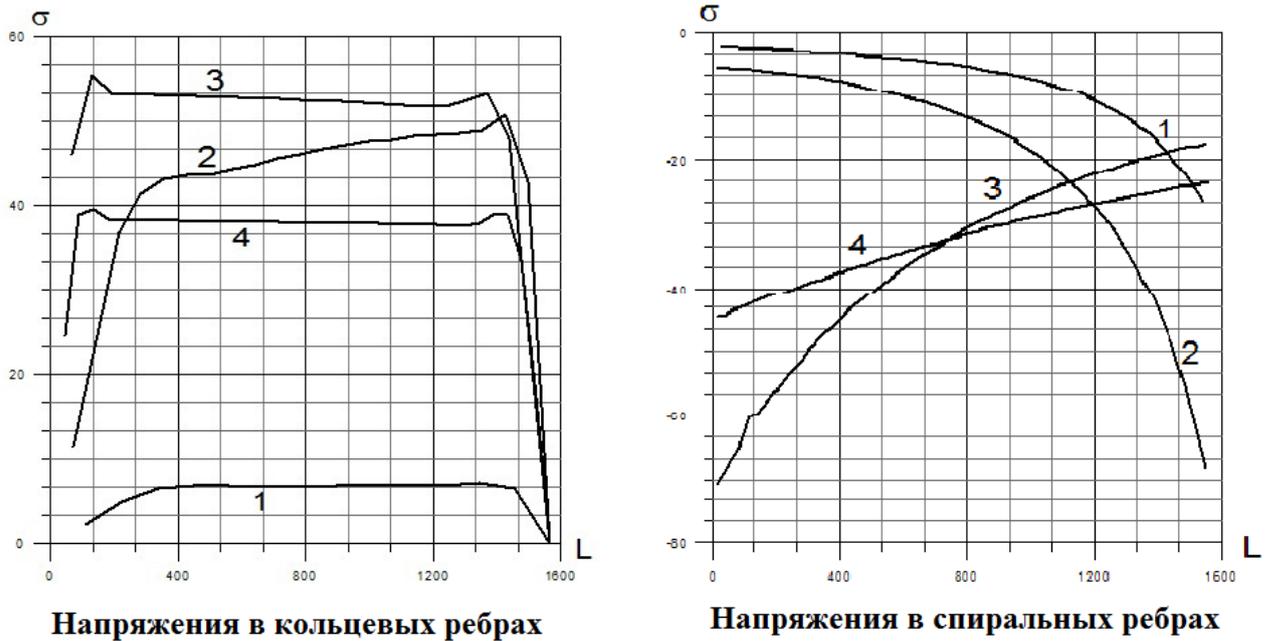


Рисунок 5.3 – Значения напряжений в ребрах конструкции:

- 1 – аналитические зависимости по выбору оптимальных параметров;
- 2 – циклический перебор по аналитическим зависимостям;
- 3 – симплексный поиск с фиксированным числом спиральных ребер;
- 4- симплексный поиск

Расхождения с результатами, представленными в работе [69] объясняются тем, что расчетные формулы (5.3)-(5.6) не учитывают ограничения по жесткости, принятые в работе и в вычислениях значение ширины сечения кольцевого ребра вычисляется по формуле (5.1). Можно заметить, что модель, полученная в результате симплексного поиска, обладает меньшей массой, чем исходная модель, при выполнении ограничений на прочность и устойчивость.

#### 5.1.2 Оптимизация конической сетчатой оболочки регулярной структуры без обшивки

Рассмотрим применение алгоритма оптимизации на примере переходного отсека, предназначенного для обеспечения механического интерфейса между

ракетой-носителем и космическим аппаратом, и состоящем из гладкой или подкрепленной конической оболочки и стыковочных шпангоутов [62]. Коническая оболочка имеет вид анизогридной оболочки с регулярной структурой ребер (рисунок 5.4), со следующими габаритными параметрами [43]:

- радиус верхнего основания  $R_0 = 650\text{мм}$ ,
- радиус нижнего основания  $R_z = 1250\text{мм}$ ,
- длина конструкции  $L = 900\text{мм}$ ,
- модуль упругости вдоль ребра  $E_1 = 6490\text{кгс/мм}^2$ ,
- модуль упругости поперек ребра  $E_2 = 647\text{кгс/мм}^2$ ;
- модуль сдвига  $G = 380\text{кгс/мм}^2$ ;
- коэффициенты Пуассона  $\mu_1 = 0,21$ ,  $\mu_2 = 0,021$ .

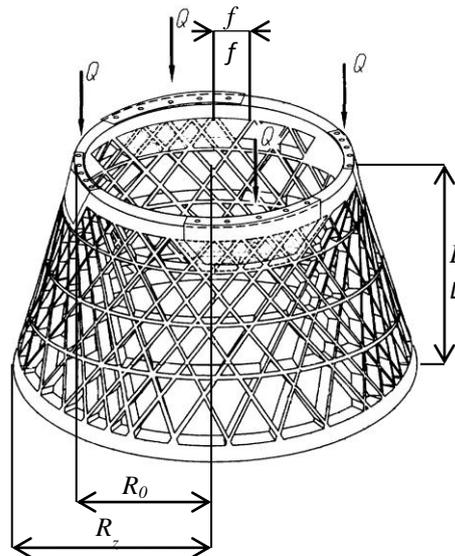


Рисунок 5.4 – Общий вид сетчатой конструкции в виде усеченного конуса

При решении задачи оптимального проектирования силовых конструкций одним из критериев оптимальности выступает минимум массы конструкции:

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2\pi \frac{R_z + R_0}{2} L h \rho_h \left( 2m_h \frac{\delta_h}{a_h} + m_c \frac{\rho_c}{\rho_h} \frac{\delta_c}{a_c} \right) \quad (5.7)$$

где  $R_z$  – радиус нижнего основания,

$R_0$  – радиус верхнего основания,  
 $L$  – длина конструкции,  
 $m_h$  – количество пар спиральных ребер,  
 $m_c$  – количество кольцевых ребер,  
 $h$  – толщина структуры ребер,  
 $\delta_h$  и  $\delta_c$  – толщины ребер,  
 $a_h$  и  $a_c$  – расстояние между ребрами,  
 $\rho_h$  и  $\rho_c$  – плотность материалов ребер.

Для вектора варьируемых параметров  $p$  ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} |\sigma(p)| \leq \sigma_{кр}, \\ p_i \geq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

где  $p_i$  – набор варьируемых параметров,

$\sigma_{кр}$  – предел прочности материала,

$\sigma(p_i)$  – максимальные значения напряжений в спиральных и кольцевых ребрах при текущем наборе параметров.

Значения откликов для получения функций ограничений получены с помощью пакета программ «Композит НК Анизогрид» [53], с использованием дискретной модели конического адаптера, сгенерированной во внешнем приложении [54].

Для оценки влияния проектных параметров на напряженно-деформированное состояние конструкции и получения аппроксимационных выражений максимальных напряжений, используя полнофакторную модель типа 3<sup>n</sup>. В качестве варьируемых параметров используются угол наклона спиральных ребер (по отношению к образующей)  $\varphi$ , количество пар спиральных ребер  $m_h$ , толщина сетчатой структуры (высота сечений ребер)  $h$ , толщины спиральных и кольцевых ребер  $\delta_h$  и  $\delta_c$ . В таблице 5.2 представлены предельные значения факторов.

В качестве откликов вычислительного эксперимента будут рассматриваться предельные значения напряжений в спиральных  $\sigma_{\min}$  и кольцевых  $\sigma_{\max}$  ребрах. На рисунке 5.5 представлен внешний вид конструкции при различных наборах варьируемых параметров.

Таблица 5.2 – Кодирование факторов

Фактор	Код фактора	Параметры варьирования		
		нижний предел	верхний предел	шаг
угол наклона спиральных ребер (по отношению к образующей) $\varphi$ , °	$x_1$	15	89	37
количество пар спиральных ребер $m_h$	$x_2$	10	90	40
толщина сетчатой структуры (высота сечений ребер) $h$ , мм	$x_3$	10	40	15
толщины спиральных ребер $\delta_h$ , мм	$x_4$	1	7	3
толщины кольцевых ребер $\delta_c$ , мм	$x_5$	1	7	3

Для наглядного представления, рассмотрим задачу оптимизации при постоянных геометрических значениях размеров сечений:  $h = const$ ,  $\delta_h = const$  и  $\delta_c = const$ . На рисунке 5.6-а изображены линии уровня целевой функции и область допустимых значений в плоскости  $\varphi - m_h$ . Траектория движения симплекса показана на рисунке 5.6-б.

Результат работы алгоритма сходится к точке с параметрами  $\varphi = 50,2^\circ$  и  $m_h = 42,6$ . С учетом геометрического смысла параметров полученные

значения скорректированы к значениям  $\varphi = 50^\circ$  и  $m_h = 43$ . На рисунке 5.7 представлена геометрическая структура модели с данными параметрами и результат расчета напряженно деформированного состояния полученной модели. Результаты численного расчета показывают, что все ограничения выполняются.

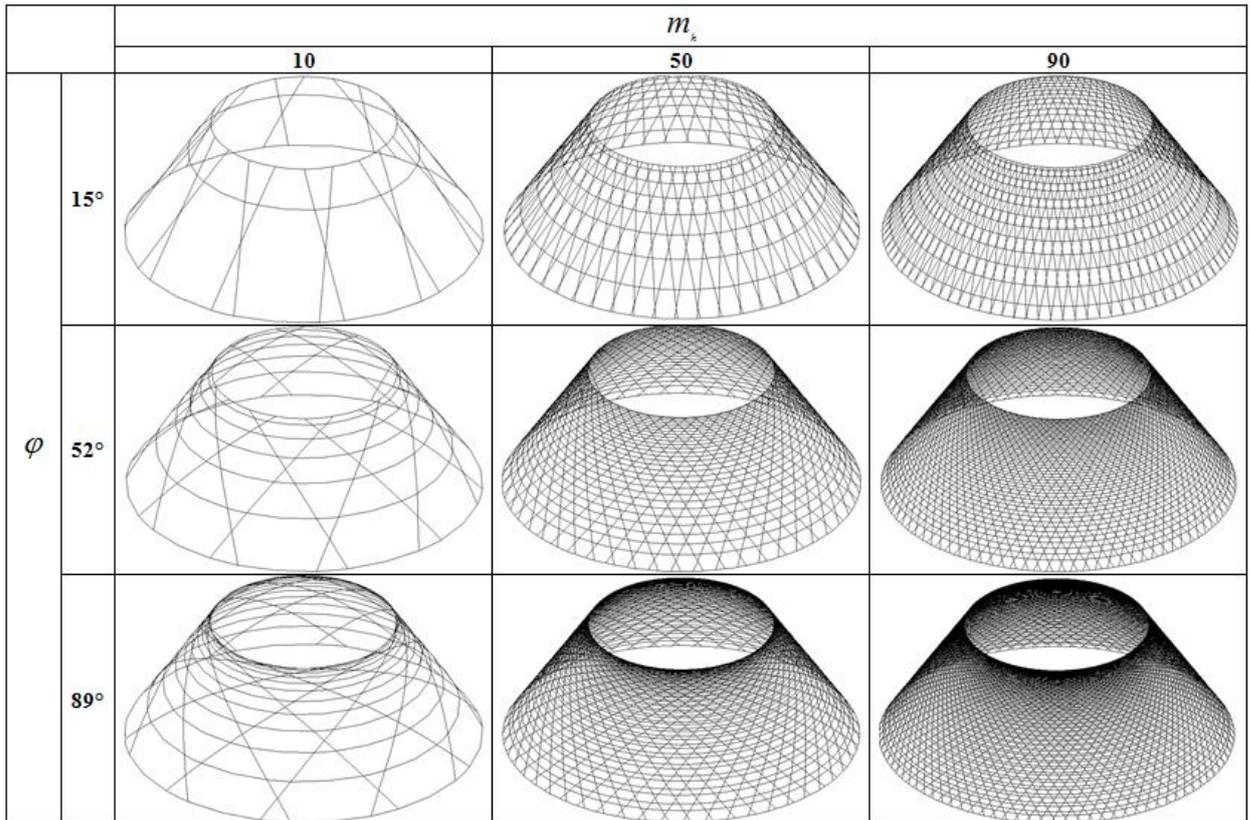


Рисунок 5.5 – Вид сетчатой структуры, в зависимости от угла наклона спиральных ребер  $\varphi$  и количества спиральных ребер  $m_h$

Рассмотрим задачу оптимизации геометрических параметров сетчатой структуры: толщина структуры (высота сечений ребер)  $h$ , толщины спиральных и кольцевых ребер  $\delta_h$  и  $\delta_c$ . В качестве откликов вычислительного эксперимента будут рассматриваться максимальные значения напряжений в спиральных  $\sigma_{\min}$  и кольцевых  $\sigma_{\max}$  ребрах, первые значения собственных чисел  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . В этом случае для вектора варьируемых параметров  $p$  ограничения будет иметь вид:

$$\begin{cases} |\sigma(p)| \leq \sigma_{кр}, \\ |\lambda(p)| \leq 1, \\ p_i \geq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

где  $\lambda(p_i)$  – значение собственных чисел при текущем наборе параметров.

