

Новокузнецкий институт (филиал)
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Кемеровский государственный университет»

На правах рукописи



Паульзен Анна Евгеньевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЯГКИХ
ОБОЛОЧКАХ ИЗ ТКАНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Специальность 05.13.18 «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Каледин Валерий Олегович

Новокузнецк – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОИСТЫХ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ.....	13
1.1 Тканая многослойная преграда и особенности ее взаимодействия с поражающим телом.....	13
1.2 Современные методы моделирования тканой преграды и ее взаимодействия с поражающим телом	17
1.3 Программное обеспечение для вычислительного эксперимента.....	23
1.4 Обзор среды функционально-объектного программирования «Алгозит»	25
1.5 Постановка цели и задач работы. Выбор методов исследования	31
ГЛАВА 2 МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТКАНИ ПРИ СОУДАРЕНИИ С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ	33
2.1 Описание объекта моделирования	33
2.2 Модель термомеханических процессов на волновой стадии деформирования ткани	37
2.3 Кинематика движения многослойного тканого пакета на оболочечной стадии деформирования	41
2.4 Определяющие уравнения.....	51
2.5 Приведение напряжений к модели оболочки	60
2.6 Уравнения движения	66
2.7 Модель тепловыделения и адиабатического нагрева.....	72
Выводы по главе 2.....	73

ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ ЗАДАЧ О ДЕФОРМИРОВАНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА НА ВОЛНОВОЙ И ОБОЛОЧЕЧНОЙ СТАДИЯХ.....	75
3.1 Численная схема задачи о деформировании на волновой стадии	75
3.2 Дискретизация уравнений движения на оболочечной стадии	77
3.3 Дискретизация уравнений движения по координатам.....	80
3.4 Расщепление уравнений движения по процессам переносного и относительного движения	105
3.5 Аппроксимация тепловыделения	112
Выводы по главе 3.....	114
ГЛАВА 4 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОСЛОЙНОЙ ТКАНИ.....	116
4.1 Разработка комплекса программ для исследования термомеханических процессов в многослойной ткани при ударе	116
4.2 Исследование модели деформирования ткани на волновой и оболочечной стадиях соударения.....	133
4.3 Исследование влияния скорости поражающего элемента и характеристик тканого материала на параметры динамических температурных полей	144
4.4 Сопоставление динамических температурных полей с данными эксперимента.....	157
4.5 Анализ распределения поглощенной энергии по слоям ткани	160
Выводы по главе 4.....	162
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	164
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	166

ПРИЛОЖЕНИЕ А Функционально-объектные схемы программного комплекса	181
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Интерфейсы разработанных функциональных классов на языке С++	187
ПРИЛОЖЕНИЕ В Модифицированные методы базового класса	197
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ	206
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Сведения об использовании результатов диссертации	207

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Проектирование средств защиты из многослойных тканых материалов связано с выбором конструктивных параметров – числа слоёв, плотности ткани каждого слоя и ориентации нитей основы и утка в слоях относительно слоистого тканого пакета, обеспечивающих возможно большее поглощение кинетической энергии ударника. Для повышения защитных свойств необходимо на этапе проектирования получать расчётную оценку энергопоглощения в зависимости от выбора конструктивных параметров. Для этого требуется моделирование термомеханических процессов, в которых происходит поглощение энергии удара и её преобразование в тепло. Несмотря на значительное число публикаций, исчерпывающего решения проблема не получила, и сравнение энергопоглощения различных тканей при ударах различными поражающими элементами на практике производится экспериментально, путём натурных испытаний и измерения повреждений защищаемого материала (подложки). Задача осложняется многообразием механизмов поглощения энергии ткаными материалами: за счёт разрыва нитей, внутреннего трения в материале слоёв, трения слоёв ткани, смятия волокон и т.д. Одним из важных факторов является трение, поглощающее до 50-60% всей кинетической энергии, однако прямое измерение сил трения невозможно ввиду малой продолжительности удара.

Степень разработанности темы исследования. В последние годы появились работы по косвенной оценке энергопоглощения тепловым методом (Будадин О.Н., Козельская С.О.), с использованием динамических термограмм, на основе эффекта повышения температуры тканого материала при поглощении энергии удара. Однако для использования этого эффекта при оценке качества многослойных преград необходимо математическое моделирование термомеханических процессов в оболочках из тканых полимерных материалов при ударе.

Таким образом, представляется актуальной разработка и обоснование новой математической модели механических и тепловых процессов в многослойном пакете из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом с учетом обратимой и необратимой деформации растяжения нитей, разрыва нитей, взаимного проскальзывания слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделения и передачи тепла в ткани.

Научной задачей, решаемой в работе, является расчётно-экспериментальная оценка динамических температурных полей, обусловленных поглощением энергии поражающего элемента многослойным тканым материалом.

Идея работы состоит в моделировании деформирования многослойного тканого материала при ударе как многослойной моментной оболочки, содержащей подвижные нити, непрерывно распределённые по объёму слоёв ткани и механически взаимодействующие с содержащим их слоем материала.

Цель работы заключается в разработке средств математического моделирования процессов поглощения энергии при ударе жестким поражающим элементом в многослойный пакет из полимерной ткани применительно к оценке нестационарных температур на поверхности.

Задачи исследования

1. Разработка математической модели механических и тепловых процессов в многослойном пакете из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом, учитывающей растягивающие напряжения в нитях, необратимость деформации растяжения, работу разрыва нитей, трение при взаимном проскальзывании слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделение тепла и его распространение в ткани.

2. Модификация численной схемы интегрирования уравнений движения многослойного тканого образца при ударе и алгоритма расчёта поглощения энергии поражающего элемента и динамических температурных полей в ткани.

3. Разработка комплекса программ, реализующего модифицированный алгоритм расчёта динамических температурных полей при ударе жестким поражающим элементом в многослойный тканый образец.

4. Исследование сеточной сходимости, точности численного решения и чувствительности модели к вариации конструктивных параметров тканого пакета и начального импульса поражающего элемента.

5. Расчётно-экспериментальное исследование энергопоглощения в многослойных образцах из полимерной ткани на основе математического моделирования и анализа динамических термограмм.

Методы исследования включают: известные методы механики деформируемого твердого тела и термодинамики для построения математической модели термомеханических процессов в многослойных пакетах из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом, численные методы решения краевых задач и вычислительной математики для расчета динамических напряжений, деформаций и температур, методы объектно-ориентированного программирования и функционально-объектной декомпозиции, метод термографии для экспериментального обоснования достоверности результатов.

Научная новизна работы

1. Математическая модель процессов деформирования и тепловыделения в тканом многослойном образце при соударении с жестким воздействующим объектом, в которой слои ткани рассматриваются как сплошная среда с включёнными в неё нитями, отличающаяся отдельным описанием процессов на стадии начального уплотнения и оболочечного деформирования, учетом различия деформаций слоёв пакета и их взаимного проскальзывания, позволяющая определить деформацию, напряжение, поглощённую энергию и температуру нитей ткани в каждый момент времени.

2. Алгоритм расчета деформаций, напряжений и температурных полей на оболочечной стадии деформирования при начальных условиях, найденных расчётом начальной стадии уплотнения материала, отличающийся расщеплением

неявной разностной схемы по процессам в переносном и относительном движении, что позволяет сократить время вычислений.

3. Комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм вычисления динамических напряжений, деформаций, поглощённой энергии и температур, отличающийся представлением программного кода в виде ориентированной сети конечных автоматов с побочными эффектами и наличием программ интерактивной подготовки исходных данных для моделей многослойных тканых пакетов, расчета динамических температурных полей в слоях ткани, а также визуализации результатов расчёта.

Личный вклад автора заключается в: формулировке математической модели деформирования и тепловыделения в тканом многослойном образце при ударе поражающим элементом с отдельным описанием стадии уплотнения и оболочечного деформирования; модификации неявной разностной схемы путем расщепления по процессам в переносном и относительном движении; программной реализации расчета динамических температурных полей в среде программирования «Алгозит»; оценке порядка сходимости; модернизации алгоритмов поведения функциональных объектов, образующих сеть с побочными эффектами, путём изменения механизма передачи неявного аргумента для исключения повторных вычислений при неизменных значениях неявного аргумента; проведении вычислительных экспериментов для комплексного исследования термомеханических процессов в оболочках из полимерной ткани; сравнении результатов расчёта с экспериментальными данными.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов обеспечена применением апробированных методов и постановок задач, исследованием точности численных решений, и подтверждается согласованием результатов расчётов с данными известных и специально поставленных экспериментов.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования её результатов для расчётно-экспериментальной оценки энергопоглощения в полимерных тканых материалах при проектировании средств защиты.

На защиту выносятся

1. Математическая модель деформирования и нагрева многослойного тканого материала при соударении с поражающим элементом, учитывающая начальную стадию уплотнения материала при соударении и оболочечную стадию движения, на которой для пакета в целом принимается гипотеза Рэдди об оболочке с деформируемой нормалью, исключающая сингулярность растягивающих напряжений.

2. Численная схема расчёта энергопоглощения на основе модификации метода конечных элементов и конечных разностей, позволяющая рассчитать энергопоглощение и температуры во всех слоях пакета ткани, в которой форма лицевой поверхности аппроксимируется эрмитовым сплайном, уравнения движения в процессе уплотнения материала заменяются неявной разностной схемой по времени, а перемещения и скорости после уплотнения используются как начальные условия для уравнений колебаний после начальной стадии соударения.

3. Комплекс программ для расчёта динамического деформирования многослойного тканого материала при ударе жестким поражающим элементом и вызванных им динамических температурных полей, реализованный в среде функционально-объектного программирования «Алгозит».

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на Всероссийской конференции с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017); XXI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева «Решетневские чтения», (Красноярск, 2017); Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2016, 2018), семинаре кафедры Прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (2019), IX Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Новокузнецк, 2019), 57-й

Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2019), XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 2019).

Внедрение результатов. Результаты работы (алгоритмы расчета, комплекс программ для ЭВМ и результаты расчётов) использованы в АО «Центральный научно-исследовательский специального машиностроения» и в научно-исследовательских работах НФИ КемГУ, что подтверждено тремя актами и справкой об использовании результатов диссертации.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 17 опубликованных печатных работах, из них 3 – в рецензируемых периодических изданиях из перечня ВАК, 2 – в изданиях, индексируемых в Scopus.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 121 наименования и 5 приложений. Общий объем диссертации составляет 216 страниц и включает 65 рисунков и 2 таблицы.

Во введении обосновывается актуальность исследования термомеханических процессов в полимерных тканых материалах методами математического моделирования при ударе с учетом уплотнения слоёв, разрушения нитей, взаимного проскальзывания слоёв ткани и нитей в пределах слоя. Сформированы цель и задачи исследования, излагается краткое содержание работы.

Первая глава содержит аналитический обзор методов моделирования многослойных тканых образцов и их соударения с поражающим элементом. Приведены результаты работ по оценке энергопоглощения на основе экспериментальных методов. Показана перспективность применения метода, основанного на анализе температурных полей, к оценке энергопоглощающей способности многослойного тканого материала. Отмечается, что для проектирования тканых материалов защитного назначения актуальна разработка математической модели процесса деформирования при нагреве, численной схемы и программного обеспечения для расчетов.

Во второй главе описана разработанная математическая модель динамического деформирования и нагрева многослойного тканого материала. Каждый слой тканого материала представлен как сплошной материал, содержащий два семейства нитей – основу и уток, взаимодействующих с окружающим их материалом с осреднёнными физико-механическими характеристиками. Моделируются процессы, существенно определяющие вид динамических термограмм при ударе: необратимое растяжение нитей, проскальзывание нитей и слоёв ткани, переход энергии в тепло и повышение температуры ткани. Для описания этих процессов выделены две стадии соударения – волновая и оболочечная. Движение многослойной ткани на оболочечной стадии представлено в виде объединения переносного движения пакета в целом и относительного движения нитей внутри слоёв, что позволяет использовать для переносного движения модель оболочки и привести задачу к двумерной. Сформулирована начально-краевая задача для вариационного уравнения движения на оболочечной стадии деформирования с отдельной постановкой граничных условий для переносных и относительных перемещений.