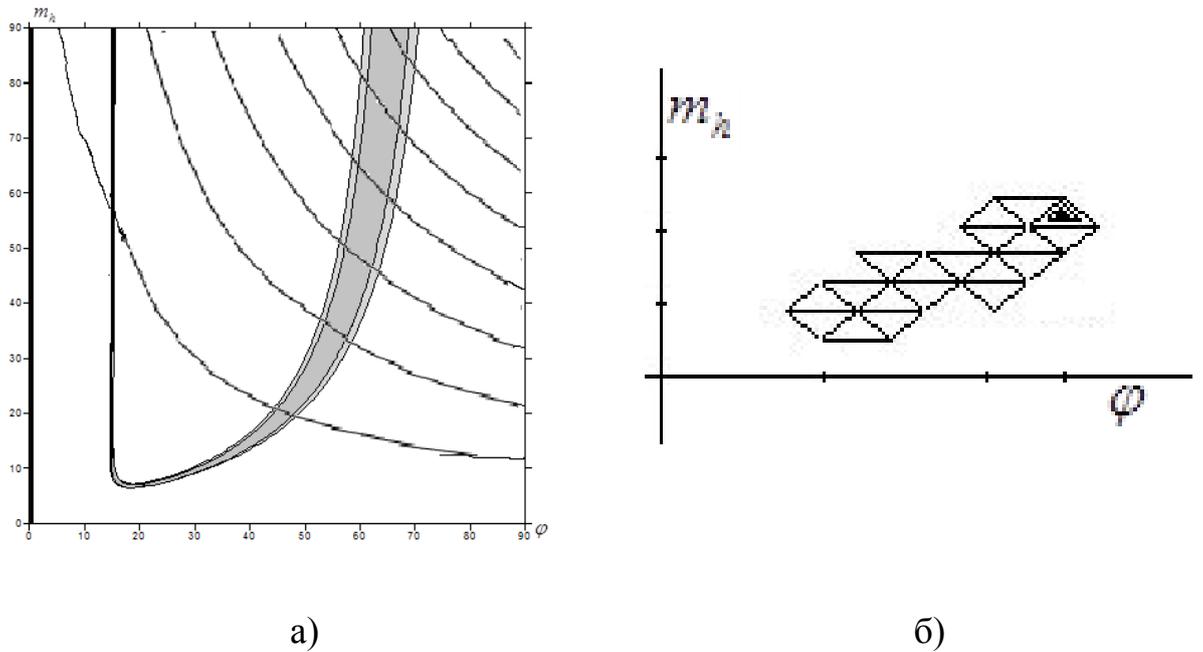


Рисунок 5.6 – Область допустимых значений (а) и траектория движения симплекса (б) при  $h = 25$  мм,  $\delta_h = 4$  мм и  $\delta_c = 4$  мм

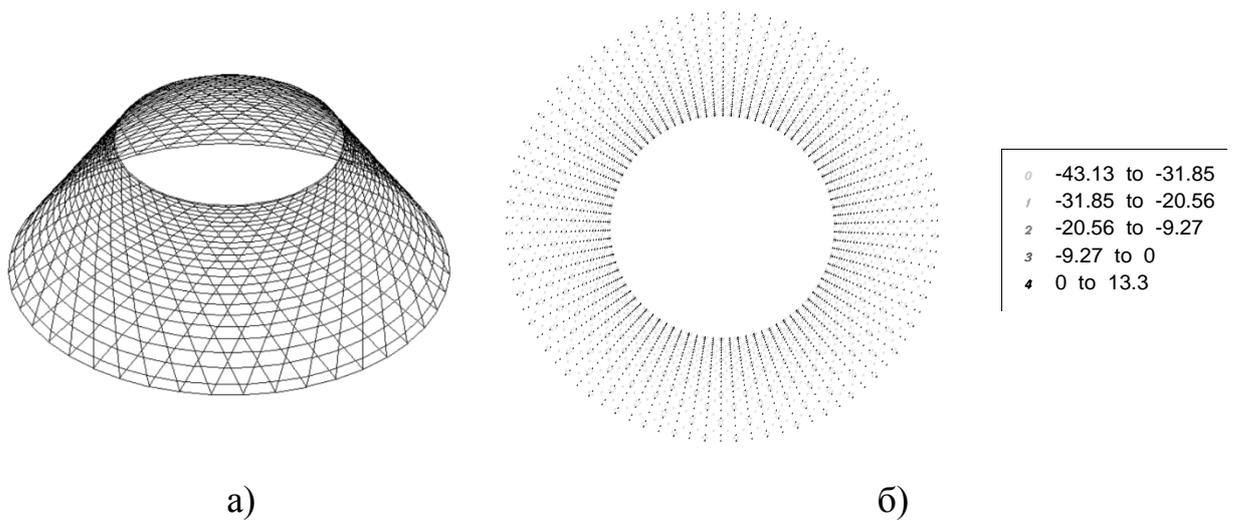


Рисунок 5.7 – Напряженно-деформированное состояние конструкции

Для оценки влияния параметров сечения на напряженно-деформированное состояние конструкции, используя трёхфакторную квадратичную модель, в качестве варьируемых параметров будут использоваться толщина сетчатой структуры (высота сечений ребер)  $h$ , толщины спиральных и кольцевых ребер  $\delta_h$  и  $\delta_c$ . В таблице 5.3 представлены предельные значения факторов.

Таблица 5.3 – Кодирование факторов

Фактор	Код фактора	Параметры варьирования		
		нижний предел	верхний предел	шаг
толщина сетчатой структуры (высота сечений ребер) $h$ , мм	$x_1$	10	40	15
толщины спиральных ребер $\delta_h$ , мм	$x_2$	2,5	7,5	2,5
толщины кольцевых ребер $\delta_c$ , мм	$x_3$	2,5	7,5	2,5

В качестве откликов вычислительного эксперимента будут рассматриваться предельные значения напряжений в спиральных  $\sigma_{\min}$  и кольцевых  $\sigma_{\max}$  ребрах, первые значения собственных чисел  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице А.1 приложения А.

Используя модуль для автоматизированного построения аппроксимационных функций откликов по результатам вычислительных экспериментов, построим зависимости линейного, квадратичного и обратно пропорционального вида для поля откликов предельных значений напряжений в спиральных и кольцевых ребрах:

$$\sigma_{\min} = -203.46 + 2.79x_1 + 13.23x_2 + 1.09x_3, \quad (5.10)$$



$$\lambda_1 = -0.68 + 0.011x_1 + 0.05x_2 + 0.067x_3, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & -0.789 + 0.026x_1 + 0.1798x_2 + 0.232x_3 - 0.0079x_1x_2 - 0.007x_1x_3 - \\ & - 0.021x_2x_3 + 0.000085x_1^2 - 0.0109x_2^2 - 0.0166x_3^2 + 0.00226x_1x_2x_3, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\lambda_1 = 0.956 - \frac{3.96}{x_1} - \frac{0.95}{x_2} - \frac{1.29}{x_3}, \quad (5.18)$$

$$\lambda_2 = -0.675 + 0.0106x_1 + 0.0497x_2 + 0.069x_3, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & -0.764 + 0.025x_1 + 0.1724x_2 + 0.2318x_3 - 0.0083x_1x_2 - 0.007x_1x_3 - \\ & - 0.0224x_2x_3 + 0.00009x_1^2 - 0.00899x_2^2 - 0.01627x_3^2 + 0.00229x_1x_2x_3, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\lambda_2 = 0.933 - \frac{3.717}{x_1} - \frac{0.9248}{x_2} - \frac{1.3057}{x_3}, \quad (5.21)$$

$$\lambda_3 = -0.595 + 0.011x_1 + 0.0713x_2 + 0.03338x_3, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & 0.122115 - 0.0041x_1 - 0.05308x_2 - 0.01245x_3 + 0.00049x_1x_2 - 0.0015x_1x_3 - \\ & - 0.0064x_2x_3 - 0.00011x_1^2 + 0.00556x_2^2 + 0.0027x_3^2 + 0.000711x_1x_2x_3, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\lambda_3 = 0.856 - \frac{4.0644}{x_1} - \frac{1.194}{x_2} - \frac{0.558}{x_3}. \quad (5.24)$$

Представим значения целевой функции в линейном виде, аппроксимировав результаты уравнения (5.7). На рисунках 5.9 и 5.10 представлены проекции антиградиента целевой функции на некоторые константные значения проектных параметров для линейного и нелинейного представления целевой функции.

Преобразуем условия (5.9) в форму для построения предикатов, рассматривая  $\sigma_{kp} = 100 \frac{кгс}{мм^2}$ :

$$\begin{cases} 1 - |\sigma(p)| / \sigma_{kp} \geq 0, \\ 1 - |\lambda(p)| \geq 0, \\ p_i \geq 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

На рисунке 5.11 представлены проекции ограничений (5.10), (5.13), (5.16), (5.19), (5.22) на некоторые константные значения проектных параметров.