В третьей главе построена численная схема. Дискретизация по координатам производится методом конечных элементов с использованием эрмитова сплайна для аппроксимации переносных перемещений и лагранжева – для относительных. Дискретизация по времени выполнена на основе неявной разностной схемы расщепления по процессам переносного и относительного движения. Коэффициенты уравнений, зависящие от искомым переменных, найдены с использованием уравнения Лагранжа 2-го рода. Показано, что численная схема аппроксимирует решение с первым порядком относительно временного шага.

В четвёртой главе описана программная реализация алгоритма решения в виде комплекса программ, включающего программу решения уравнений движения многослойного пакета при ударе и расчёта динамических температурных полей, программу интерактивной подготовки данных для расчёта и программу визуализации результатов. Исследованы свойства математической

модели деформирования на волновой и на оболочечной стадии. Показана чувствительность модели к варьированию скорости поражающего элемента и физико-механических свойств материала ткани. Приведены данные физического эксперимента – динамических испытаний тканых образцов с регистрацией температурных полей. Найдено, что рассчитанные температуры согласуются с измеренными в эксперименте. Полученные результаты могут быть использованы для оценки энергопоглощения многослойной полимерной ткани при проектировании средств защиты из полимерной ткани.

В заключении приведены основные выводы и результаты работы.

ГЛАВА 1 АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОИСТЫХ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

1.1 Тканая многослойная преграда и особенности ее взаимодействия с поражающим телом

Тканая преграда защитного назначения представляет собой последовательно расположенные слои ткани. Слои ткани изготовлены путем переплетения нитей из высокопрочных арамидных волокон [61, 39]. Такие волокна имеют ряд преимуществ перед другими синтетическими волокнами: высокая прочность, устойчивость к истиранию, низкая воспламеняемость, отсутствие электропроводимости и др. Кроме того, такие волокна сочетают в себе низкую плотность и высокий модуль упругости. Использование тканых защитных средств расширяется [86] и в настоящее время охватывает индивидуальную бронезащиту [53], защитные элементы рабочей одежды [72], защитные покрытия технических объектов [24] и т.п. К настоящему времени разработаны и экспериментально обоснованы инженерные методы оценки ударной прочности (например, [53, 52, 92]), однако существует потребность в разработке уточненных методов и средств оценки параметров процессов, происходящих при ударе.

В [77] приведены средние физико-механические характеристики таких волокон: плотность $1,45 \dots 1,47 \text{ г/см}^3$, модуль упругости $100 \dots 150 \text{ ГПа}$, прочность на растяжение $3,5 \text{ ГПа}$. Методы экспериментального определения физико-механических свойств нитей и тканых материалов описаны в многочисленных работах, например, в [53], [6] и [64]. Кроме экспериментального определения диаграммы деформирования, например, в [56] приводится расчетная модель тканых композитов полотняного переплетения для получения диаграммы деформирования материала в целом. Справочные данные о свойствах импортных

тканых материалов содержатся в [66]. В [4] отмечается, что на прочностные характеристики оказывает влияние способы укладки волокон в материале.

Характеристики применяемых нитей при различных температурах описаны в [59]. Предел прочности нитей заметно снижается при повышении температуры, но при напряжениях до 1 ГПа нить выдерживает нагрев до температуры порядка 400°C, что не характерно для физических экспериментов [15].

При соударении слоистого тканого материала с поражающим элементом можно выделить несколько стадий [53, 91]. В монографии [52] отмечается: «Для начальной стадии характерно уплотнение ткани от лицевых до обратных слоев пакета, последующее упругое сжатие слоев и ускорение материала в направлении движения поражающего элемента». Указывается, что разрушение нитей имеет сдвиговой характер, смещение пробитых слоев незначительно. На второй стадии происходит растяжение и последующий обрыв нитей; часть кинетической энергии поражающего элемента поглощается тканым пакетом. Заключительная стадия сопровождается окончательным торможением с образованием тыльного конуса без разрушения слоев ткани. На этой стадии происходит дальнейшее растяжения и вытягивание нитей из ткани. Экспериментальное изучение процесса соударения исследовалось в работах [87, 91, 25] и других авторов.

Такие авторы, как Ю.И. Димитриенко, С.О. Козельская, Е.Ф. Харченко и другие, выделяют механизмы поглощения энергии ударника за счет нелинейно-упругого деформирования нитей при их растяжении и нелинейно-упругого деформировании при их сжатии, упруго-вязко-пластических деформаций за счет продергивания нитей и межслоевого сдвига. В [89] отмечается что, суммарная работа разрушения нитей может составлять 25-35% от энергии поражающего тела, а в [1, 96] утверждается, что трение вносит основной вклад в диссипацию энергии при поперечном ударе в ткань, в отличие от одиночной нити. Поэтому возникает вопрос о более детальном рассмотрении ударного взаимодействия. Отмечено, что на начальной стадии возникает уплотнение материала, и волокна в месте удара свариваются в монолитное образование. При дальнейшем движении

поражающего элемента в слое ткани процесс проникания приобретает волной характер с вовлечением во взаимодействие все больших объемов материала. Перед разрывом от осевого растяжения происходит вытягивание нитей согласно их ориентации [89]. К заключительному этапу – торможению – относятся раздвижение нитей в перпендикулярном направлении, их трение о поверхность ударника, деформация подложки в виде образования вмятины, и необратимая деформация твердого поражающего тела. В работе [84] дополнительно рассматривается пробитие ткани в результате раздвижки нитей.

В слоистом пакете в месте соударения с твердым поражающим телом возникает значительное давление, из-за которого затрудняется вытягивание нитей, что вызвано возрастающей удерживающей силой трения. В [98] отмечается, что энергия трения скольжения имеет значительный вклад в торможение ударника, когда ткань начинает получать повреждения, и происходят значительные перемещения между нитями.

При одновременном вытягивании нескольких нитей усилие возрастает. У более плотных тканей скорость возрастания усилия выше, чем у менее плотных. Из полотняной ткани плотностью 140 нитей на 10 см как по основе, так и по утку, изготовленной из нитей Русар с линейной плотностью 58,8 текс, нельзя вытащить одновременно более 9 нитей, поскольку усилие вытягивания превосходит прочность нитей на разрыв [9].

Рассматривая тканые слоистые материалы, отметим, что в основном они предназначены для конструирования средств индивидуальной защиты. В ГОСТ Р 50744-95 [21] введено определение, что защитный элемент одежды представляет собой составной элемент структуры, поглощающий и рассеивающий энергию средств поражения. Согласно этому определению, оценка энергопоглощающей способности материала является важной характеристикой при конструировании индивидуальных средств защиты.

В работе [89], приводятся оценки о вкладе различных составляющих процесса движения на суммарное энергопоглощение. Согласно экспериментальным данным для 60-слойного пакета при начальной скорости

ударника 435 м/с наибольшая доля поглощенной энергии ударника расходуется на вытягивание нитей – порядка 45%, около трети кинетической энергии – на разрыв волокон, а на раздвижку нитей менее 4% от общей кинетической энергии поражающего элемента.

В работах [69, 110] приведены результаты обширных расчётных и экспериментальных исследований механизмов энергопоглощения, однако один из выводов – «основным диссипативным фактором является работа на перемещениях волокон, а не традиционно принимаемые потери на трение и разрушение» - представляется неясным, т.к. не указано, какие силы совершают эту работу. Очевидно, это должны быть внутренние напряжения в волокнах и силы трения.

Поглощение кинетической энергии тканью сопровождается выделением тепла. Измерение температуры тканой преграды термографическими методами показало повышение максимальной температуры примерно на 60°. Заметим, что выделение части энергии в виде тепла не является отдельным механизмом энергопоглощения, поскольку в тепло – полностью или частично – переходит та энергия, которая была поглощена материалом преграды за счёт необратимой деформации и трения. Однако сам факт выделения тепла и значительного изменения температуры свидетельствует о наличии косвенного признака процессов поглощения энергии, который поддаётся надёжному измерению термографической аппаратурой.

В работе [40] делаются попытки обобщить подходы к оценке баллистических свойств неметаллических материалов, в частности выявлении зависимостей между баллистической стойкостью и механическими свойствами материалов. Показано, что зависимости, полученные для статических нагрузок, не могут быть расширены для случая высокоскоростного пробития. Автор этой работы определяет ряд механических характеристик материала, которые напрямую влияют на баллистические свойства. Среди таких характеристик выделены: твердость [108], прочность на сжатие [100, 104], плотность или

уплотненность, модуль Юнга, модуль сдвига, модуль всестороннего сжатия, предел упругости, трещиностойкость. Приводятся наиболее устоявшиеся методики по экспериментальной оценке баллистических характеристик. Однако многообразие этих методик не позволяет выделить стандартный подход, тем самым затрудняется оценка схожих по свойствам материалов.

В [8] исследуются особенности взаимодействия тканой преграды с осколками, траектория которых направлена под острым углом к поверхности. Однако стандартные методы оценки стойкости преграды, используемые при проектировании, предусматривают удар по нормали.

Теоретическое описание стадий взаимодействия в большей степени основано на экспериментальных данных, что не дает исчерпывающего объяснения всех механизмов, происходящих в ткани [89]. Для выбора методов и подходов к математическому описанию, как объекта исследования, так и происходящих процессов требуется изучение существующих теорий и методик.

1.2 Современные методы моделирования тканой преграды и ее взаимодействия с поражающим телом

Модели, описывающие поведение тканых структур, позволяют проводить как оценку эффективности различных конструкционных параметров, так и выполнять их оптимизацию при минимальных накладных расходах. Одной из задач исследования ударных взаимодействий поражающих элементов с преградами является аналитическое определение глубины проникания в преграду. Выражения для расчёта глубины пробития преград для снарядов в той или иной комбинации содержат скорость удара, массу и геометрические параметры снарядов, прочностные параметры снаряда и преграды и другие различные эмпирические коэффициенты. В [108, 102, 7, 54] приводятся аналитические модели по определению предельной скорости пробития, а в [99] приведена модель для выражения остаточной скорости снаряда после прохождения через

преграду. Классические результаты аналитического решения задач о деформировании изолированных нитей при ударе получены в [81].

Однако применение аналитических моделей требует задания корректного протекания физических процессов и рассматривают только самые простые варианты конструкции, что не даёт возможность анализировать поведение многослойных образцов с различными физико-механическими параметрами материалов. Применение численных методов позволяет учитывать эти факторы.

Анализ литературы по тематике исследования ударных процессов в тканом слоистом материале показал, что в основном авторы основываются на следующих подходах: приближённое оценивание параметров соударения [53,89], представление многослойного тканого образца в виде эквивалентной слоистой среды [68] и полномасштабное моделированием отдельных нитей [68, 112].

Приближенные оценки показывают, что радиус зоны контакта превышает радиус ударника на 30-50% [24], полученные таким образом данные хорошо согласуются с экспериментальными исследованиями.

В работах [89, 90] описывается модель, в которой поглощение энергии происходит за счет накопления остаточной деформации слоёв при ударе, однако работа сил при взаимном продергивании нитей не рассматривается.

В [53] приводятся упрощенные постановки об ударе по нити с постоянной силой натяжения и деформировании слоя ткани. На основе полученных экспериментальных данных приводится зависимость прогибов деформационного купола от времени в виде экспоненциальной функции.

Приближенные оценки достаточно хорошо согласуются с экспериментально измеренными параметрами тканого материала. Однако остаются составляющие энергопоглощения, прямое измерение которых невозможно. К таким параметрам можно отнести трение при вытягивании нити. Измерению поддается величина усилия, прикладываемого для вытягивания отдельной нити из слоя ткани [89]. При этом установлено, что силы трения по длине нити распределяются неравномерно, тем самым запись определяющих уравнений трения требуется особой аккуратность их вывода.