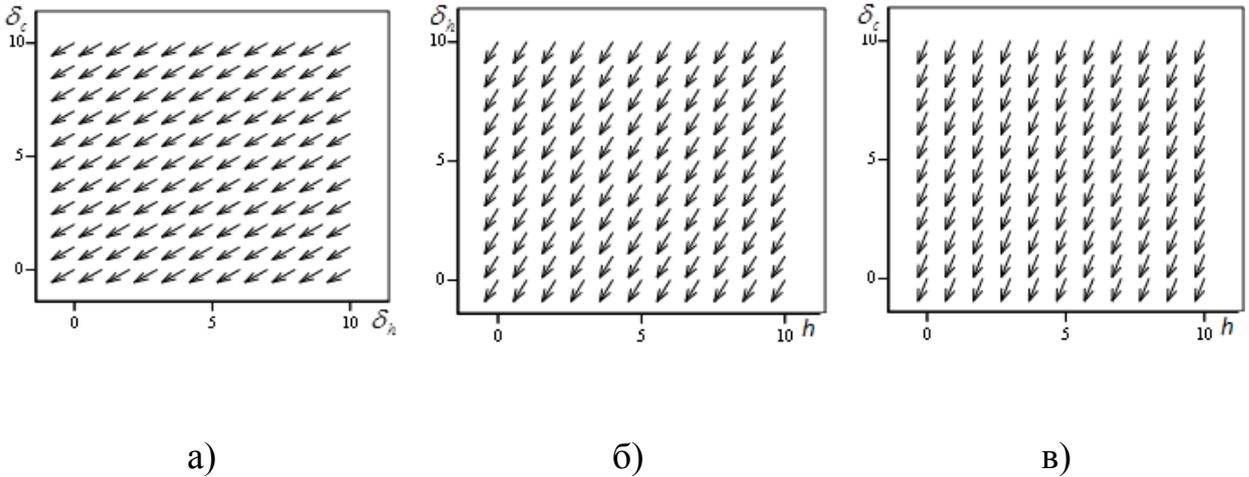


Рисунок 5.9 – Проекция антиградиента линейной аппроксимации на плоскость  $\delta_h - \delta_c$  (а),  $h - \delta_c$  (б),  $h - \delta_h$  (в)

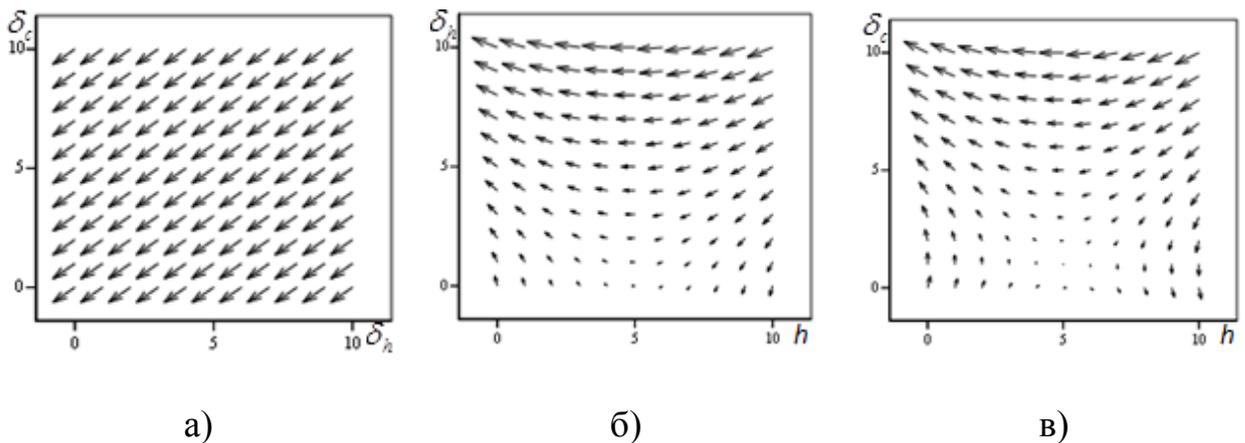
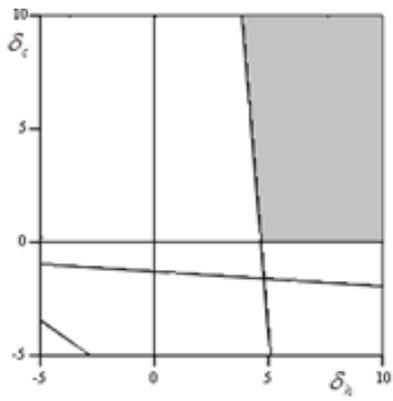
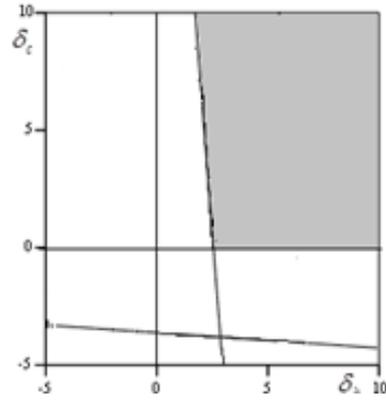


Рисунок 5.10 – Проекция антиградиента функции массы на: плоскость  $\delta_h - \delta_c$  (а),  $h - \delta_c$  (б),  $h - \delta_h$  (в)

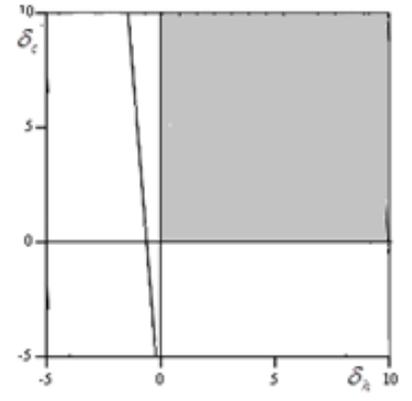
Анализируя проекции линейных ограничений можно отметить, что оптимальное значение параметра  $x_1$  - высоты сечения ребер - не превышает 10 мм (рисунок 5.11–а), значение параметра  $x_2$  - ширины сечения спиральных ребер - больше 5 мм (рисунок 5.11– е), причем значение параметра  $x_3$  - ширины сечения кольцевых ребер - должно быть меньше ширины спиральных ребер (рисунок 5.11– е).



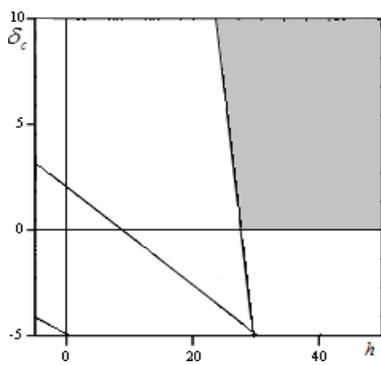
а)



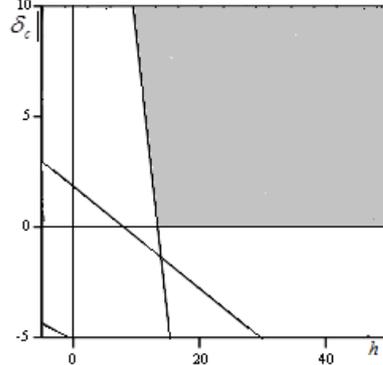
б)



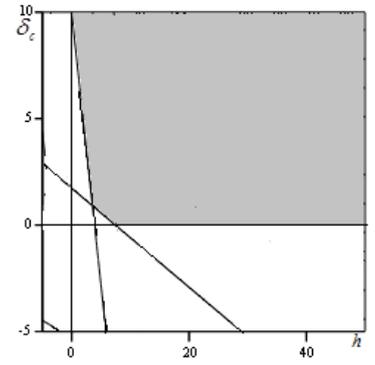
в)



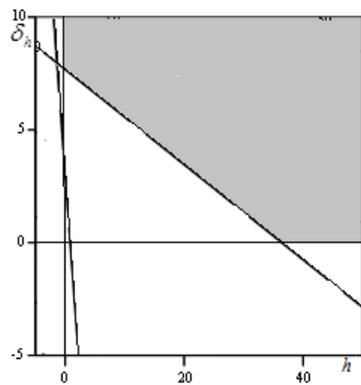
г)



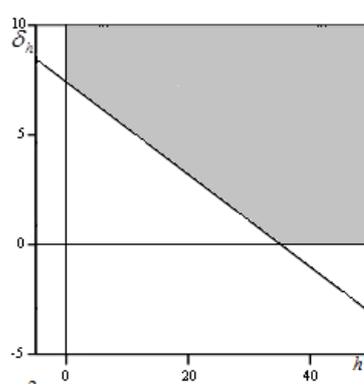
д)



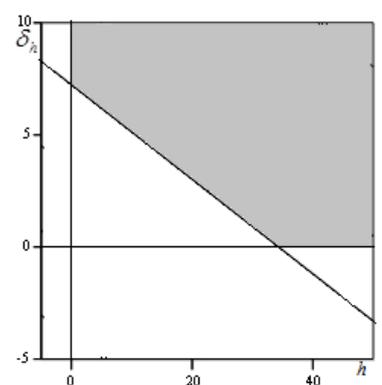
е)



ж)



з)



и)

Рисунок 5.11 – Проекция линейных аппроксимаций ограничений на:

плоскость  $\delta_h - \delta_c$  при: а)  $h=15$ мм, б)  $h=25$ мм, в)  $h=40$ мм,

плоскость  $h - \delta_c$  при: г)  $\delta_h = 2$ мм, д)  $\delta_h = 5$ мм, е)  $\delta_h = 7$ мм,

плоскость  $h - \delta_h$  при: ж)  $\delta_c = 2$ мм, з)  $\delta_c = 5$ мм, и)  $\delta_c = 7$ мм

При значениях начальной точки  $(20, 40, 40)$  и начального размера симплекса 2 в пространстве варьирования параметров алгоритм достигает точки  $(9,7, 7,01, 5,03)$ , что соответствует рисункам 5.11–е и 5.11–з при наложении на них антиградиента целевой функции.

На рисунке 5.12 представлены проекции ограничений  $(5,11)$ ,  $(5,14)$ ,  $(5,17)$ ,  $(5,20)$ ,  $(5,23)$  на некоторые константные значения проектных параметров.

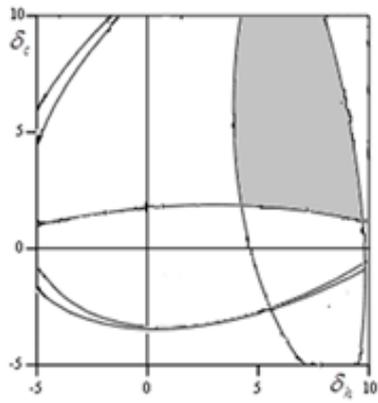
Алгоритм движения симплекса при значении начальной точки  $(40, 15, 15)$  и при начальном размере симплекса 1 и начальном размере симплекса 2 приводит к точке с координатами  $(10,288, 5,244, 2,455)$ . Алгоритм оптимизации при значениях начальной точки  $(20, 40, 40)$  и  $(1, 1, 1)$  при различных начальных значениях симплекса приводит к той же точке  $(10,288, 5,244, 2,455)$ . Изменение времени решения незначительно.

Таким образом, выбор начальной точки для данной задачи не оказывает влияния на достижение результата, а начальный размер симплекса влияет на количество итераций необходимых для достижения цели.

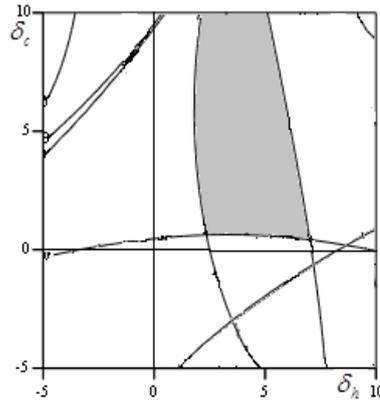
На рисунке 5.13 представлены проекции ограничений  $(5,12)$ ,  $(5,15)$ ,  $(5,18)$ ,  $(5,21)$ ,  $(5,24)$  на некоторые константные значения проектных параметров.

Алгоритм оптимизации при значениях начальной точки  $(1, 1, 1)$  и начального размера симплекса 2 в пространстве варьирования параметров приводит к точкам с координатами  $(13,321, 3,61, 1,61)$  и  $(13,108, 3,676, 1,625)$  для линейной аппроксимации целевой массы и нелинейной целевой функции соответственно.

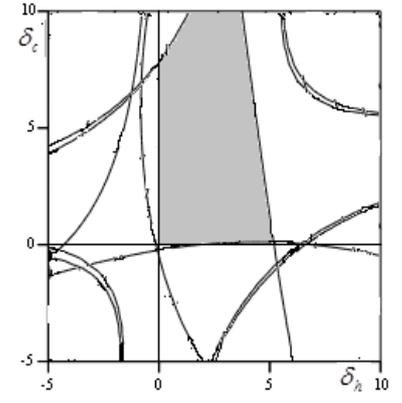
В таблице 5.4 представлены результаты всех оптимизационных расчетов для данной задачи. Учитывая физический смысл варьируемых параметров целесообразно использовать в качестве функций ограничений обратно пропорциональные функции  $(5,12)$ ,  $(5,15)$ ,  $(5,18)$ ,  $(5,21)$ ,  $(5,24)$ .



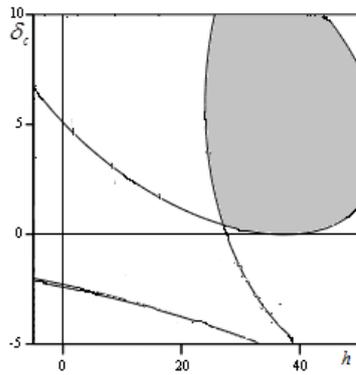
а)



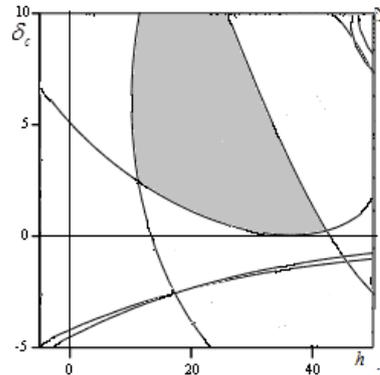
б)



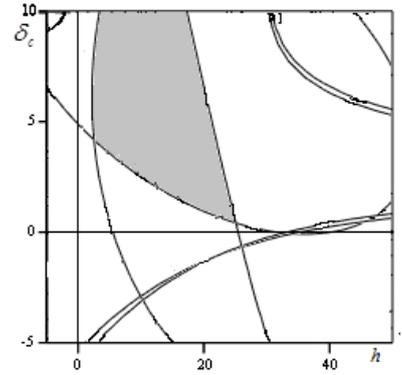
в)



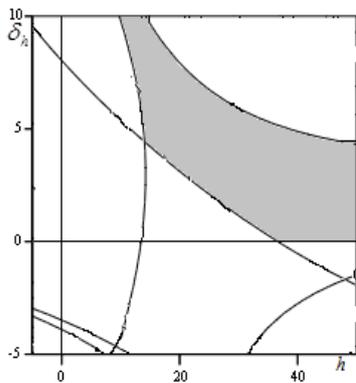
г)



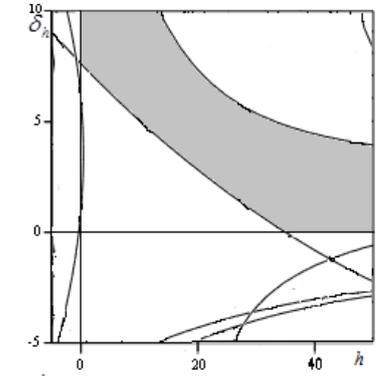
д)



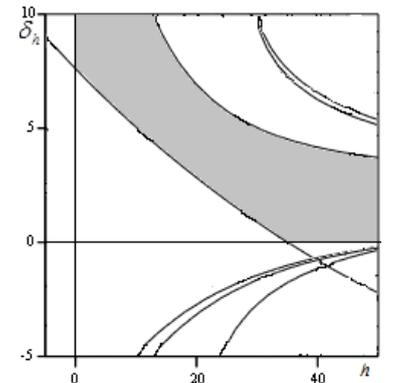
е)



ж)



з)



и)

Рисунок 5.12 – Области допустимых решений на проекции  
 квадратичных аппроксимаций ограничений на:  
 плоскость  $\delta_h - \delta_c$  при: а)  $h=15\text{мм}$ , б)  $h=25\text{мм}$ , в)  $h=40\text{мм}$ ,  
 плоскость  $h - \delta_c$  при: г)  $\delta_h = 2\text{мм}$ , д)  $\delta_h = 5\text{мм}$ , е)  $\delta_h = 7\text{мм}$ ,  
 плоскость  $h - \delta_h$  при: ж)  $\delta_c = 2\text{мм}$ , з)  $\delta_c = 5\text{мм}$ , и)  $\delta_c = 7\text{мм}$

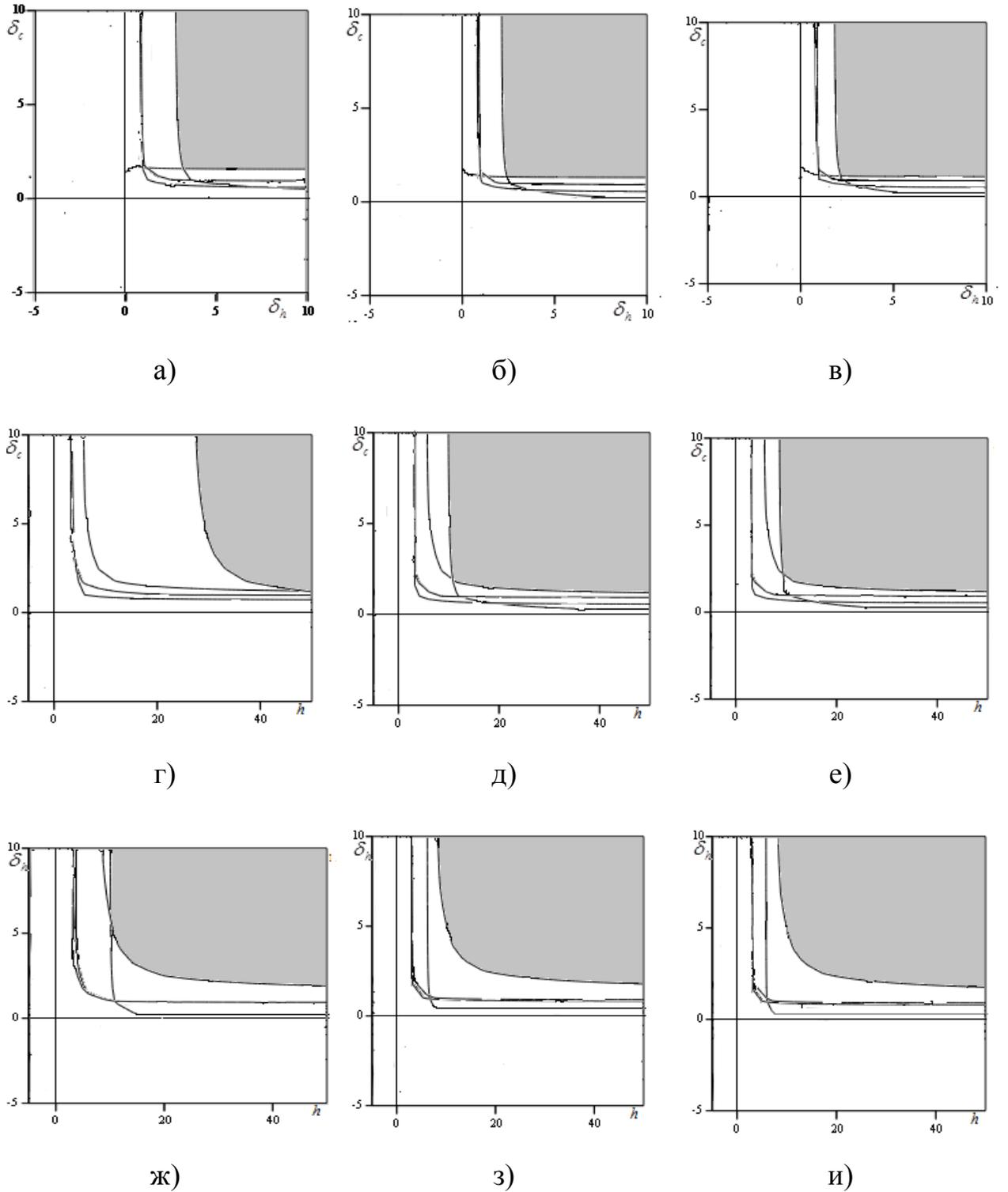


Рисунок 5.13 – Проекция аппроксимаций ограничений на:  
 плоскость  $\delta_h - \delta_c$  при: а)  $h=15\text{мм}$ , б)  $h=25\text{мм}$ , в)  $h=40\text{мм}$ ,  
 плоскость  $h - \delta_c$  при: г)  $\delta_h = 2\text{мм}$ , д)  $\delta_h = 5\text{мм}$ , е)  $\delta_h = 7\text{мм}$ ,  
 плоскость  $h - \delta_h$  при: ж)  $\delta_c = 2\text{мм}$ , з)  $\delta_c = 5\text{мм}$ , и)  $\delta_c = 7\text{мм}$

При достижении размера симплекса меньше заданного порядка ( $10^{-6}$ ) полученное решение удовлетворяет ограничениям по прочности и габаритным размерам. Расчет на устойчивость конструкции так же показывает, что найденные параметры удовлетворяют условию устойчивости (значения собственных чисел не превосходит 1). В связи с ограничениями накладываемыми технологией производства, вектор полученных параметров требует корректировки в пределах области ограничений, с учетом целевой функции.

Таблица 5.4 – Результаты оптимизационных расчетов

Вид ограничений	Вид целевой функции	Значения проектных параметров		
		$h$ , мм	$\delta_h$ , мм	$\delta_c$ , мм
Линейные функции	Нелинейная форма	9,7	7	5
Функции второго порядка	Линейная форма	10,28	5,28	2,5
Обратные функции	Линейная форма	13,3	3,6	1,6
	Нелинейная форма	13,1	3,6	1,6

## 5.2 Оптимизация сетчатых конструкций нерегулярной структуры с обшивкой

Рассмотрим решение задачи оптимизации для сетчатой оболочечной конструкции с нарушениями регулярной структуры. В силу того, что при наличии вырезов в спиральных ребрах наблюдаются в том числе и напряжения растяжения, а в кольцевых – напряжения сжатия, а кроме того нужно учитывать напряжения в обшивке конструкции, количество ограничений значительно возрастает.

Конструкция представляет собой сетчатую цилиндрическую оболочку с двумя шестиугольными некомпенсированными вырезами, имеющую

однослойную обшивку. В качестве параметров оптимизации рассмотрим высоту выреза  $a_n$ , ширину выреза  $b_n$  и расстояние между вырезами  $\delta_n$ . Общий вид конструкции представлен на рисунке 5.14.

Сетчатая конструкция имеет следующие габаритные и топологические параметры:

- высота конструкции  $L=1600$ мм;
- внешний радиус основания  $R=815$ мм;
- количество пар спиральных ребер  $m_h=64$ ;
- количество кольцевых ребер  $m_c=21$ ;
- высота сетчатой структуры  $h=30$ мм;
- толщина спирального ребра  $\delta_h=7.5$ мм;
- толщина кольцевого ребра  $\delta_c=7.5$ мм;
- толщина обшивки  $h_0=2$  мм.

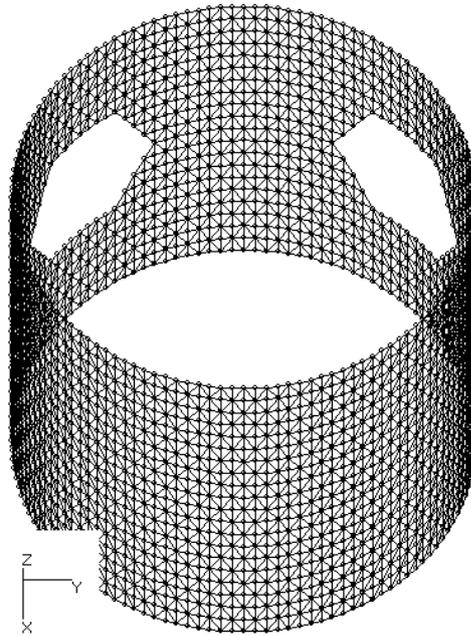


Рисунок 5.14 – Общий вид оребренной оболочки с двумя шестиугольными вырезами

Кодирование факторов представлено в таблице 5.5. На рисунке 5.15 представлено распределение напряжений по образующей в обшивке конструкции при некоторых значениях варьируемых параметров.

Функцию массы для данной конструкции в зависимости от параметров оптимизации можно представить в следующем виде:

$$z(x_1, x_2, x_3) = M_s - 2 \cdot M_n(x_2, x_3), \quad (5.26)$$

где  $M_s$  - масса орбренной оболочки без вырезов, а  $M_n(x_2, x_3)$  - масса сетчатой структуры с обшивкой, имеющей формы и размер выреза. Причем можно заметить, что параметр варьирования  $x_1$  не оказывает влияния на целевую функцию.