В работе [68], показан подход основанных на детальном моделировании нитей слоистого материала. К отдельной нити применена модель упруго трансверсально-изотропного тела. Такой метод моделирования позволяет получать довольно наглядные результаты, сопоставимые с реальным поведением, при этом его ограничением становится применимость к исследованию изделий незначительных размеров.

Более практичен подход, аналогичный полномасштабному моделированию, но с сокращённым числом структурных элементов (клеточных автоматов). Один из вариантов метода предложен в Российском материаловедческом центре (г. Томск) и Институте физики прочности и материаловедения СО РАН. Процессы в рамках данного метода рассматриваются на мезоуровне, так как на основе подходов физики твёрдого тела (микроуровень) и механики сплошных сред (макроуровень) невозможно объяснить и смоделировать некоторые явления. Моделируемый объект рассматривается как набор элементов – подвижных автоматов. В отличие от классических клеточных автоматов, каждый элемент обладает способностью изменять не только свое состояние, но и положение и ориентацию. Как следствие, каждый автомат имеет следующие параметры: радиус-вектор положения, линейную скорость, угловую скорость, угол разворота, размер, массу и момент инерции.

Метод сеточных автоматов позволяет учитывать многообразные процессы, происходящие в исследуемом объекте, а задание граничных условий различного типа, позволяет устанавливать действие внешней среды [79, 114]. Один из примеров применимости клеточных автоматов для моделирования тканого материала описан в [112]. В отличие от общего метода клеточных автоматов, в этом примере сетка неизменна на протяжении симуляции, но изменение параметров каждой клетки в процессе эволюции эмулирует перемещения нитей.

В работе [97] рассматривается дискретизация отдельных нитей конечными элементами оболочек. Соседние элементы нитей находятся в контактном взаимодействии. В сечение нити, аппроксимированное двумя сегментами окружности, «вкладываются» элементы прямоугольной формы. Авторы описали

дискретизацию тремя и пятью такими элементами. Поперечное сечение нити разбивается на четырехузловые конечные элементы, что позволяет описывать процесс разрушения отдельной нити в этом направлении.

В целях сокращения вычислительных затрат в работах [35, 33, 32] предлагается многослойный тканый образец заменять на структуру с двумя или тремя увеличенными по толщине слоями. Нити могут продергивать относительно слоя, однако процессы тепловыделения, вызванные трением не рассматриваются.

В работе [31] предлагается выделить в тканом материале ячейку периодичности и решать краевую задачу на этой ячейке. Прочность матрицы определяется критерием Писаренко-Лебедева, а разрушение нитей описывается двухуровневой моделью пучка волокон. Решение, полученной на структурной ячейке, может быть распространено на большие объемы ткани.

В статьях [29, 27] Дмитриенко Ю.И. предлагается модель механических процессов в гибких броневых композиционных материалах (ГБКМ). Модель предполагает учитывать вклад в энергопоглощение таких процессов как трение при вытягивании нитей, сжатие слоев в поперечном направлении, раздвижка нитей в направлении удара. Модель ГБКМ учитывает конечные пластические деформации изотропных и анизотропных сред [28, 30].

В статьях [118, 117] предлагается концепция цепных цифровых элементов. Ткань рассматривается как совокупность нитей, а нить – как совокупность волокон. Волокно моделируется как невязкая цепь соединенных последовательно стержневых элементов – «цифровая цепь». Так как нить состоит из многих волокон, она моделируется как совокупность цифровых цепей. Взаимодействие между цепями моделируется с помощью контактных элементов. Если расстояние между двумя узлами на разных нитях достигает диаметра нити, то происходит контакт. Сдвиги нитей внутри ткани выводятся на основе глобальной матрицы жесткости и граничных условий. Это позволяет отследить перемещения нитей и форму поперечного сечения во время формирования или деформирования ткани.

В работах [119, 115] рассматривался процесс проскальзывания отдельной нити в ткани. Взаимодействие между вытянутой нитью и оставшимися нитями

определяется диаграммой предела прочности при сдвиге. Процесс разделяется на две стадии: раскручивание и перемещение нити. При нагрузке нить сначала начинает выпрямляться, и напряжение сдвига сразу превосходит предел прочности при сдвиге из-за упругости ткани, что приводит к раскручиванию нити. В работе приводятся ограничения аналитической модели: непрерывность и фрикционный предел прочности при сдвиге. Поэтому одновременно предлагается конечно-элементная модель, описывающая мезоструктуру и поведение ткани. Такая модель нужна еще и затем, чтобы исследовать влияние трения и предварительной нагрузки в направлении нитей утка при проскальзывании. В расчётах образца размером 10x10 нитей используется 20000 восьмиузловых элементов и 36300 узлов, что показывает ограниченность такого подхода в практическом применении к анализу удара поражающего тела в тканую преграду. Механизмы разрушения нити подробно анализировались также в [113], эти результаты имеют существенное значение при построении уточнённых моделей, но связаны с высокими затратами при расчёте.

В работе [51] предложена аппроксимация ткани сплошной анизотропной средой, где главные направления совпадают с направлением укладки нитей. Такие модели достаточно эффективны и применимы к большим размерам рассматриваемого изделия.

В работах [55, 5] ткань рассматривается как регулярная структура, в которой можно выделить элементарный периодический элемент. С учетом особенностей вида переплетения, считается, что изменение формы нитей основы и утка по всему тканому слою одинаково и может быть аппроксимирована синусоидальной кривой.

Подход, предложенный в статье [23], основывается на дискретизации преграды сеточно-ячеечным методом, который характеризуется следующим: «К преимуществам данного метода можно отнести учет распространения разрывов вдоль характеристических поверхностей, что позволяет корректно строить численные алгоритмы на границах области интегрирования и поверхностях

раздела сред». Однако остаётся невыясненным возможное соотношение масштабов ячеек и объекта в целом.

Авторы статьи [60] предлагают моделировать ткань на основе использования метода частиц. Согласно этому подходу, ткань заменяется системой конечного числа частиц в точках пересечения нитей. Отмечается, что на ткань должна быть наложена равномерная сетка с квадратной формой ячеек, что позволит приближено описывать реально действующие силы. Основной проблемой при таком представлении ткани квадратной сеткой является искажение исходного контура детали.

В статье [70] континуальный подход к моделированию деформаций ткани использован для определения напряжений и деформаций. Теоретические результаты получены на вязко-упругой модели, включающей два упругих и одно вязкое звено. Параметры модели определяются идентификацией по экспериментальным данным, полученным на тканях различного плетения. Этот подход позволил получить распределение напряжений в тканом пакете. Аналогичные результаты в случае модели пластического деформирования содержатся в [10]. Задача тепловыделения и нагрева не ставилась.

Подводя итог, следует отметить, что известные модели не описывают нагрев оболочек из тканых материалов при ударе. Между тем, эффект выделения тепла в тканой преграде может быть использован для оценки параметров происходящих в ней процессов. Такой анализ требует применения хорошо разработанных моделей термомеханики [36].

Необратимая деформация нитей и действие сил трения приводят к выделению энергии в виде тепла и повышению температуры ткани. Нагрев может служить косвенным признаком процессов деформирования, разрушения и проскальзывания нитей ткани. В работе [89] экспериментально показано, что ткань преграды может нагреваться при ударе на 60 и более градусов, что может быть измерено. Таким образом, этот эффект может быть использован для оценки плотности (на единицу объёма) поглощения энергии тканью.

Аналогичный подход к оценке энергии разрушения ранее был использован, например, в [2, 12] применительно к тонкостенным элементам конструкций из композитов. В работе [13] оценена доля поглощённой энергии, переходящая в тепло при разрушении пластин, армированных волокнами из органопластика. Расположение нагретых зон на термограмме при механическом растяжении пластины совпадает с зонами концентрации напряжений.

Получение косвенных оценок поглощённой энергии по тепловому эффекту требует математического моделирования взаимообусловленных процессов, приводящих к изменению температуры тканой преграды при ударе: необратимой деформации и разрушения нитей, трения между слоями ткани и отдельными нитями при их взаимном перемещении, перехода поглощённой энергии в тепло, а также теплопереноса внутри материала и теплоотдачи в окружающую среду.

Приведенные выше методы и подходы к математическому моделированию тканых преград и процессов, происходящих при высокоскоростном соударении, требуют для своей реализации специальных программных средств. Рассмотрим далее существующее программное обеспечение, позволяющее решать класс подобных задач.

1.3 Программное обеспечение для вычислительного эксперимента

Экспериментальное пробивание различных материалов является обязательным при проектировании реальных промышленных изделий, при этом сопровождается значительными затратами. Решением этой может стать применение специализированного программного обеспечения для моделирования изделия и воздействий на него, что позволяет сократить количество физических прототипов и испытаний в процессе разработки. Численное моделирование позволяет исследовать поведение изделия при различных конструктивных параметрах, что существенно сокращает время на этапе проектирования.

В настоящее время для численного моделирования ударных процессов в тканых преградах применяют программные пакеты, относящиеся к коммерческим

продуктам (LS-DYNA, ANSYS, NASTRAN и др.), а также авторские программные средства, не имеющие универсального характера, но реализующие специфические модели поведения динамического деформирования и разрушения ударников и мишеней.

Известными ведущими институтами и компаниями был разработан ряд численных методов расчета быстропротекающих процессов, к которым относятся и процесс пробивания преград. В настоящее время хорошо отработанный и экспериментально проверенный программный продукт LS-DYNA [101, 107, 71] применяется на предприятиях, занимающихся проектированием и производством изделий из полимерных композитов и тканей. В статьях [87, 34] приводятся примеры расчетов изделий с применением этого пакета. В работе [116, 121] пакет LS-DYNA использован для конечно-элементного моделирования гибких тканых материалов на основе модели сплошной среды. Моделирование ограничивается однослойным тканым материалом. В [120] показано моделирование однослойных и многослойных тканых образцов на основе метода конечных элементов, приводятся сравнения с данными экспериментов, при этом отмечаются ограничения в регистрации параметров при физическом эксперименте. В [103] приведены результаты численного анализа на мезоуровне, но использованное программное обеспечение и производительность компьютера не указаны; констатируется различие перемещений, полученных на макро- и мезомодели, вдали от места удара. Из этого можно сделать вывод, что точность теоретических моделей в настоящее время нельзя гарантировать без явного использования результатов физического эксперимента; при должной настройке простая континуальная модель может дать более достоверные результаты, чем модель мезоуровня, требующая использования суперкомпьютеров.

Программная система конечно-элементного анализа ANSYS [65] является одной из самых популярных систем широкого круга решаемых задач из области физики и механики. Система ANSYS позволяет строить геометрические модели собственными встроенными средствами или импортироваться из внешних источников. Именно эта возможность демонстрируется в работе Долганиной [34],

в которой тополого-геометрическая модель была реализована в пакете программ ANSYS, а ударное взаимодействие жесткого элемента с тканью рассчитано в пакете программ LS-DYNA.

Для моделирования высокоскоростных нелинейных динамических процессов в твердых телах, жидкостях и газах специально разработан пакет ANSYS Autodyn. ANSYS Autodyn позволяет моделировать быстропротекающие процессы, такие как детонационные и дефлаграционные взрывы, поведение и отклик конструкций на интенсивное динамическое воздействие за пределами несущей способности, разрушение, фрагментация, пробитие материалов и др. В качестве примера использования данного продукта можно привести работы авторов [58, 57, 63].

Существующие коммерческие программные комплексы имеют высокую стоимость и закрытый программный код, что затрудняет процесс расширения класса решаемых задач или вовсе делает это невозможным.

Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» [44, 49, 48] имеет легко осваиваемые компоненты интерфейса и частично открытый код, что позволяет пользователю модифицировать набор имеющихся решений под узкоспециализированную задачу. Разработка алгоритмов решения осуществляется с помощью средств визуального программирования. Опыт автора в использовании среды «Алгозит» для реализации задач вычислительного эксперимента и участие в её коллективной разработке является существенным аргументом для выбора среды «Алгозит» при решении задач настоящей работы, поэтому необходимо привести более подробный анализ возможностей этой среды.