Таблица 5.5 – Кодирование факторов

Фактор	Код фактора	Параметры варьирования		
		нижний предел	верхний предел	шаг
расстояние между вырезами $\delta_n$	$x_1$	8	32	2
ширина выреза $b_n$	$x_2$	6	26	2
высота выреза $a_n$	$x_3$	3	5	1

Область ограничений будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_s| < \sigma_{кр}^0, \\ |\sigma_t| < \sigma_{кр}^0, \\ |\sigma_h| < \sigma_{кр}, \\ |\sigma_c| < \sigma_{кр}, \\ \delta_n < 2\pi R - 2b_n, \\ b_n < \pi R, \\ 0 < a_n < L, \\ b_n > 0, \\ \delta_n > b_n. \end{array} \right. \quad (5.27)$$

где  $\sigma_s$  - напряжения по образующей в обшивке,  $\sigma_t$  - напряжения в обшивке,  $\sigma_h$  - напряжения в спиральных ребрах,  $\sigma_c$  - напряжения в кольцевых ребрах,  $\sigma_{кр}$  - предел прочности в реберной структуре,  $\sigma_{кр}^0$  - предел прочности в обшивке конструкции.

Ограничения по прочности, полученные из результатов вычислительного эксперимента, будут иметь следующий вид:

- для спиральных ребер:

$$\left| -15.253 + \frac{13.262}{x_1} + \frac{65.074}{x_2} + \frac{2.562}{x_3} \right| \leq 100; \quad (5.28)$$

$$\left| 2.2446 + \frac{3.762}{x_1} - \frac{15.259}{x_2} + \frac{0.534}{x_3} \right| \leq 100; \quad (5.29)$$

- для кольцевых ребер:

$$\left| -2.698 + \frac{5.627}{x_1} + \frac{10.4599}{x_2} + \frac{1.593}{x_3} \right| \leq 100; \quad (5.30)$$

$$\left| 4.809 - \frac{8.895}{x_1} - \frac{19.657}{x_2} - \frac{1.094}{x_3} \right| \leq 100; \quad (5.31)$$

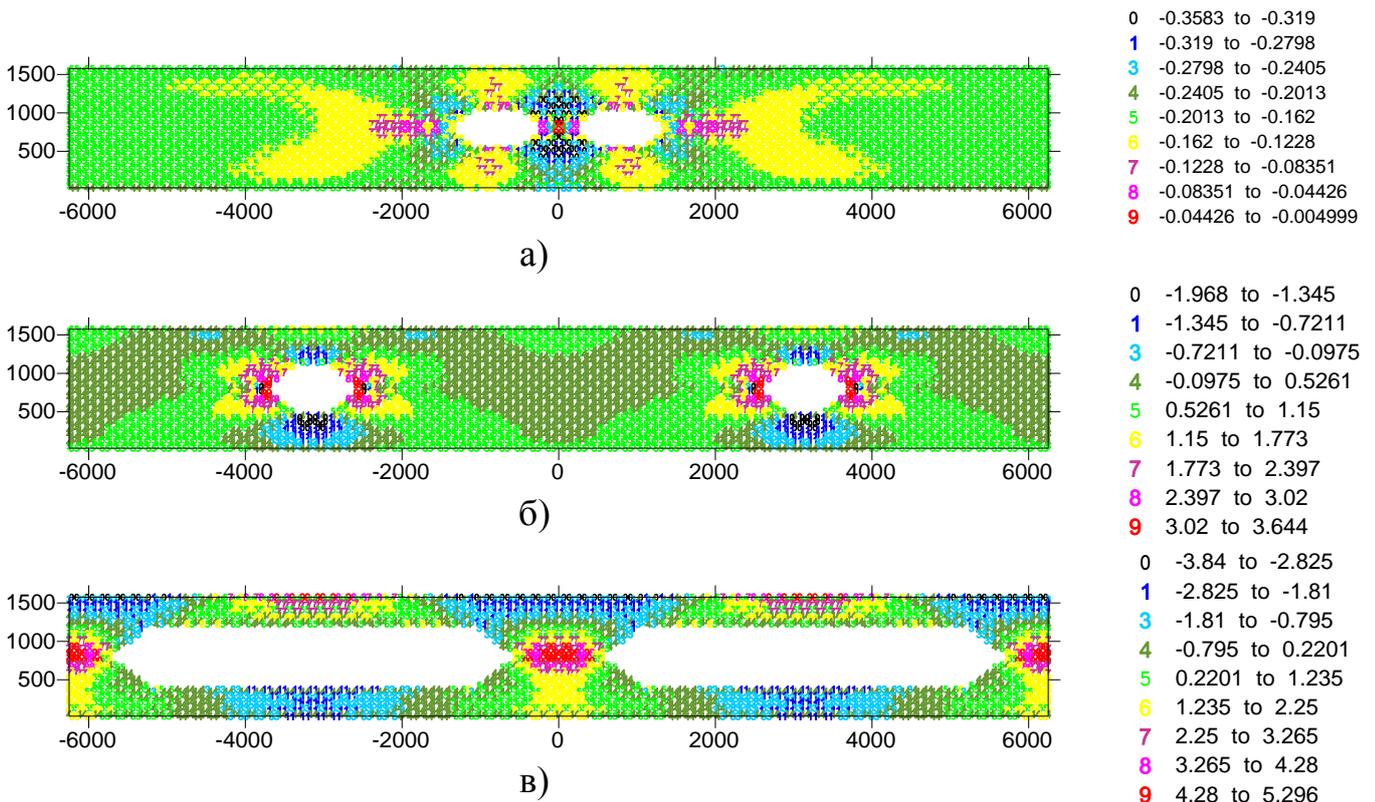


Рисунок 5.15 – Поля напряжений  $\sigma_s$  в обшивке конструкции при:

а)  $\delta_n = 8, b_n = 6, a_n = 3$ ; б)  $\delta_n = 32, b_n = 6, a_n = 4$ ; в)  $\delta_n = 32, b_n = 26, a_n = 4$

- для обшивки:

$$\left| -0.8857 - \frac{5.18}{x_1} + \frac{5.12}{x_2} - \frac{0.006}{x_3} \right| \leq 50; \quad (5.32)$$

$$\left| 1.464 + \frac{2.097}{x_1} - \frac{11.698}{x_2} - \frac{0.39}{x_3} \right| \leq 50; \quad (5.33)$$

$$\left| -8.999 - \frac{25.809}{x_1} + \frac{47.573}{x_2} + \frac{2.082}{x_3} \right| \leq 50; \quad (5.34)$$

$$\left| 18.282 + \frac{8.373}{x_1} - \frac{90.616}{x_2} - \frac{1.986}{x_3} \right| \leq 50. \quad (5.35)$$

Таким образом, область определения (5.27), с учетом всех ограничений по прочности и габаритам, будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi R - 2b_n - \delta_n > 0, \\ \pi R - b_n > 0, \\ a_n > 0, \\ b_n > 0, \\ \delta_n - b_n > 0, \\ L - a_n > 0, \\ 100 - \left| -15.253 + \frac{13.262}{x_1} + \frac{65.074}{x_2} + \frac{2.562}{x_3} \right| > 0, \\ 100 - \left| 2.2446 + \frac{3.762}{x_1} - \frac{15.259}{x_2} + \frac{0.534}{x_3} \right| > 0, \\ 100 - \left| -2.698 + \frac{5.627}{x_1} + \frac{10.4599}{x_2} + \frac{1.593}{x_3} \right| > 0, \\ 100 - \left| 4.809 - \frac{8.895}{x_1} - \frac{19.657}{x_2} - \frac{1.094}{x_3} \right| > 0, \\ 50 - \left| -0.8857 - \frac{5.18}{x_1} + \frac{5.12}{x_2} - \frac{0.006}{x_3} \right| > 0, \\ 50 - \left| 1.464 + \frac{2.097}{x_1} - \frac{11.698}{x_2} - \frac{0.39}{x_3} \right| > 0, \\ 50 - \left| -8.999 - \frac{25.809}{x_1} + \frac{47.573}{x_2} + \frac{2.082}{x_3} \right| > 0, \\ 50 - \left| 18.282 + \frac{8.373}{x_1} - \frac{90.616}{x_2} - \frac{1.986}{x_3} \right| > 0. \end{array} \right. \quad (5.36)$$

В результате работы алгоритма получается вектор значений, имеющий вид: (7,4; 5,45; 4,15). С учетом того, что параметрами являются размеры выреза в элементарных ячейках сетчатой структуры, их значения должны быть целочисленными. Таким образом, в результате алгоритма оптимизации получен следующий результат: расстояние между вырезами равно 8 элементарным ячейкам, ширина выреза 6 элементарных ячеек и высота выреза 4 элементарных ячейки.

На рисунке 5.16 представлены результаты расчета напряженно деформированного состояния данной конструкции с учетом результатов оптимизационного расчета.

Анализ приведенных полей напряжений (рисунок 5.16) конструкции с учетом структурных элементов показывает что, наибольших значений напряжения в обшивке и реберной структуре конструкции достигают вблизи вырезов и в зоне между вырезами. При этом значения максимальных напряжений не превышают критических значений по прочности конструкции и являются минимальными среди результатов численных расчетов в вычислительном эксперименте.

Таким образом, разработанные численный метод и алгоритм решения задачи оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций по массе с ограничениями на структурные параметры и переменные состояния применимы к сетчатым анизотридным конструкциям нерегулярной реберной структуры.

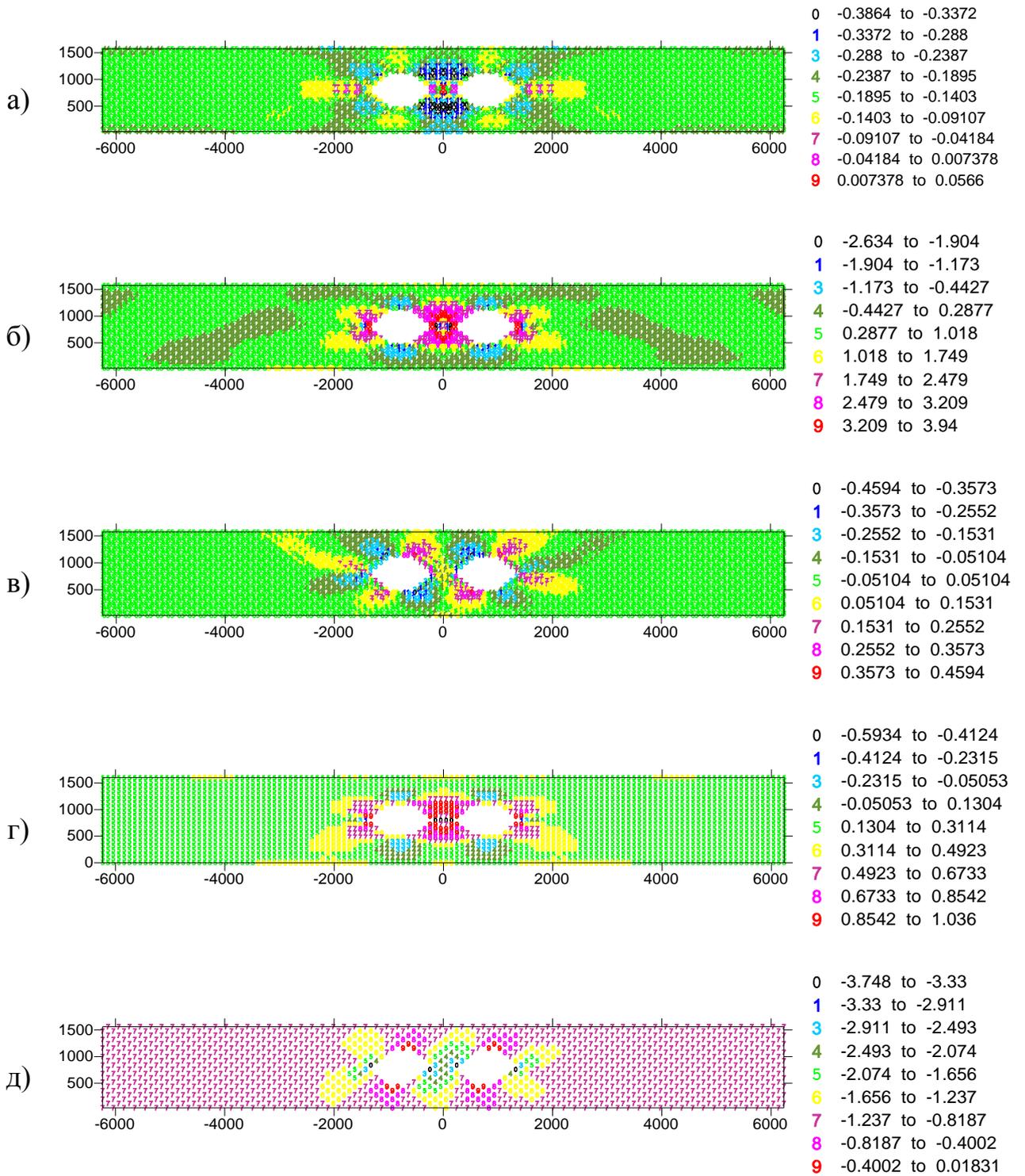


Рисунок 5.16 – Результаты численного расчета:

- а) поля напряжений  $\sigma_s$  в обшивке конструкции;
- б) поля напряжений  $\sigma_t$  в обшивке конструкции;
- в) поля напряжений  $\sigma_n$  в обшивке конструкции;
- г) поля напряжений  $\sigma_s$  в кольцевых ребрах конструкции;
- д) поля напряжений  $\sigma_s$  в спиральной конструкции

### 5.3 Выводы по главе

1. Решение, полученное разработанным автором численным алгоритмом, при оптимизации цилиндрической сетчатой оболочки регулярной структуры без обшивки согласуется с решением, найденным методом перебора, в основе которого лежат аналитические оценки структурных параметров конструкции А.Ф. Разина.

2. Полнота определения параметров состояния силовой анизотридной конструкции (данные по прочности, устойчивости и жесткости), учитывающихся в математической модели границы области допустимых решений, значительно влияет на результат численного расчета.

3. Необходим учет физического смысла функций ограничений (параметров состояния конструкции) и варьируемых проектных параметров конструкции при составлении аппроксимирующих функций, полученных по данным вычислительного эксперимента.

4. Вычислительные возможности и машинные ресурсы следует учитывать при постановке задачи, при выборе вида аппроксимации целевой функции и функций ограничений на каждой итерации алгоритма.

5. Разработанные метод и алгоритм применимы к решению задачи оптимального проектирования сетчатых анизотридных конструкций нерегулярной реберной структуры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена актуальная научно-практическая задача оптимального проектирования силовых сетчатых анизотридных конструкций реберной структуры с учетом множества ограничений.

1. Сформулирована постановка задачи оптимизации анизотридной конструкции по массе, в которой ограничения на структурные параметры и параметры состояния конструкции в виде неравенств приводятся к нормализованным  $R$ -предикатам границ, дающим оценку расстояния от пробной точки до границы.

2. Построена математическая модель объекта оптимизации посредством задания границы области допустимых решений задачи оптимизации, в виде аппроксимации кусочно-гладкой границы аппаратом  $R$ -функций.

3. Разработан численный метод расчета минимума целевой функции на основе симплексного поиска, в котором множество кусочно-гладких границ области допустимых решений заменяется единым выпуклым  $R$ -предикатом, а симплекс считается связанным с ближайшими границами посредством упругих связей, реакции которых влияют на направление поиска.

4. Разработан новый алгоритм оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций по массе с большим количеством ограничений по модели упругого симплекса.

5. Результаты решения тестовых задач подтвердили сходимость последовательности приближенного решения разработанного численного метода оптимизации к искомому решению. Результаты численного расчета согласуются с аналитическими решениями.

6. На базе пакета программ «Композит-НК Анизотрид» разработан модуль оптимизации, который предусматривает автоматическое выполнение всех шагов алгоритма оптимизации с учетом множества ограничений.

7. Результаты диссертации внедрены в ОАО ЦНИИСМ и используются для оптимального проектирования силовых анизотридных композиционных конструкций нерегулярной структуры, что подтверждено справкой об внедрении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ANSYS DesignXplorer <http://cae-expert.ru/product/ansys-designxplorer> – Назв. с экрана.
2. ANSYS [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://cae-expert.ru> – Назв. с экрана.
3. ANSYS Optimetrics [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://cae-expert.ru/product/ansys-optimetrics> – Назв. с экрана.
4. Bendsoe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem[Text] / M.P. Bendsoe // Structural Optimization, 1989, 1, p. 193 — 202.
5. Bendsoe, M. P. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. [Text] / M.P. Bendsoe, N. Kikuchi // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1988, 71(2), p. 197 — 224.
6. Bendsoe, M.P. Optimization of Structural Topology, Shape, and Material [Text]/ M.P. Bendsoe // Berlin: Springer, 1995, 271 p.
7. Bunakov, V.A. Design of Axially Compressed Composite Cylindrical Shells with Lattice Stiffeners [Text] / In:OptimalStructural Design // Technomic. – 1999. – P. 207 - 246.
8. CAD/CAE Design Technology for Reliability and Quality [Электронный ресурс] / OptiY. – Режим доступа: <http://www.optiy.eu/Features.html>. – Назв. с экрана.
9. Choi, K.K. Optimization of structures with repeated eigen-values. – In: Optimization of distributed parameter structures [Text] / K.K. Choi, E.J. Haug // Ed. E. J. Haug, J. Cea. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981, p. 219-277
10. Design for Real. Optimus [Электронный ресурс] / Noesis Solutions. – Режим доступа: <http://www.noesisolutions.com/Noesis/about-optimus>. – Назв. с экрана.
11. Dynamic software & engineering. CAE-based Robust Design Optimization. optiSLang [Электронный ресурс] / DYNARDO. –

- Режим доступа: <http://www.dynardo.de/en/software/optislang.html>.  
– Назв. с экрана.
12. Eschenauer, H.A. Topology optimization of continuum structures: A review [Text] / H.A. Eschenauer, N. Olhoff // Appl. Mech. Rev. 2001. V. 54. № 4. -P. 331–389.
  13. Haug, E.J. Optimization of distributed parameter structures with repeated eigenvalues. [Text] / E.J. Haug // In: New approaches to nonlinear problems in dynamic Ed. P. J. Holmes. Philadelphia: SIAM, 1980, p. 511-520
  14. HEEDS MDO – Multidisciplinary Design Optimization Software [Электронный ресурс] / Red Cedar Technology. – Режим доступа: [http://www.redcedartech.com/products/heeds\\_mdo](http://www.redcedartech.com/products/heeds_mdo). – Назв. с экрана.
  15. Huang, X. Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. [Text] / X. Huang, Y. M. Xie //Wiley, 2010, p. 223.
  16. IOSO – новейшая стратегия оптимизации [Электронный ресурс] / Сигма Технологии . – Режим доступа: <http://www.iosotech.com/ru/products.htm>. – Назв. с экрана.
  17. Isight & the SIMULIA Execution Engine. Process Automation and Design Exploration [Электронныйресурс] / Dassault Systèmes. – Режим доступа: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/isight-simulia-execution-engine/>. – Назв. с экрана.
  18. IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives [Text] / M.P. Bendsoe, N. Olhoff, O. Sigmund. // Dordrecht: Springer, 2006. – 608 p.
  19. Kimeme – A new flexible platform for multi objective and multidisciplinary optimization [Электронный ресурс ] / CyberDyne. – Режим доступа: <http://www.cyberdyne.it/>. – Назв. с экрана.

20. Komarov, V.A. New approach to improving the Aircraft. Structural design Process [Text] / V.A. Komarov, T.A. Weishaar // Journal of aircraft, March-April 2002, Volume 39, Number 2, P. 227-233
21. LIONoso – The integrated tool for Machine Learning and Intelligent Optimization [Электронный ресурс] / LIONlab. – Режим доступа:<http://lionoso.com/>. – Назв. с экрана.
22. Masur, E.F. Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints. [Text] / E.F. Masur // Intern. J. Solids and Struct., 1984, vol. 20, N 3, p. 211-231.
23. modeFRONTIER [Электронный ресурс] / ESTECO. – Режим доступа: <http://www.esteco.com/modefrontier>. – Назв. с экрана.
24. Morozov, E.V. Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells [Text] / E.V. Morozov, A.V. Lopatin, V.A. Nesterov // Composite Structures. – 2011. – 93. – P. 3150–3162.
25. Morozov, E.V. Finite-element modelling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells [Text] / E.V. Morozov, A.V. Lopatin, V.A. Nesterov // Composite Structures. – 2011. - 93. – P. 308–323.
26. MSC Software Corporation – «Инженерный анализ и компьютерное моделирование» [Электронный ресурс]: MSC Nastran Расчет и оптимизация конструкций <http://www.mssoftware.ru/products/msc-nastran>
27. Nexus – New Standards for Optimization and Process Integration [Электронный ресурс] / iChrome. – Режим доступа:<http://ichrome.com/solutions/nexus>. – Назв. с экрана.
28. Numerical Optimization, Software Engineering and Cloud Computing. XTREME Technology [Электронный ресурс] / Optimal Computing. – Режим доступа: <https://optimalcomputing.be/xtreme-technology.php>. – Назв. с экрана.

29. Olhoff, N. On single and bimodal optimum buckling loads of a clamped columns. [Text] / N. Olhoff, S.H. Rasmussen // Intern. J. Solids and Struct., 1977, vol. 13, N 7, p. 605-614.
30. PIAO [Электронный ресурс]: официальный сайт / PIDOTECH. – Режим доступа: <http://www.pidotech.com/en/product/piano.aspx>. – Назв. с экрана.
31. pSeven [Электронный ресурс] / DATADVANCE. – Режим доступа: <https://www.datadvance.net/ru/product/pseven/>. – Назв. с экрана.
32. Rozvany, G. I. N. Topology Optimization in Structural Design. [Text] / G. I. N. Rozvany, N. Zhou, O. Sigmund // In: Advances in Design Optimization. — Adeli, 1994, London, p. 240 — 299.
33. SIMULIA Abaqus Software, Training & FEA Consultancy [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://www.simuleon.com> – Назв. с экрана.
34. T-FLEX CAD – профессиональная параметрическая САПР [Электронный ресурс]: Параметризация в T-flex CAD – часть 2 / Режим доступа: <http://www.tflexcad.ru/parametric/index2.php> – Назв. с экрана.
35. Topping, B.H. Shape Optimization of Skeletal Structures: A Review [Text] / B.H. Topping // J. Struct. Engrg. – 1983. – Vol.109. – No. 8.– P. 1933-1951.
36. Vasiliev, V.V. Anisogrid Composite Lattice Structures for Spacecraft and Aircraft Applications [Text] / V.V. Vasiliev, A.F. Razin // Composite Structures. - 2006. 76. – P. 182-189.
37. Vasiliev, V.V. Anisogrid Lattice Structures – Survey of Development and Application [Text] / V.V. Vasiliev, V.A. Barynin, A.F. Razin // Composite Structures. - 2001. 54. – P. 361-370.
38. VisualDOC – Software for Process Integration and Multidisciplinary Design Optimization [Электронный ресурс] / Vanderplaats Research & Development, Inc. – Режим доступа: <http://www.vrand.com/visualDOC.html>. – Назв. с экрана.