1.4 Обзор среды функционально-объектного программирования «Алгозит»

Среда программирования «Алгозит» - коллективная разработка, в которой автор принимала непосредственное участие. Её особенностью является использование функционально-объектного подхода к проектированию и программированию вычислительных алгоритмов.

Программная реализация в среде «Алгозит» заключается, с одной стороны, в программной реализации функциональных классов на языке C++, и с другой стороны – в конструировании визуальных алгоритмов в виде функционально-объектных схем. Благодаря достаточно широкому набору предварительно реализованных функциональных классов, во многих случаях при разработке программ удаётся обойтись без дополнительного написания специальных классов.

Связующим двух аспектов процесса программирования является функциональный объект, или алгокат, являющийся экземпляром класса на C++. Интерфейс функционального имеет установленную структуру и наследует свойства класса-родителя. Алгокат наделён функциональностью, которая позволяет ему хранить значения в своей памяти.

Множество соединенных между собой объектов образуют функциональную сеть, изображаемую функционально-объектной схемой. Схема может состоять из панелей, стрелок и рамок; панель обозначает алгокат, стрелка – функциональную зависимость одного алгоката от другого, рамка – объединение группы алгокатов в агрегат или итератор.

Наиболее часто используемый алгокат – таблица – содержит в своей памяти числовые (или другие) данные в виде таблицы, составленной из строк одинаковой или неодинаковой длины. Эти данные используются при выполнении специально предназначенной для этого операции – вычислении. Термин «вычисление» является лишь названием такой операции: в действительности данные могут копироваться из других таблиц, или вводиться из файла, или генерироваться любым способом. Вычисление реализуется в программе в виде отдельного метода, присущего классу функционального объекта, а при составлении функционально-объектной схемы для объекта указывается, какой он будет иметь класс.

При вычислении алгокат может использовать данные других алгокатов, связанных с ним на схеме стрелками. Связи могут быть двух видов: функциональные зависимости вида «функция-аргумент» и связи, не предполагающие функциональной зависимости (связи «по видимости»). У

объектов может быть множество аргументов, при этом номера этих аргументов на схеме (помечается на стрелке, идущей от объекта к аргументу) должны соответствовать порядку обработки в функциональном классе. Все аргументы алгомата вычисляются до вычисления объекта, и их данные доступны для использования. Связь «по видимости» позволяет объекту «увидеть» данные другого объекта, однако прямой гарантии, что эти данные уже существуют, нет.

Вычисление объекта изменяет его состояние [47, 48, 46]. Диаграмма переходов представлена на рисунке 1.1. Состояния изображены прямоугольниками и выделены сплошной черной рамкой, пунктирной рамкой обозначены обработчики, дугами показаны переходы между состояниями. Неименованные состояния (малые серые прямоугольники без надписи) и пунктирные переходы между ними не изменяют флага состояния объекта.

Исходное состояние алгомата – «Не инициализирован» (osNotInitialized). Метод PointersInit выполняется первым при инициализации. Это необходимо, чтобы найти указатели на аргументы объекта. Кроме того, этот метод выполняется всякий раз перед вычислением, если объект содержит динамические связи с аргументами; это обеспечивается транслятором и позволяет обновлять указатели на аргументы и связи до входа в последовательность, показанную на диаграмме.

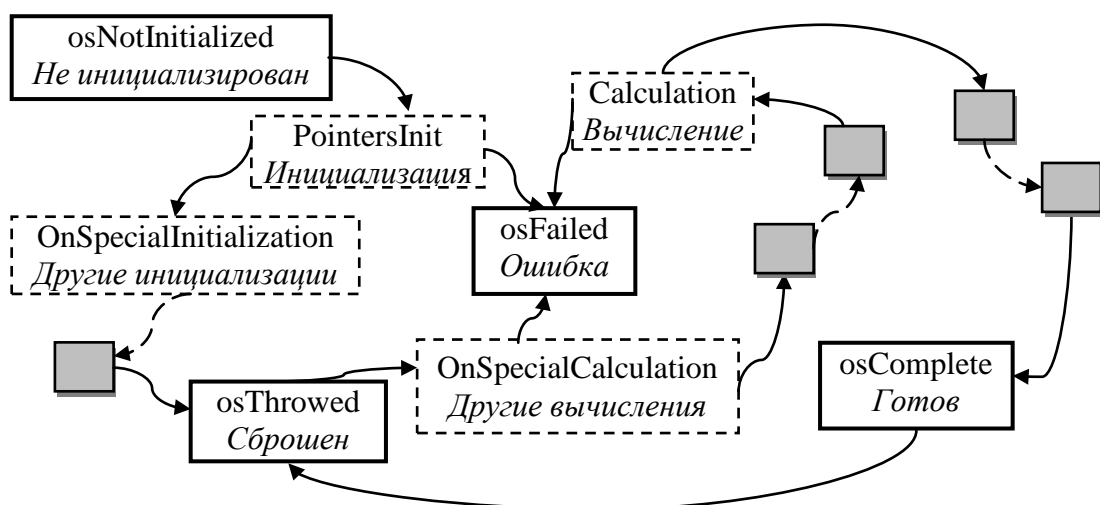


Рисунок 1.1 - Диаграмма переходов и состояний алгомата при вычислении

Далее, при переходе из состояния «Сброшен» (`osThrown`), если установлен обработчик `OnSpecialCalculation`, он выполняется для установки главного и дополнительного значения.

После этого вызывается последовательность обработчиков, которая заканчивается вызовом виртуального метода `calculation`, и после выполнения завершающей последовательности обработчиков получаем состояние готовности (`osComplete`). Состояние ошибки (`osFailed`) может установиться после любого обработчика.

По функционально-объектной схеме легко установить последовательность состояний, через которые проходит алгомот во время работы программы. Однако что именно делается при переходах между состояниями, т.е. поведение алгомата, определяется его собственными свойствами (набором обработчиков переходов).

Для циклической организации выполнения алгоритмов предусмотрены специальные объекты – итераторы. В этом случае циклически выполняемый алгомот требуется включить в контекст итератора. Допускается использование вложенных итераторов. В начале каждой итерации состояние объекта из «Готов» понижается до «Сброшен». При этом номер повторения цикла заносится в специальный атрибут – индекс итератора. Из этого состояния объект переходит в состояние «Готов» после его вычисления в цикле и остаётся в готовности до следующего повторения цикла.

Алгомот, который входит в контекст итератора и в то же время является аргументом другого алгомата, находящегося вне этого итератора, после каждого вычисления (перехода в состояние «Готов») отправляет зависимому объекту запрос на приём вычисленных данных. Приняв данные от аргумента, зависимый объект переходит в состояние «Вычисляется» и остаётся в этом состоянии, пока не будет выполнено его собственное вычисление (тогда он придёт в состояние «Готов»).

Состояние объекта может быть понижено вплоть до «Не инициализирован», если этот объект больше не нужен. При переходе в состояние «Не

инициализирован» выполняется соответствующий обработчик, который полностью освобождает память алгомата.

Повышение и понижение статуса объекта производится поэтапно.

Если исходный статус объекта – «Не инициализирован», вначале выполняется «специальная» инициализация структурообразующих объектов (этот обработчик отсутствует у большинства алгомагов), затем выполняются обработчики инициализации поведения, инициализации файла, инициализации памяти и инициализации данных. Статус объекта при этом становится «Только инициализирован».

Переходы между состояниями выполняются обработчиками «первого уровня», которые, в свою очередь, могут вызывать обработчики «второго уровня».

Обработчики второго уровня, которым может быть назначено выполнение скрипта, имеют уникальные имена скриптов. Обычно они соответствуют именам обработчиков с префиксами «Перед», «При» и «После», например, «Перед_вычисл» (Before_calculation). Скрипты с именами «Перед» выполняются перед соответствующими «защитными» обработчиками, а с именами «После» - после соответствующего обработчика. Скрипты с именами «При» выполняются вместо соответствующего обработчика.

При конструировании функционально-объектной схемы пользователь может убрать обработчик, установленный по умолчанию, или поменять его на другой метод из определённого набора.

В качестве обработчика перехода можно задать код на языке «Ядро» - скрипт, выполняемый при переходе. Скрипт не отменяет «основной» обработчик, установленный по умолчанию, а выполняется после него. В скрипте доступны данные и атрибуты самого объекта, а также его аргументов и связанных объектов.

Алгомаг любого класса имеет три атрибута: флаг состояния, главное значение и дополнительное значение. В скрипте можно получить доступ к ним, используя переменные: `_Main` – главное значение, `_Add` – дополнительное значение, `_Status` – флаг состояния. Если алгомаг входит в итератор, он имеет

также атрибуты: `__Index` – номер экземпляра (текущий индекс итератора) и `__Count` – число повторений итератора.

Еще один вид объектов – это панель ссылки. Сама по себе ссылка не является никаким алгомотом, а только может ссылаться на него. Ссылка может указывать на алгомот, который расположен с ней на одной странице. Тип такого объекта «Ссылка вбок» предназначен для исключения большого количества взаимно пересекаемых стрелок.

Ввиду того, что большие алгоритмы требуют большого количества функциональных объектов, которые не могут разместиться на одной странице, часть схем переносятся на другие страницы. Для связи страниц предназначены также ссылки. Для того чтобы использовать данные объекта с вложенной страницы используются «Ссылки вниз». Для этого необходимо добавить объект «Агрегат», ссылающийся на конкретную страницу, и далее в контекст этого агрегата добавить ссылку, имя которой совпадает с объектом, расположенном на ссылаемой странице. С другой стороны, часто на вложенной странице требуется использовать данные с вышестоящей страницы. Для этого предназначен объект «Ссылка вверх». Заголовок ссылки должен совпадать с заголовком объекта, на вышестоящей странице.

Сеть с побочными эффектами позволяет упростить структуру функционально-объектной схемы алгоритма вычислений матриц, зависящих от координат. Однако существующая модель поведения объектов такой сети имеет недостатки. Первый из них – при разработке новых «конечных» функциональных классов в их методах требуется явно программировать вычисление аргументов. Вторым недостаток – при вычислении многих матриц с одним и тем же неявным аргументом, например, при численном интегрировании матриц жесткости, вязкости и масс конечных элементов, часть времени непроизводительно расходуется на повторные вычисления уже готовых значений. Таким образом, необходимо усовершенствовать модель поведения алгомотов с неявным аргументом. Это потребует также модификации программного кода базовой части комплекса «Алгозит».

1.5 Постановка цели и задач работы. Выбор методов исследования

Приведенный аналитический обзор показывает, что для повышения защитных свойств необходимо на этапе проектирования получать расчётную оценку энергопоглощения в зависимости от выбора конструктивных параметров. Несмотря на значительное число публикаций, исчерпывающего решения проблема адекватного описания динамических деформаций не получила. В эксперименте затруднена регистрация параметров быстро протекающих процессов при соударении. В связи с этим в последние годы появились работы по косвенной оценке энергопоглощения тепловым методом [43, 12], с использованием динамических термограмм, на основе эффекта повышения температуры тканого материала при поглощении энергии удара. Такие исследования требуют значительного числа физических экспериментов для выявления зависимостей распределения температуры на поверхности от варьируемых факторов, что не всегда возможно. Построенная математическая модель безмоментной оболочки с вязким проскальзыванием нитей [11] позволяет настраивать теоретическую модель по данным натурных испытаний. Недостатком этой модели является возникающая сингулярность по координатам в точке соударения (за счет приведения нагрузки к сосредоточенной силе в одном узле) и в начальный момент времени (за счёт мгновенного ускорения в момент контакта с ударником), а также неучёт различия энергопоглощения по слоям. Решением этой проблемы может стать использование моделей моментных оболочек и рассмотрение начальной стадии соударения как волнового взаимодействия.

Таким образом, актуальна цель настоящей работы – разработка средств математического моделирования процессов поглощения энергии при ударе жестким поражающим элементом в многослойный пакет из полимерной ткани применительно к оценке нестационарных температур на поверхности.