39. Xie, Y. M. A simple evolutionary procedure for structural optimization [Text] / Xie Y. M., Steven G. P. // Computers & Structures. 1993. V. 49, N 5, p. 885 — 896.
40. Yang, R. J. Automotive applications of topology optimization [Text] / R. J. Yang, A. I. Chahande // Structural Optimization, 1995, 9, 3-4, p. 245 — 249.
41. Агапов, В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций [Текст] : Учебное пособие / В.П. Агапов // М.: Изд. АСВ, 2000. – 152 с.
42. Азаров, А.В. Оптимальное проектирование композитных сетчатых стержневых элементов космических аппаратов. [Текст] / А.В. Азаров // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композитные неметаллические материалы в машиностроении, 2007, № 2(147), с. 3-7.
43. Анизогридные композитные сетчатые конструкции — разработка и приложения к космической технике [Текст] / Васильев В. В. и др. // Композиты и Наноструктуры. 2009. №3. С. 38–50.
44. Бакулин, В.Н. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов [Текст] / В. Н. Бакулин, А. А. Рассоха. – М.: Машиностроение, 1987. – 312 с.
45. Баничук, Н.В., Барсук А.А. Применение декомпозиции спектра собственных значений в задачах оптимизации. [Текст] / Н.В. Баничук, А.А. Барсук // В кн.: Проблемы устойчивости и предельной несущей способности конструкций. Л.: ЛИСИ, 1983, с. 17-24.
46. Баничук, Н.В. Введение в оптимизацию конструкций [Текст] / Н.В. Баничук. // М.: Наука, 1986. – 302 с.
47. Баничук, Н.В. Методы оптимизаций авиационных конструкций [Текст] / Н.В. Баничук, В.И. Бирюк, А.П. Сейранян и др. // М.: Машиностроение, 1989. – 296 с.

48. Бате, К.-Ю. Методы конечных элементов [Текст] / К.-Ю. Бате. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 1024 с.
49. Братусь, А.С. Приближение аналитического решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций. [Текст] / А.С. Братусь, В.М. Картвелишвили // Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №6, с. 119-139.
50. Бруяка, В.А. Инженерный анализ в ANSYSWorkbench [Текст]: учебное пособие / В.А. Бруяка и др. // Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.
51. Бунаков, В.А. Оптимальное проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек [Текст]/ В.А. Бунаков // Механика конструкций из композиционных материалов. 1992. – №26. – С. 101-125.
52. Бурнышева, Т.В. Сравнение дискретного и континуального подхода к расчету напряженного состояния сетчатых оболочечных конструкций при статическом нагружении. [Текст] / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин // Науч.-технич. вестник Поволжья, 2011, №4, с. 113-116.
53. Бурнышева, Т.В. Применение вычислительного эксперимента при расчете напряженно-деформированного состояния конического адаптера [Текст] / Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер, А.Д. Ульянов // Краевые задачи и математическое моделирование. Новокузнецкий филиал (институт) Кемеровского государственного университета. Новокузнецк, 2014. С. 22-29
54. Бурнышева, Т. В. Автоматизация вычислительного эксперимента в механике конструкций [Текст] / Т. В. Бурнышева, В.О. Каледин, И.В. Бухарова // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2013. – Вып. 1(168) — С. 23-28.
55. Бурнышева, Т. В. Математическая модель совместного деформирования элементов анизотридных конструкций космических

- летательных аппаратов [Текст] / Т.В. Бурнышева // Научно-технический вестник Поволжья. – 2014. - №6. – С. 94-97.
56. Бурнышева, Т. В. Решение задачи устойчивости сетчатых оболочек из композиционных материалов при статическом нагружении [Текст] / Т. В. Бурнышева, Ю.А. Кравцова // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – №1. – С. 101-105.
57. Бурнышева, Т.В. Оценка взаимного влияния составных частей оболочечной конструкции при осевом сжатии [Текст]/ Т.В. Бурнышева, А.Ф. Разин, О.А. Штейнбрехер // Научно-технический вестник Поволжья. №2 2012г. – Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2012. С. 127-131
58. Бурнышева, Т.В. Программно-методическое обеспечение прочностных расчетов анизотропных конструкций [Текст] / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всерос. конф. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – С. 45-46.
59. Бурнышева, Т.В. Расчет напряженно деформированного состояния анизотропного адаптера [Текст] / Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер // Решетневские чтения: материалы XX Юбилейной междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (09-12 нояб. г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю.Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т – Красноярск, 2016. С. 118-120.
60. Бурнышева, Т.В. Рациональное проектирование толщины окантовки люков конструкции отсека космического летательного аппарата. [Текст] / Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер //Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, вып. 9.
61. Вайнберг, Д. В. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел [Текст] / Д. В. Вайнберг, А. С. Городецкий // Прикладная механика. – 1972. – № 8. – С. 10-15.

62. Васильев, В.В. Механика конструкций из композитных материалов [Текст] / В.В. Васильев // М.: Машиностроение, 1988, 272 с.
63. Васильев, В. В. Композитные сетчатые балочные элементы для авиационных конструкций [Текст] / В. В. Васильев, А. Ф. Разин // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2006. – Вып. 1(142) – 2(143). – С. 3-6.
64. Васильев, В. В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек [Текст] / В. В. Васильев, А.В. Лопатин // Механика конструкций из композиционных материалов. – 1984. – С. 31-36.
65. Васильев, В.В. Исследование влияния формы ячейки на напряженное состояние композитной сетчатой конструкции при локальном нагружении [Текст] / В.В. Васильев, М.В. Никитин, А.Ф. Разин // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2005. – Вып. 1(138) – 2(139). – С. 78-81.
66. Васильев, В.В. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении [Текст] / В.В. Васильев, В.А. Бунаков // Механика конструкций из композиционных материалов. – 2000. – №2. – С. 68 - 77.
67. Васильев, В.В. Сетчатая оболочка вращения (варианты) [Текст] / В.В. Васильев, А.Ф. Разин, М.С. Артюхов // патент на изобретение RUS 2153419 10.03.1999.
68. Винарский, М. С. Планирование эксперимента в технологических исследованиях [Текст] / М. С. Виварский, М. В. Лурье. – Киев: «Техніка», 1975 – 168 с.
69. Выбор оптимальной конфигурации при проектировании анизотридных конструкций. [Текст] / Исеева О.А. и др. // Решетневские чтения: материалы XX Юбилейной междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-

- космических систем академика М.Ф. Решетнева. Красноярск, 09-12 ноября 2016 г., Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2016, Ч.1, с. 30-32.
70. Галлагер, Р. Методы конечных элементов. Основы. [Текст] / Р. Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с.
71. Голованов, А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций [Текст] / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
72. Дородницын, А.А. Использование метода малого параметра для численного решения уравнений математической физики [Текст]: (Лекции летней шк. По численным методам. Киев, 1966). /А.А. Дородницын // М.: ВЦ АН СССР, 1966, с. 85-100.
73. Еременко, С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел [Текст] / С.Ю. Еременко. – Х.: Изд-во «Основа», 1991. – 272 с.
74. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред [Текст] / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 304 с.
75. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
76. Использование функций в. Л. Рвачева для геометрического моделирования областей сложной формы [Текст] / С.В. Чопоров, А.А. Лисняк, С.И. Гоменюк // Прикладная информатика. № 2 (26). 2010. С. 109 -122.
77. Казначеева, О.К. Идентификация параметров упругости и жесткости конструкций из армированных материалов [Текст] / О.К. Казначеева, В.О. Каледин – Новочеркасск, ЛИК, 2012. – 135 с.
78. Каледин, В.О. «Композит-НК» - гибкая технология программирования технических расчетов [Текст] / В.О. Каледин, А.Д. Ульянов // Перспективы инновационного развития угольных регионов России:

сборник трудов V Международной научно-практической конференции. Прокопьевск, 30-31 марта 2016 г.

79. Каледин, В.О. Интерпретация данных натуральных испытаний оболочечной композитной конструкции при статическом осевом сжатии [Текст] / В.О. Каледин и др. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. №3. 2015. Том 81. С.53-58
80. Каледин, В.О. Концепция языка программирования «Ядро» [Текст] / В.О. Каледин. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2008. – 47 с.
81. Каледин, В.О. Численно-аналитические модели в прочностных расчетах пространственных конструкций [Текст] / В.О. Каледин. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2000. – 204 с.
82. Каплун, А.Б. ANSYS в руках инженера [Текст] / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
83. Клованич, С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики [Текст] / С.Ф. Клованич. – Библиотека журнала «Світгеотехніки», 2009. – 400 с.
84. Комаров, А.А. Основы проектирования силовых конструкций [Текст] / А.А. Комаров // Куйбышевское книжное издательство, 1965. – 88 с.
85. «Композит-НК» - комплекс программ для автоматизации программирования численного решения задач механики конструкций [Текст] / Ульянов А.Д., Каледин В.О., Крюкова Я.С., Гилева А.Е. // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов XVI международная научно-практическая конференция: в 3 частях Издательство: Забайкальский государственный университет (Чита) . 2016 – С.141-145
86. Ларичев, А.Д. Нахождение минимума объема балки на упругом основании при заданной величине критической нагрузки [Текст] / А.Д. Ларичев // В кн.: Прикладные и теоретические исследования

- строительных конструкций. М.: Изд-во ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1981, с. 19-25.
87. Лопатин, А.В. Устойчивость при изгибе композитной цилиндрической оболочки с продольными ребрами жесткости [Текст] / А.В. Лопатин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 1. – С. 169-177.
88. Медведев, Н.Г. Некоторые спектральные особенности оптимальных задач устойчивости оболочек переменной толщины. [Текст] / Н.Г. Медведев // ДАН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 59-63.
89. Медведев, Н.Г. О кратности спектра собственных значений в оптимальных задачах устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины. [Текст] / Н.Г. Медведев, Н.П. Тоцкий // Прикл. механика, 1984, т. 20, № 6, с. 113-116.
90. Метод конечных элементов [Текст] / Под ред. П.М. Варвака // Киев: Вища школа, 1981. – 176 с.
91. Методы изготовления конструкций [Электронный ресурс] / Режим доступа: [http://www.tsniism.ru/production\\_9.htm](http://www.tsniism.ru/production_9.htm) – Назв. с экрана.
92. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3 т. Т.2. Механика элементов конструкций [Текст] / под ред. Я.М. Григоренко. // Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.
93. Многокритериальный анализ сотовых заполнителей в системе поддержки принятия решений NooTron [Текст] / В.И. Сливинский, А.И. Михалев, В.И. Кузнецов, Г.Л. Теплякова // Эффективность сотовых конструкций в изделиях авиационно-космической техники: сб. матер. V междунар. науч.-практ. конф. – Днепропетровск, 2013. – С. 141–150.
94. Новые направления оптимизации в строительном проектировании [Текст] / М.С. Андерсон, Ж.-Л. Арман, Я. Арора и др.; под ред. Артека Э. и др.; пер. с англ. Бромштейна К. Г. // М.: Стройиздат, 1989. – 592 с.
95. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов [Текст] / Д. Норри, Ж. де Фриз // М.: Мир, 1981. – 304 с.

96. О влиянии углов ориентации спиральных ребер на перемещения канонической и цилиндрической сетчатых оболочек [Текст] / В.В. Васильев и др. // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. 2012. – Вып. 1(164) – 2(165) – С. 3-7.
97. Образцов, И.Ф. Метод конечных элементов в задачах механики летательных аппаратов [Текст]: Учебное пособие для студентов авиац. спец. вузов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов // М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
98. Огородникова, О.М. Конструкционный анализ в среде ANSYS [Текст]: учебное пособие / О.М. Огородникова. // Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2004. – 68с.
99. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Дж. Оден. // М.: Мир, 1976. – 464 с.
100. Оганесян, П.А. Оптимизация топологии конструкций в пакете ABAQUS [Текст] / П.А. Оганесян, С.Н. Шевцов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, том 16, №6(2), 2014 - С. 543- 549
101. Парлетт, Б. Симметричная задача собственных чисел [Текст] / Б. Парлетт. // М.: Мир, 1983. – 384 с.
102. Полиновский, В. И. Применение методов конечных элементов при проектировании композитных сетчатых отсеков для ракетно-космической техники [Текст] / В. И. Полиновский // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2009. –3(154) – 4(155) – С. 17-22.
103. Программная система для алгоритмизации численного решения задач механики сплошной среды. [Текст] // Каледин В.О., Крюкова Я.С., Нагайцева Н.В., Равковская Е.В. / Известия Алтайского государственного университета, 2014, № 1-1 (81), с. 161-164.

104. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю.Н. Работнов. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
105. Развитие пакета программ математического моделирования сопряженных задач механики неоднородных конструкций [Текст] / Т.В. Бурнышева [и др.] // Вестник Кемеровского государственного университета, 2010, №1 (41). С. 3-8.
106. Рвачев, В. Л. Геометрические приложения алгебры логики [Текст] / В.Л. Рвачев // Киев: Техніка, 1967.
107. Рвачев, В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. [Текст] / В.Л. Рвачев // Киев: Наук. думка, 1974.
108. Рвачев, В.Л. Введение в теорию R-функций [Текст] / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // Проблемы машиностроения. - 2001. Т. 4, №1-2. - С. 46-58
109. Рвачев, В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В.Л. Рвачев // Киев, Наукова думка, 1982, 552 с.
110. Рикардс, Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин [Текст] / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
111. Российская энциклопедии CALS. Авиационно-космическое машиностроение [Текст] / Гл. ред. А.Г. Братухин // М.: ОАО «НИЦ АСК», 2008. – 608 с.
112. Рыков, А.С. Принципы построения методов управляемого прямого поиска [Текст] /А.С. Рыков // Докл. АН СССР, 1982, т.266, №5, с. 1082-1086
113. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. // М.: Мир, 1979. – 392 с.
114. Сейранян, А.П. Об одной задаче Лагранжа. [Текст] / А.П. Сейранян // Изв. АН СССР. МТТ, 1984, №2, с. 101-111.
115. Спиридонов, А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов [Текст] / А.А. Спиридонов. // М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.

116. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Г. Фикс. // М.: Мир, 1980. – 512 с.
117. Сысоева В. В. Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций [Текст] / В. В. Сысоева, В. В. Чедрик // Ученые записки ЦАГИ, 2011 - №2 – Т. 42. – С. 91-102
118. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] / Ф. Сьярле. // М.: Мир, 1977. – 349 с.
119. Тику, Ш. Эффективная работа: Solidworks 2005 [Текст] / Ш.Тику. // СПб.: Питер, 2005. – 517 с.
120. Филин, А. П. Элементы теории оболочек [Текст] / А. П. Филин. – 3-е изд., перераб. и доп. // Л.: Стройиздат, 1987. – 384 с.
121. Хартман, К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов [Текст] / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер. // М.: Мир, 1977. – 552 с.
122. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование / Механические системы и конструкции [Текст] / Э. Хог, Я. Арора. [Пер. с англ.] Под ред. Баничука Н.В. // М.: Мир, 1983. – 478 с.
123. Шейнин, В.М. Весовое проектирование и эффективность пассажирских самолетов [Текст]: справочник/В.М. Шейнин, В.И. Козловский. – 2-е изд., перераб. и доп. // М.: Машиностроение, 1984. – 552 с.
124. Шенли, Ф.Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций [Текст]/ Ф.Р. Шенли. // М.: Оборонгиз, 1957. – 408 с.31
125. Шимкович, Д. Г. FEMAP & NASTRAN. Инженерный анализ методом конечных элементов [Текст] / Д. Г. Шимкович. // М.: ДМК Пресс, 2008. – 701 с.
126. Шимкович, Д. Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows [Текст] / Д. Г. Шимкович. // М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
127. Штейнбрехер, О.А. О решении задачи идентификации нагрузки сетчатых оболочечных конструкций [Текст] / О.А. Штейнбрехер // Решетневские чтения: материалы XVI Междунар. науч. конф.,

посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М.Ф. Решетнева (7-9 нояб. 2012, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2012. С. 42-43

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**МАТРИЦА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Таблица А.1 – План матрица вычислительного эксперимента

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
1	-1	-1	-1	107,60	-180,5	0,010420	0,010420	0,010109
2	-1	-1	0	54,61	-181,5	0,014414	0,014387	0,014384
3	-1	-1	1	37,74	-182,1	0,018018	0,018018	0,018007
4	-1	0	-1	103,61	-89,49	0,025982	0,025557	0,025557
5	-1	0	0	53,59	-90,08	0,028897	0,028582	0,028582
6	-1	0	1	35,79	-90,31	0,033622	0,033328	0,033328
7	-1	1	-1	98,73	-59,26	0,011342	0,043842	0,043842
8	-1	1	0	52,51	-59,71	0,047102	0,046587	0,046587
9	-1	1	1	35,48	-59,85	0,051017	0,050896	0,050862
10	0	-1	-1	38,05	-70,27	0,038822	0,035683	0,024961
11	0	-1	0	19,46	-70,80	0,044418	0,044418	0,043743
12	0	-1	1	13,43	-71,03	0,045211	0,045211	0,045098
13	0	0	-1	55,57	-89,26	0,194185	0,158332	0,098332
14	0	0	0	18,99	-35,08	0,236714	0,236714	0,195386
15	0	0	1	12,86	-35,21	0,287280	0,279797	0,279797
16	0	1	-1	35,41	-22,99	0,284952	0,284952	0,287013
17	0	1	0	18,40	-23,23	0,398318	0,396298	0,396238
18	0	1	1	12,60	-23,33	0,640652	0,622292	0,622292
19	1	-1	-1	22,18	-43,13	0,062664	0,056944	0,039845
20	1	-1	0	11,42	-43,47	0,071249	0,071249	0,070097
21	1	-1	1	7,81	-43,62	0,072475	0,072475	0,072267
22	1	0	-1	20,92	-21,31	0,321820	0,250747	0,156105
23	1	0	0	11,07	-21,54	0,465969	0,445024	0,310207
24	1	0	1	7,44	-21,62	0,531526	0,531526	0,502505
25	1	1	-1	19,59	-14,07	0,494146	0,494146	0,452330
26	1	1	0	10,77	-14,25	1,033092	0,979135	0,631758
27	1	1	1	7,35	-14,32	1,241672	1,241672	1,016273

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

**СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ  
ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ**

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014613344

Композит НК АнизоGRID

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет» (RU)**

Авторы: **Каледин Валерий Олегович (RU), Решетникова Елена Васильевна (RU), Бурнышева Татьяна Витальевна (RU), Фанасков Виталий Сергеевич (RU), Нагайцева Наталья Валерьевна (RU), Равковская Елена Викторовна (RU), Крюкова Яна Сергеевна (RU), Кравцова Юлия Анатольевна (RU), Штейнбрехер Ольга Александровна (RU)**

Заявка № 2014611032

Дата поступления 13 февраля 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 25 марта 2014 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

**АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ**

УТВЕРЖДАЮ  
Директор НФИ КемГУ



В.С. Гершгорин  
\_\_\_\_\_ 2016 г.

УТВЕРЖДАЮ  
Первый заместитель генеральн  
директора и главного конструктора  
АО «ЦНИИСМ»

\_\_\_\_\_ А.А.Кульков  
«*16*» \_\_\_\_\_ 2016 г.

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ НИР

Мы, ниже подписавшиеся, представители открытого акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (АО «ЦНИИСМ»): начальник отдела, д.т.н., профессор Страхов В.Л., с одной стороны и представитель НФИ КемГУ, зав. кафедрой математики и математического моделирования канд. техн. наук, доцент Решетникова Е.В., с другой стороны, составили настоящий акт о внедрении научно-исследовательской работы «Разработка методики определения оптимальных технологических и конструктивных параметров сетчатых анизотридных конструкций с переменным жесткостными и прочностными характеристиками», выполненной кафедрой математики и математического моделирования НФИ КемГУ в 2013-2015 г.

Результаты НИР внедрены в ОАО ЦНИИСМ в следующем виде:

Принято для использования в работах ОАО ЦНИИСМ:

- методика идентификации фактических параметров прочности и жесткости анизотридных сетчатых конструкций;
- комплекс прикладных программ «Композит НК Анизотрид» с частично открытым интерфейсом и реализацией вычислительного эксперимента для прочностных расчетов оболочечных конструкций из композиционных материалов.

При внедрении результатов НИР получен следующий технический эффект:

- 1) повышение производительности труда инженеров-расчетчиков при выполнении расчетов на прочность оболочечных конструкций анизотридной сетчатой структуры из композиционных материалов;
- 2) повышение достоверности результатов прочностных расчетов сетчатых анизотридных конструкций переменным жесткостными и прочностными характеристиками;
- 3) возможность оптимального проектирования конструкций из полимерных композиционных материалов с повышенным весовым совершенством.

Подписи:

От НФИ КемГУ:

От АО «ЦНИИСМ»

Зав. кафедрой, канд. техн. наук,  
доцент

Начальник отдела, д.т.н..  
Профессор

 Е. В. Решетникова

 В.Л. Страхов

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель руководителя Центра  
 научно-управленческого и информационно-  
 технологического образования НФИ КемГУ  
 доктор социологических наук



О.А. Урбан  
 2017 г.

## СПРАВКА

об использовании результатов диссертации Штейнбрехер О.А. «Разработка метода, алгоритма и программного обеспечения для оптимизации анизотридных конструкций из композиционных материалов» при выполнении НИР, проводимых Новокузнецким институтом (филиалом) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет»

При выполнении научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, проводимых на кафедре математики и математического моделирования Новокузнецкого института (филиала) ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» использованы основные результаты диссертации Штейнбрехер О.А. «Разработка метода, алгоритма и программного обеспечения для оптимизации анизотридных конструкций из композиционных материалов»: математическая модель объекта оптимизации посредством представления множества ограничений в виде аппроксимации кусочно-гладкой границы аппаратом R-функций; численный метод расчета минимума целевой функции на основе симплексного поиска, в котором множество кусочно-гладких границ области допустимых решений заменяется единым выпуклым R-предикатом, а симплекс считается связанным с ближайшими границами посредством упругих связей, реакции которых влияют на направление поиска; алгоритм решения задачи оптимизации проектных параметров сетчатых анизотридных конструкций по массе с ограничениями на структурные параметры и переменные состояния..

Указанные результаты использованы в рамках опытно-конструкторской работы «Разработка методики определения оптимальных технологических и конструктивных параметров сетчатых анизотридных конструкций с переменными жесткостными и прочностными характеристиками». Результаты НИР внедрены в Центральном научно-исследовательском институте специального машиностроения (г. Хотьково). Акт о внедрении работы прилагается.

Отдельные результаты диссертационной работы использованы в учебном процессе по дисциплинам «Вычислительный эксперимент» и «Численные методы решения краевых задач» для бакалавров и магистров направления «Прикладная математика и информатика».

Результаты диссертации опубликованы в ряде печатных работ, в том числе:

1. Оценка взаимного влияния составных частей оболочечной конструкции при осевом сжатии / Бурнышева Т.В., Разин А.Ф., Штейнбрехер О.А. // Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – №2. – С. 127-131.
2. Интерпретация данных натурных испытаний оболочечной композитной конструкции при статическом осевом сжатии / Каледин В.О., Разин А.Ф., Бурнышева Т.В., Штейнбрехер О.А. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2015. – №3. Том 81. – С. 53-58.
3. Алгоритм оптимизации многоэлементных конструкций с ограничениями по прочности и габаритам / Каледин В.О., Штейнбрехер О.А. // Научно-технический вестник Поволжья, 2016. – №3. – С. 113-115.
4. Бурнышева Т.В., Штейнбрехер О.А. Рациональное проектирование толщины окантовки люков конструкции отсека космического летательного аппарата. Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-9-1671>
5. Штейнбрехер О.А., Бурнышева Т.В. Решение задачи параметрической оптимизации сетчатой цилиндрической конструкции. Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-10-1688>

Зав. кафедрой математики и математического  
 моделирования, канд. техн. наук,  
 доцент

Е.В. Решетникова