Поставленная цель достигается путем решения следующих задач:

1. Разработка математической модели механических и тепловых процессов в многослойном пакете из полимерной ткани при ударе жестким

поражающим элементом, учитывающей растягивающие напряжения в нитях, необратимость деформации растяжения, работу разрыва нитей, трение при взаимном проскальзывании слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделение тепла и его распространение в ткани.

2. Модификация численной схемы интегрирования уравнений движения многослойного тканого образца при ударе и алгоритма расчёта поглощения энергии поражающего элемента и динамических температурных полей в ткани.

3. Разработка комплекса программ, реализующего модифицированный алгоритм расчёта динамических температурных полей при ударе жестким поражающим элементом в многослойный тканый образец.

4. Исследование сеточной сходимости, точности численного решения и чувствительности модели к вариации конструктивных параметров тканого пакета и начального импульса поражающего элемента.

5. Расчётно-экспериментальное исследование энергопоглощения в многослойных образцах из полимерной ткани на основе математического моделирования и анализа динамических термограмм.

Для обеспечения решения поставленных задач требуется применение методов механики деформируемого твердого тела и термодинамики для построения математической модели термомеханических процессов в многослойных пакетах из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом; численных методов решения краевых задач и вычислительной математики для расчета динамических напряжений, деформаций и температур; метода термографии для экспериментального обоснования достоверности результатов; методов объектно-ориентированного программирования и функционально-объектной декомпозиции для разработки комплекса программ, обеспечивающего возможность гибкой модификации с учётом возможного изменения определяющих уравнений материала.

ГЛАВА 2 МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТКАНИ ПРИ СОУДАРЕНИИ С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

2.1 Описание объекта моделирования

Объектом моделирования являются процессы в тканом образце при ударе твердым поражающим элементом. Эти процессы исследуются с целью выявления закономерностей распределения температур в слоистом образце во время соударения и после удара. Материальный объект, находящийся под воздействием высокоскоростного удара, представляет собой многослойный тканый образец. Слои ткани расположены свободно, без связующего между ними. Каждый слой ткани представляет собой ортогональное пересечение двух семейств нитей. Нити могут иметь произвольный угол укладки относительно кромки.

Кинетическая энергия твердого ударника при ударе в тканую преграду переходит в работу сил трения, работу реакции основания, работу растягивающих напряжений и разрушения нитей. Часть энергии переходит в тепло и вызывает нагрев ударника и нитей. В начальный момент соударения только центральная часть образца контактирует с ударником, при этом происходят волновые процессы, а найденные на этой стадии скорости и перемещения являются входными переменными (начальными условиями) для последующей оболочечной стадии деформирования.

Ввиду того, что многослойный образец может содержать значительное количество структурных единиц – нитей, в целях сокращения вычислительных ресурсов в качестве основы моделирования была выбрана гипотеза сплошной среды. Слоистый образец согласно этому подходу представляется в виде набора сплошных слоев с усредненными физико - механическими и теплофизическими характеристиками. Усреднение характеристик осуществляется согласно объемному содержанию каждого семейства нитей в слое. Нити могут проскальзывать относительно этой однородной среды (слоя ткани), а сами слои –

смещаться друг относительно друга, что вызывает появление сил трения, работа которых частично поглощает кинетическую энергию ударника.

Процессы, протекающие на волновой стадии, качественно отличаются от процессов на оболочечной стадии деформирования, поэтому моделирование необходимо проводить отдельно для этих стадий. На начальной стадии пакет слоёв ткани рассматривается как слоистая упругопластическая среда, имеющая начальную пористость и уплотняющаяся при ударе с накоплением необратимых деформаций и разрывом волокон.

Модель деформирования на оболочечной стадии является более сложной. Введём в рассмотрение три уровня структурной неоднородности (рисунок 2.1): уровень пакета в целом, уровень слоя и микроуровень, который образуют нити слоя – основа и уток, способные деформироваться с проскальзыванием относительно слоя как сплошной среды.

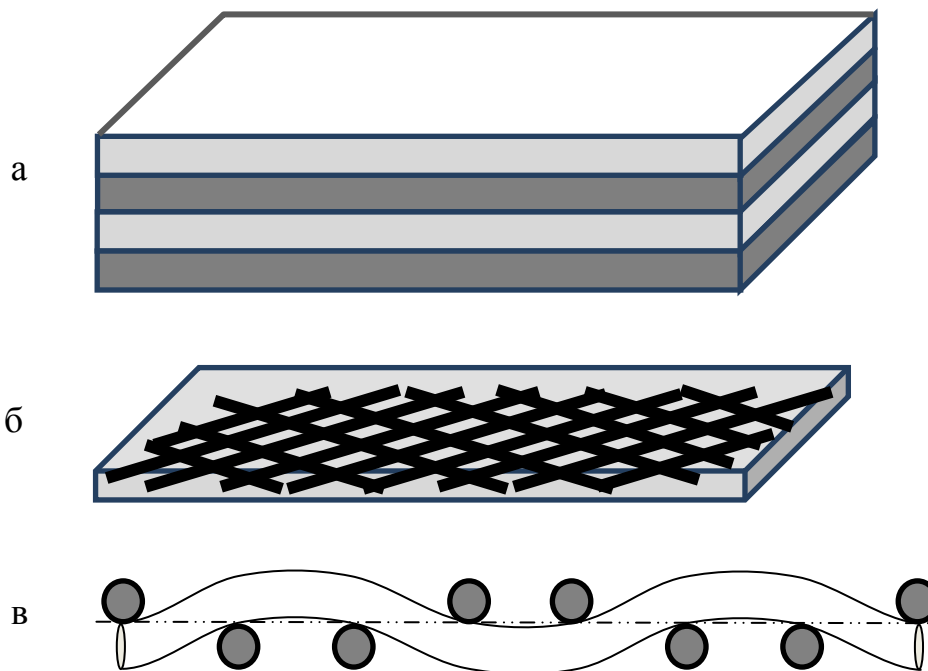


Рисунок 2.1 – Трёхуровневая структура пакета слоёв ткани: а – многослойный пакет, б – слой ткани, в – нить в слое ткани

На верхнем структурном уровне тканый образец рассматривается как многослойная оболочка, характеризующаяся интегральными по толщине

параметрами – поверхностной плотностью, жесткостью на растяжение, сдвиг и изгиб и вязкостью, причём эти характеристики определяются на основе физико-механических параметров слоёв ткани. Переменными состояниями являются перемещения и скорости точек на поверхности приведения, а также внутренние силовые факторы – погонные силы и моменты. Модель деформирования пакета в целом, как слоистой оболочки, может приводить к уравнениям движения в различных формах, однако общим для них является следующее: прогибы оболочки описываются гладкой функцией $u_z(x, y, t) \in C^1$, имеющей непрерывные производные по координатам x и y ; ускорения включают вторые производные по времени как от прогиба, так и от его производных по координатам; ускорения выражаются через перемещения и скорости.

На уровне слоя материал ткани считается однородным, а его физико-механические и теплофизические характеристики соответствуют осреднённой по объёму плотности, средним модулям упругости, средним коэффициентам теплопроводности и средней теплоёмкости ткани. Изменение размеров и формы слоя характеризуется деформациями срединной поверхности слоя: внутрислоевыми деформациями растяжения, сжатия и сдвига, а также кривизной и кручением. В слое как квазиоднородной среде действуют напряжения, в общем случае переменные по его толщине, которые определяются с учётом осреднения по объёму напряжений в нитях, определяемых на микроуровне. На поверхностях раздела слоёв могут действовать касательные напряжения, совершающие работу на перемещениях слоёв друг относительно друга.

Нити основы и утка выделены в микроуровень. Деформация нити отличается от деформации слоя за счёт возможности проскальзывания. Наряду с растягивающими напряжениями, на нить со стороны слоя действуют касательные напряжения, совершающие работу на перемещениях проскальзывания. Таким образом, напряжения в нитях определяются как перемещениями слоя в пакете, так и относительными перемещениями нитей.

Возвращаясь к предыдущему масштабному уровню, перемещения, определяющие проскальзывание, на уровне слоя будем считать непрерывными функциями координат, т.е. нити заполняют всё пространство слоя. Исходя из напряжений в нитях, осреднением по объёму ткани получим напряжения, действующие в слое. Затем интегрированием по толщине пакета получим погонные силы и моменты в пакете (многослойном тканом образце), выраженные через перемещения пакета в целом и относительные перемещения нитей в слоях. Эти силовые факторы должны удовлетворять уравнениям движения.

Таким образом, на оболочечной стадии деформирования структура модели должна содержать следующие группы уравнений:

1) уравнения движения пакета относительно основных функций – перемещений поверхности приведения;

2) кинематические соотношения для выражения перемещений и скоростей слоёв через основные функции;

3) дифференциальные кинематические соотношения для выражения деформаций слоя через его перемещения и скорости деформаций – через производные перемещений по времени;

4) дифференциальные кинематические соотношения для выражения деформации нитей через деформации слоя и относительные перемещения проскальзывания;

5) определяющие уравнения материала нитей на микроуровне для выражения нормальных и касательных напряжений, действующих на нить, через относительные перемещения нитей и относительные скорости;

6) определяющие уравнения уровня слоя и уровня пакета слоёв;

7) начальные и граничные условия;

8) уравнения, определяющие термомеханическое поведение слоистого пакета и включающие законы распределения адиабатической температуры в слоях ткани и процессы теплопроводности в нитях.

Общее число искомых функций равно суммарному числу независимых компонент перемещений пакета в целом и относительных перемещений нитей во всех слоях.

2.2 Модель термомеханических процессов на волновой стадии деформирования ткани

Ранее в [11, 105] предложена упрощённая математическая модель, в которой деформирование тканого материала на оболочечной стадии описывается уравнениями слоистой безмоментной оболочки, что позволяет их численно проинтегрировать и далее найти тепловыделение и нестационарное поле температур на поверхности. Однако при этом скорости всех слоёв считаются одинаковыми, что не позволяет отразить различие условий тепловыделения в разных слоях пакета. Более обоснованными будут начальные условия, учитывающие различие скоростей в разных слоях вблизи зоны контакта с ударником. Для их получения может быть использована оценка скоростей и перемещений на волновой стадии.

Начальная стадия соударения поражающего элемента (ПЭ) со слоистой тканевой преградой рассматривается в работе [91]. В монографии [53] рассматриваются происходящие на начальной стадии механические процессы. Отмечается, что вследствие конечной скорости звуковой волны деформация преграды в течение некоторого времени не выходит за пределы области, ограниченной текущим положением фронта волны.

Далее будет использовано представление, предложенное в [53, 24]: слои ткани имеют известную начальную пористость; уплотнение (уменьшение пористости) необратимо и определяется деформацией обжатия нормали; удлинение нитей выражается через их прогибы; разрушение (разрыв) нитей происходит от действия продольных напряжений при достижении предельной деформации нити.

Покажем на рисунке 2.2 схему взаимодействующих процессов. В прямоугольнике с двойной рамкой обозначен протекающий процесс, слева от него входные переменные процесса, а справа – выходные переменные. Входные данные некоторых процессов должны быть предварительно вычислены на одном из предыдущих этапов.

Ударник передает свой импульс слоистому образцу, что вызывает изменение скорости и перемещения материала ткани. Как следствие, изменяются деформации ε и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}$ слоёв ткани в направлении нормали. Рост деформаций вызывает уплотнение материала, тем самым изменяя пористость материала и модуль упругости. Изменение кинематических параметров и свойств материала приводит к изменению напряжённого состояния пакета, что, в свою очередь, изменяет параметры уравнения движения.

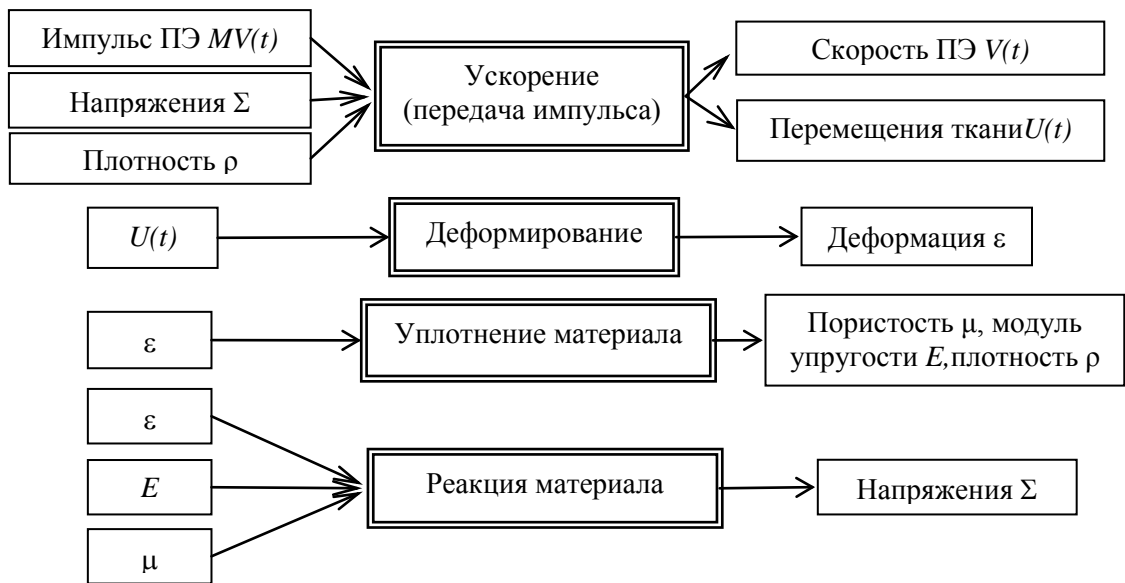


Рисунок 2.2 – Схема взаимодействия моделируемых процессов на волновой стадии

Рассмотрим деформирование ближайшего к ПЭ слоя ткани (рисунок 2.3) и ограничимся интервалом времени, в течение которого ударная волна проходит расстояние, равное толщине этого слоя. Пусть начальная пористость ткани равна

μ_0 , начальная скорость ПЭ V , толщина слоя h , плотность ткани ρ и модуль упругости в направлении нормали E_z .

В момент контакта ПЭ, центр которого находится в точке O_1 , с лицевой поверхностью тканевой преграды звуковая волна начинает проходить по толщине пакета в направлении оси z . За время Δt фронт волны достигает обратной поверхности слоя $z=h$, а центр ПЭ перемещается на расстояние $V \cdot \Delta t$ в положение O_2 . Поверхность $z=0$ перемещается на расстояние $V \cdot \Delta t$, а перемещение поверхности $z=h$ равно нулю. Таким образом, толщина слоя становится равной $h - V \cdot \Delta t$.

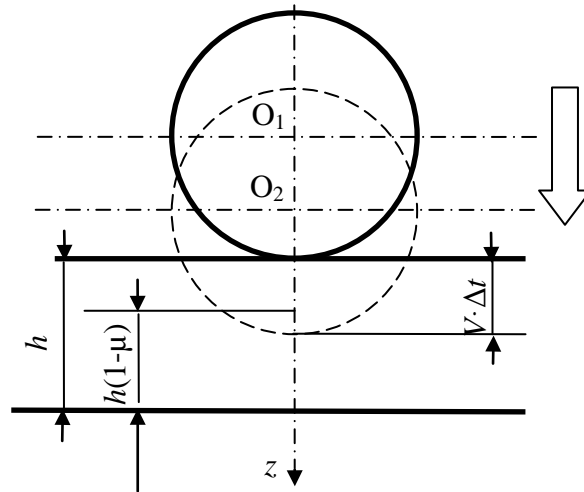


Рисунок 2.3 – Схема деформирования слоя на начальной стадии удара

Объёмная доля пор μ в слое не может быть меньше нуля или больше начального значения μ_0 . Поэтому толщина слоя с учётом только необратимой деформации ограничена снизу величиной $h(1-\mu_0)$, которая достигается после полного уплотнения. При неполном уплотнении в процессе деформации она остаётся больше этой величины. Если кроме необратимой возникает и обратимая деформация, толщина может быть меньше указанного предела. При $V \cdot \Delta t < \mu_0 h$ расстояние, пройденное ПЭ, недостаточно для полного уплотнения, тем самым возникают только необратимая деформация смятия нитей. При $V \cdot \Delta t > \mu_0 h$ уменьшение толщины превышает указанный выше предел, и возникает обратимая

деформация сжатия уплотненного материала нитей. Деформации достигают $\mu_0=50-60\%$ [53], поэтому для деформации сжатия примем логарифмическую меру:

$$\varepsilon = \ln\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (2.1)$$

где u – перемещение по направлению удара вдоль оси z .

Координату z будем считать лагранжевой, что позволяет избежать необходимости учёта изменения плотности в уравнении движения.

Примем, что деформирование соответствует упруго-пластическому закону. Необратимая деформация происходит при активном нагружении, когда напряжение равно пределу прочности ткани при трансверсальном сжатии (напряжению смятия). Предельное напряжение может быть измерено экспериментально [24]. Очевидно, что необратимая деформация обжатия нормали $\varepsilon_{см} < 0$ равна разности начальной пористости и текущей пористости μ : $-\varepsilon_{см} = \mu_0 - \mu$. Нагружение считаем активным, если одновременно выполнены условия: $\dot{\varepsilon} < 0$ и $\mu < \mu_0$ (здесь и далее точками обозначены производные по времени). При активном нагружении происходит рост необратимой деформации сжатия при постоянном напряжении:

$$\sigma_z = \sigma_{см}, \dot{\varepsilon}_{см} = \dot{\varepsilon}, \varepsilon_{см} < 0. \quad (2.2)$$

При достижении нулевой пористости либо при уменьшении деформации сжатия происходит разгрузка, для которой примем линейное определяющее уравнение:

$$\sigma_z = E_z(\varepsilon - \varepsilon_{см}). \quad (2.3)$$

Напряжения определяются формулой (2.3) и в том случае, когда после разгрузки деформация сжатия увеличивается до величины необратимой деформации; после этого нагружение становится активным.

Модуль упругости вследствие уплотнения материала растёт пропорционально степени уплотнения:

$$E_z = \frac{E_z^{нач}}{1 + \varepsilon_{см}}. \quad (2.4)$$

Перемещения $u(z, t)$ и скорость $\dot{u}(z, t)$ определяются решением уравнения движения под действием напряжений (2.2), (2.3):

$$\rho \ddot{u} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad (2.5)$$

при начальных условиях:

$$u(z, 0) = 0, \quad \dot{u}(z, 0) = 0 \text{ при } z > 0, \quad \dot{u}(0, 0) = V_0, \quad (2.6)$$

и граничных условиях в напряжениях на лицевой и обратной поверхности пакета:

$$\pi \cdot r_a^2 \sigma_z(0, t) = M \ddot{u}(0, t), \quad \sigma_z(N \cdot h, t) = 0, \quad (2.7)$$

где M – масса ПЭ, N – число слоёв пакета.

Таким образом, получили начально-краевую задачу для уравнения (2.5), в котором напряжения выражаются формулой (2.3) с учётом (2.1), (2.2) и (2.4), начальные условия для перемещений и скорости имеют вид (2.6), начальное условие для пористости $\mu = \mu_0$, граничные условия для напряжений – вид (2.7), начальное условие для скорости ПЭ $V = V_0$. Критерием окончания волновой стадии является достижение фронтом волны обратной стороны слоистого образца. Это время определяется из отношения толщины тканого пакета к скорости прохождения звуковой волны.

Решение этой задачи далее будет получено численно и использовано в качестве начального условия для уравнений движения на оболочечной стадии.

2.3 Кинематика движения многослойного тканого пакета на оболочечной стадии деформирования

Модель термомеханических процессов на оболочечной стадии соударения была приближенно описана в [43, 105, 106]. В этой модели движение пакета слоёв рассматривается как объединённое переносное движение пакета в целом и относительное движение нитей в слоях ткани, при этом не учитывалось обжатие нормали. Однако, как отмечалось в главе 1, этой модели присущи недостатки: невозможность адекватного описания различий тепловыделения в одинаковых слоях на разном расстоянии от поверхности удара, наличие сингулярности в

начальный момент соударения, отсутствие учёта трения между слоями. Поэтому потребовалось разработать усовершенствованную модель, отличающуюся описанием движения и деформации многослойной ткани.

Кинематика переносного движения пакета слоёв. Примем для описания кинематики переносного движения гипотезы теории оболочек Редди [111, 94]: материальная нормаль к исходной срединной поверхности при деформировании остаётся прямолинейной, но поворачивается, составляя с геометрической нормалью к деформированной срединной поверхности угол поперечного сдвига, а её длина изменяется на величину обжатия нормали.

Перемещения в относительном движении заключаются в проскальзывании нити вдоль искривленной поверхности, форму которой определяет переносное движение. На рисунке 2.4 представлена схема двух составляющих движения – переносного и относительного.

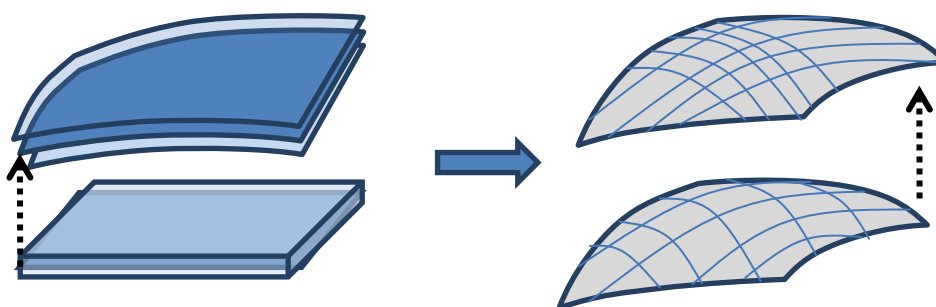


Рисунок 2.4 – Схема переносного движения пакета слоёв и относительного движения нитей

Кинематика переносного движения определяется как объединение движения отсчетной поверхности пакета в целом, движения точек вдоль геометрической нормали и сдвиговых перемещений слоев.

Рассмотрим выражения для деформации изгиба, кручения и растяжения для поверхности приведения слоистого пакета.

Примем за отсчетное положение всего пакета его положение в начальный момент времени, когда деформации отсутствуют, а за отсчётную поверхность (поверхность приведения) – его лицевую поверхность. Базисные вектора лагранжевой системы координат e_α и e_β в повернуты относительно базисных

векторов эйлеровой системы координат e_X и e_Y на угол укладки нитей φ и связаны с ними формулами преобразования базиса при повороте:

$$\vec{e}_\alpha^0 = e_X \cdot \cos \varphi - e_Y \cdot \sin \varphi, \quad \vec{e}_\beta^0 = e_X \cdot \sin \varphi + e_Y \cdot \cos \varphi. \quad (2.8)$$

Базисы (e_X, e_Y, e_Z) и $(e_\alpha^0, e_\beta^0, e_n^0)$ в исходном положении ортонормированны.

В процессе движения координаты X, Y принимаем постоянными, а координата Z изменяется в зависимости от X, Y :

$$(X, Y, Z) \rightarrow (X, Y, U_z(X, Y)). \quad (2.9)$$

Лагранжевы координатные линии искривляются, образуя деформированную поверхность с векторным уравнением в виде зависимости радиус-вектора от двух переменных:

$$\vec{M} = \vec{M}(\alpha, \beta) \quad \text{или} \quad \vec{M} = \vec{M}(X, Y). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) задаёт криволинейную поверхность, а линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ или $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ будут её координатными линиями. Для всего пакета в целом удобнее применять координаты (x, y, z) , а для отдельного слоя – (α, β, z) или (α, β, n) , в зависимости от цели описания.

Найдем векторы касательных \vec{M}_α и \vec{M}_β к координатным линиям α и β , продифференцировав уравнения (2.10) по каждой из координат и учитывая, что переносное движение происходит только вдоль эйлеровой оси Z :

$$\begin{aligned} \vec{M}_\alpha &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} = e_\alpha^0 + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \cdot e_z^0, \\ \vec{M}_\beta &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial \beta} = e_\beta^0 + \frac{\partial u_z}{\partial \beta} \cdot e_z^0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично выражаются векторы касательных \vec{M}_x и \vec{M}_y к криволинейным координатным линиям x и y :

$$\begin{aligned} \vec{M}_x &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = e_x^0 + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot e_z^0, \\ \vec{M}_y &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = e_y^0 + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot e_z^0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оси (X, Y) можно рассматривать как частное положение осей (α, β) , поэтому далее выкладки приведены для общего случая.

Для удобства введены следующие обозначения:

$$u'_\alpha = \frac{\partial u_z}{\partial \alpha}, \quad u'_\beta = \frac{\partial u_z}{\partial \beta}. \quad (2.13)$$

Обозначим длины векторов касательных через A_α и A_β и найдем их значения согласно выражениям:

$$\begin{aligned} M_\alpha^2 &= 1 + u'^2_\alpha = A_\alpha^2, \\ M_\beta^2 &= 1 + u'^2_\beta = A_\beta^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Найдем угол χ между координатными линиями α и β :

$$\cos \chi = \frac{\vec{M}_\alpha \cdot \vec{M}_\beta}{A_\alpha A_\beta} = \frac{u'_\alpha \cdot u'_\beta}{\sqrt{(1 + u'^2_\alpha)(1 + u'^2_\beta)}}. \quad (2.15)$$

Заметим, что угол $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2} - \chi = \arcsin(\cos \chi)$ может служить мерой деформации внутрислоевого сдвига.

Для произвольно направленных координатных линий зададим сколь угодно близкие точки (α, β) и $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, тогда длина дуги произвольной линии на поверхности будет определено первой квадратичной формой [73]:

$$d\vec{M}^2 = ds^2 = (1 + u'^2_\alpha)d\alpha^2 + 2u'_\alpha u'_\beta d\alpha d\beta + (1 + u'^2_\beta)d\beta^2. \quad (2.16)$$

Выразим α и β через произвольный параметр Γ :

$$\alpha = \alpha(\Gamma), \quad \beta = \beta(\Gamma). \quad (2.17)$$

Тогда в равенстве (2.10) вектор точки координатной поверхности, находящейся на дуге Γ , будет функцией одной переменной Γ . Выражая в (2.16) дифференциалы $d\alpha$ и $d\beta$ через $d\Gamma$, получим формулу для дифференциала дуги Γ :

$$ds_\Gamma = \sqrt{(1 + u'^2_\alpha) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma} \right)^2 + 2u'_\alpha u'_\beta \frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \Gamma} + (1 + u'^2_\beta) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \Gamma} \right)^2} d\Gamma. \quad (2.18)$$

Из этого соотношения, поочередно принимая $d\Gamma$ равным $d\alpha$ и $d\beta$, найдём удлинения малых отрезков координатных линий:

$$ds_\alpha = \sqrt{(1 + u'_\alpha)^2} d\alpha, \quad ds_\beta = \sqrt{(1 + u'_\beta)^2} d\beta. \quad (2.19)$$

Последнее соотношение показывает, что переносное движение вследствие деформаций отсчетной поверхности приводит к изменению размеров ячеек ткани. Для определения этих параметров найдём коэффициенты удлинения малых отрезков координатных линий, расположенных вдоль нитей. Отрезок, направленный вдоль основы ткани, в начальном положении имеет длину $d\alpha_0$. При переносном движении изменяются нормальные координаты точек этого отрезка, и его длина увеличится:

$$d\alpha = \lambda_\alpha d\alpha_0. \quad (2.20)$$

Коэффициент $\lambda_\alpha = 1 + \varepsilon_\alpha(Z)$ (относительное удлинение) характеризует деформацию нитей основы ткани в переносном движении. Для поверхности приведения относительное удлинение координатных отрезков для двух семейств нитей получим из формулы (2.19):

$$1 + \varepsilon_\alpha(Z) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \alpha}\right)^2}, \quad 1 + \varepsilon_\beta(Z) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta}\right)^2}. \quad (2.21)$$

Удлиннения характеризуют деформацию вдоль нити, но не могут служить мерой изменения расстояния между нитями одного семейства, поскольку деформированная ячейка косоугольна. Коэффициент, показывающий изменения расстояния между параллельными нитями (λ с верхним индексом α и β), найдём, вычислив изменение площади ячейки и разделив её на длину каждой из сторон:

$$\lambda^\alpha = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta}\right)^2}}, \quad \lambda^\beta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \alpha}\right)^2}}. \quad (2.22)$$

Определим вектор единичной нормали к поверхности и обозначим его через \mathbf{n} . Этот вектор будет ортогонален векторам M_α и M_β и связан с ними соотношением:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta \sin \chi} [\overrightarrow{M}_\alpha \times \overrightarrow{M}_\beta] = \frac{1}{A_\alpha A_\beta \sin \chi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & u'_\alpha \\ 0 & 1 & u'_\beta \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta \sin \chi} (-\mathbf{i} \cdot u'_\alpha - \mathbf{j} \cdot u'_\beta + \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь и далее базисные вектора $(e_\alpha^0, e_\beta^0, e_z^0)$, связанные с исходным положением нитей, обозначены как $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Выражая из (2.15) значение $\sin \chi$ и подставляя (2.14) в (2.23), получим итоговое выражение для вектора единичной нормали к поверхности:

$$\vec{n} = \frac{-\mathbf{i} \cdot u'_\alpha - \mathbf{j} \cdot u'_\beta + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta}}. \quad (2.24)$$

Обозначим, следуя [20]:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{11} &= \frac{\partial \overrightarrow{M}_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} \cdot \mathbf{k}, \\ \overrightarrow{M}_{12} &= \frac{\partial \overrightarrow{M}_\alpha}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial \overrightarrow{M}_\beta}{\partial \alpha}, \\ \overrightarrow{M}_{22} &= \frac{\partial \overrightarrow{M}_\beta}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial \beta^2} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Выразим производные вектора нормали по лагранжевым координатам α и β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} &= -\frac{\mathbf{i} [u''_{\alpha\alpha} (1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta) - u'_\alpha (u'_\alpha u''_{\alpha\alpha} + u'_\beta u''_{\alpha\beta})] +}{(1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\mathbf{j} [u''_{\alpha\beta} (1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta) - u'_\beta (u'_\alpha u''_{\alpha\alpha} + u'_\beta u''_{\alpha\beta})] + \mathbf{k} [u'_\alpha u''_{\alpha\alpha} + u'_\beta u''_{\alpha\beta}]}{(1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} &= -\frac{\mathbf{i} [u''_{\alpha\beta} (1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta) - u'_\alpha (u'_\alpha u''_{\alpha\beta} + u'_\beta u''_{\beta\beta})] +}{(1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\mathbf{j} [u''_{\beta\beta} (1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta) - u'_\beta (u'_\alpha u''_{\alpha\beta} + u'_\beta u''_{\beta\beta})] + \mathbf{k} [u'_\alpha u''_{\alpha\beta} + u'_\beta u''_{\beta\beta}]}{(1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из (2.26) и (2.27) с учётом (2.25) найдем коэффициенты второй квадратичной формы [20, 73]:

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \cdot \vec{M}_\alpha = -\frac{u''_{\alpha\alpha}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2}}, \\ L_{12} &= -\frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \cdot \vec{M}_\alpha = -\frac{u''_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2}}, \\ L_{22} &= -\frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \cdot \vec{M}_\beta = -\frac{u''_{\beta\beta}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Определим нормальную кривизну $1/R$ как отношение второй квадратичной формы к первой квадратичной форме [20]:

$$-\frac{1}{R} = \frac{L_{11}d\alpha^2 + 2L_{12}d\alpha d\beta + L_{22}d\beta^2}{A_\alpha^2 d\alpha^2 + 2A_\alpha A_\beta \cos \chi d\alpha d\beta + A_\beta d\beta^2}. \quad (2.29)$$

Деформированная поверхность имеет криволинейные координатные линии. Поочередно принимая $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, получим формулы для кривизн координатных линий:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R_\alpha} &= \frac{L_{11}d\alpha^2}{A_\alpha^2 d\alpha^2} = -\frac{u''_{\alpha\alpha}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2} \cdot (1+u'_\alpha{}^2)}, \\ -\frac{1}{R_\beta} &= \frac{L_{22}d\beta^2}{A_\beta^2 d\beta^2} = -\frac{u''_{\beta\beta}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2} \cdot (1+u'_\beta{}^2)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Кручение поверхности (смешанная кривизна) может быть вычислено по формуле [20]:

$$\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = \frac{L_{12}}{A_\alpha A_\beta} = \frac{u''_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+u'_\alpha{}^2+u'_\beta{}^2} \cdot \sqrt{(1+u'_\alpha{}^2)(1+u'_\beta{}^2)}} = \frac{1}{2} \chi_{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

Таким образом, выражения (2.19), (2.30) и (2.31) определяют деформации растяжения, сдвига, изгибные деформации и деформации кручения для поверхности приведения слоистого пакета.

Кинематика переносного движения слоя. Для следующего структурного уровня – слоя ткани рассмотрим деформации, возникающие при обжатии нормали (рисунок 2.5) и межслоевые деформации сдвига.

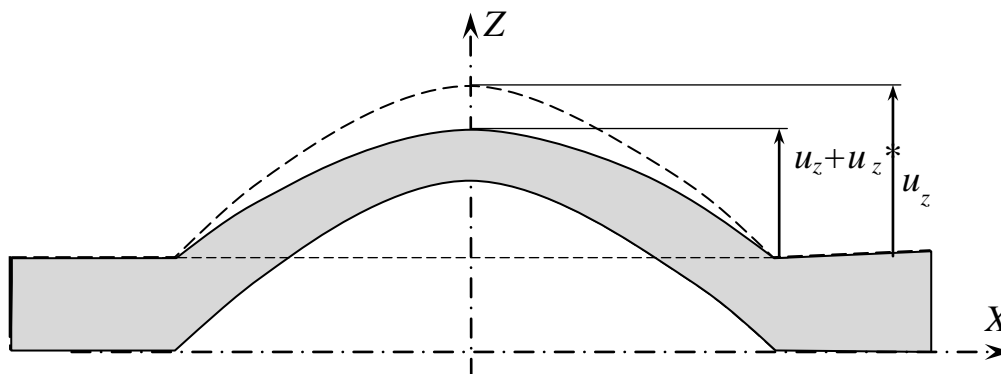


Рисунок 2.5 – Перемещения с учётом обжатия нормали при уплотнении материала: сплошная линия – деформированный слой, пунктир – форма слоя без учета уплотнения

Будем считать, что деформации ε^* по длине нормального элемента распределены равномерно по толщине всего пакета:

$$\varepsilon^* = \frac{u(H) - u(0)}{H}, \quad (2.32)$$

тогда перемещения, вызванные обжатием нормали, можно представить в виде:

$$u_z^*(z) = \varepsilon^* \cdot z. \quad (2.33)$$

Переносное перемещение складывается из перемещений поверхности приведения пакета и перемещений, вызванных обжатием нормали:

$$w = u_z + u_z^*(z). \quad (2.34)$$

Деформации изгиба и кручения на уровне слоя отличаются от одноимённых деформаций поверхности приведения за счёт того, что слои находятся на расстоянии от поверхности приведения, равном $z + u_z^*$. Для слоя, который в исходном состоянии находился на расстоянии z от поверхности приведения, получаем кривизну κ_α , κ_β и кручение $\chi_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha}(z) &= -\frac{1}{R_{\alpha}} = -\frac{u''_{\alpha\alpha} + z \cdot (\varepsilon''_{\alpha\alpha} *)}{\sqrt{1 + (u'_{\alpha} + z \cdot \varepsilon'_{\alpha} *)^2 + (u'_{\beta} + z \cdot \varepsilon'_{\beta} *)^2} \cdot (1 + (u'_{\alpha} + z \cdot \varepsilon'_{\alpha} *)^2)}, \\
\kappa_{\beta}(z) &= -\frac{1}{R_{\beta}} = -\frac{u''_{\beta\beta} + z \cdot (\varepsilon''_{\beta\beta} *)}{\sqrt{1 + (u'_{\alpha} + z \cdot \varepsilon'_{\alpha} *)^2 + (u'_{\beta} + z \cdot \varepsilon'_{\beta} *)^2} \cdot (1 + (u'_{\beta} + z \cdot \varepsilon'_{\beta} *)^2)}, \\
\frac{1}{2}\chi_{\alpha\beta}(z) &= \frac{1}{R_{\alpha\beta}} = \frac{u''_{\alpha\beta} + z \cdot (\varepsilon''_{\alpha\beta} *)}{\sqrt{1 + w'_{\alpha}{}^2 + w'_{\beta}{}^2} \sqrt{1 + w'_{\alpha}{}^2} \sqrt{1 + w'_{\beta}{}^2}},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

(здесь для простоты третьей формулы в знаменателе не подставлено значение w), а деформации растяжения вдоль координатных линий α и β и сдвига:

$$\begin{aligned}
1 + \varepsilon_{\alpha}(z) &= \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right]^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + z \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \alpha}\right]^2}, \\
1 + \varepsilon_{\beta}(z) &= \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \beta}\right]^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \beta}\right]^2}, \\
\gamma_{\alpha\beta}(z) &= \arcsin \frac{(u'_{\alpha} + z\varepsilon'_{\alpha}^*) \cdot (u'_{\beta} + z\varepsilon'_{\beta}^*)}{\sqrt{(1 + (u'_{\alpha} + z\varepsilon'_{\alpha}^*)^2)(1 + (u'_{\beta} + z\varepsilon'_{\beta}^*)^2)}}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Формулы (2.35) и (2.36) определяют деформации какой-либо одной отсчётной поверхности слоя ткани при фиксированном z . Например, за отсчётную можно принять поверхность, которая в исходном состоянии была срединной поверхностью слоя. Вопрос о распределении перемещений и деформаций по толщине слоя будет рассмотрен при описании относительного движения.

Сдвиговое смещение слоёв. Взаимное смещение слоев пакета определяется углом поперечного сдвига и толщиной слоев (рисунок 2.6).

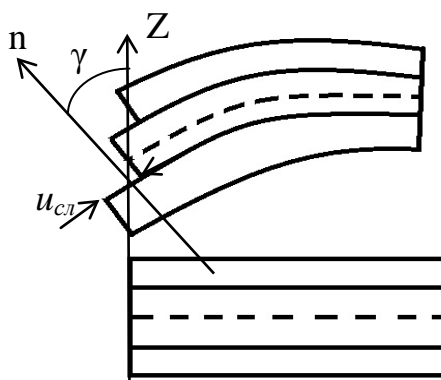


Рисунок 2.6 – Сдвиговые деформации пакета и взаимные смещения слоев

Углом сдвига γ считаем угол между геометрической и материальной нормалью. Поскольку материальная нормаль по предположению не поворачивается, определим его через скалярное произведение векторов этих нормалей $\vec{n} = \{1; u'_\alpha; u'_\beta\}$ и $\vec{e}_z = \{1; 0; 0\}$:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2_\alpha + u'^2_\beta}}. \quad (2.37)$$

Применяя тригонометрические преобразования, получим:

$$\gamma = \arctg \sqrt{u'^2_\alpha + u'^2_\beta}. \quad (2.38)$$

Тогда взаимное смещение соседних слоёв $u_{сл}$ определяется как произведение толщины слоя на тангенс угла поперечного сдвига:

$$u_{сл} = h \cdot \operatorname{tg} \gamma = h \sqrt{u'^2_\alpha + u'^2_\beta}. \quad (2.39)$$

На этих перемещениях совершают работу силы трения между слоями.

Найдём компоненты смещения $u_{сл}$:

$$u_{сл\alpha} = u_{сл} \cdot \frac{u'_\alpha}{\sqrt{u'^2_\alpha + u'^2_\beta}}, \quad u_{сл\beta} = u_{сл} \cdot \frac{u'_\beta}{\sqrt{u'^2_\alpha + u'^2_\beta}}. \quad (2.40)$$

Деформации микроуровня. Для определения деформаций семейств нитей на микроуровне рассмотрим относительные перемещения нитей с учётом их проскальзывания и распределения перемещений по толщине слоя. Гипотеза о единой материальной нормали в этом случае неприменима; в соответствии с формулами (2.39) и (2.40) примем, что в пределах слоя материальная нормаль совпадает с геометрической нормалью. Тогда деформации каждого из семейств нитей – нормали и утка – зависят от нормальной координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z) &= \varepsilon_{\alpha}(z_l) + \kappa_{\alpha}(z_l) \cdot (z - z_l), \\
\varepsilon_{\beta}^{(l)}(z) &= \varepsilon_{\beta}(z_l) + \kappa_{\beta}(z_l) \cdot (z - z_l), \\
\gamma_{\alpha\beta}^{(l)}(z) &= \gamma_{\alpha\beta}(z_l) + \chi_{\alpha\beta}(z_l) \cdot (z - z_l).
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда проскальзывание нити происходит вдоль её направления, т.е. перемещение нити основы направлено вдоль оси α , а утка – вдоль оси β . К деформации слоя, определяемой формулой (2.41), должна быть добавлена деформация за счёт относительных перемещений:

$$\varepsilon_{\alpha}^n = \varepsilon_{\alpha} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{\beta}^n = \varepsilon_{\beta} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \beta},
\tag{2.42}$$

где «переносные» деформации ε_{α} и ε_{β} определяются по формуле (2.41). Полученные деформации (2.42) далее используются в определяющих соотношениях материала.

Заметим также, что итоговые абсолютные перемещения точек нитей равны векторной сумме переносных и относительных перемещений, а абсолютные скорости – векторной сумме переносной и относительной скорости [93]. Этот известный факт будет использован далее при записи уравнений движения.

2.4 Определяющие уравнения

Состояние нагружения нитей. В зависимости от деформации и скорости деформации, нить может находиться в одном из следующих состояний:

- а) состояние активного нагружения – текущая деформация максимальна за всё время нагружения;
- б) состояние разгрузки – текущая деформация меньше максимальной за всё время деформирования, но не меньше остаточной деформации;
- в) состояние сжатия – текущая деформация меньше остаточной деформации;
- г) состояние разрушения – деформация, максимальная за всё время нагружения, превышает предельную деформацию.

Состояние определяется тремя флагами: активности нагружения a , сжатия s и разрушения b .

Сформулируем критерии активного нагружения, разгрузки, сжатия и разрушения нити. Определим принимаемые значения флагов и условия для перехода в одно из состояний. Флаг активности нагружения a принимает значение равное 1 (стадия активного нагружения), если текущая деформация больше максимальной среди всех предыдущих шагов, иначе значение флага равно 0. Значение флага сжатия s равно 1 (состояние сжатия), если текущая деформация меньше остаточной деформации, иначе флаг s равен 0 (состояние растяжения). Флаг состояния разрушения может принимать значение 0 (нить не разрушена) или значение 1 (состояние разрушения). Условием для разрушения является достижение максимальной деформации, при которой нить обрывается.

Состояние разрушения является конечным, оно не может перейти ни в какое из других состояний. Состояние активного нагружения может чередоваться с состояниями разгрузки и сжатия. Для разрушенного или сжатого волокна начальные напряжения и модуль упругости равны 0.

Определяющие уравнения нитей при растяжении. Для определения реакции материала тканого слоя на деформацию будем принимать, что напряжения функционально зависят от текущей деформации нити. Определяющее уравнение материала может быть получено из экспериментальных диаграмм деформирования. На рисунке 2.7а показана кривая отражающее увеличение деформации от нулевого до предельного значения, при котором происходит разрыв волокон, а на рисунке 2.7б показана кривая циклического нагружения без разрушения образца.

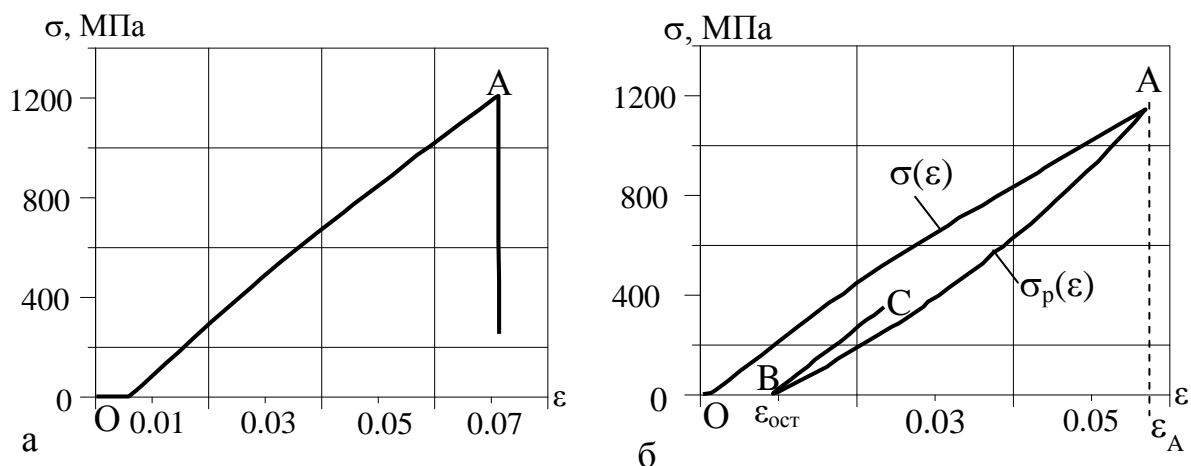


Рисунок 2.7 – Диаграмма деформирования: а – растяжение до разрыва, где ОА – кривая нагружения, точка А – разрыв нитей; б – нагружение с разгрузкой и последующим нагружением, где ОА – кривая нагружения, АВ – диаграмма разгрузки, σ – растягивающее напряжение как функция текущей деформации, ВС – диаграмма повторного нагружения

Кривая ОА в обоих случаях аппроксимируется функцией вида:

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (2.43)$$

где σ – напряжение в нити, ε – деформация нити.

Для нахождения параметров диаграммы растяжения тканого материала были использованы данные испытаний на растяжение, проведенных в АО ЦНИИСМ С.О. Козельской и О.Н. Будадиным [14, 15]. Испытанию подвергались плоские прямоугольные образцы, представляющие собой полоску ткани из соединенных между собой нитей. Толщина образцов равна $5 \cdot 10^{-4}$ м, ширина $3,5 \cdot 10^{-3}$ м, а расстояние между захватами разрывной машины $87 \cdot 10^{-3}$ м. Растяжение было одноосным с изменением скорости нагрузки от 4 до 60 мм/мин. Часть образцов (20 штук) нагружалась от нулевого до предельного значения, при котором происходил разрыв (рисунок 2.8).



Рисунок 2.8 – Вид образца после разрушения

При нагружении фиксировались величина прикладываемой нагрузки и расстояние между захватами.

По результатам регистрации величины действующей нагрузки и перемещений захватов были получены кривые растяжения. Для каждого эксперимента диаграмма растяжения была преобразована в диаграмму напряжений. Аппроксимируем полученные кривые функцией вида: $f(x) = Ax + Bx^2$, с применением метода наименьших квадратов. Такая аппроксимация была сделана для каждого образца [45].

Приведем в таблице 2.1 сводные результаты среди всех экспериментов для первой партии образцов [16].

Таблица 2.1 – Сводная таблица найденных значений

Параметр выборки	Максимальная деформация ϵ , %	Максимальное напряжение σ , ГПа	Начальный модуль упругости E_0 , ГПа	Конечный модуль упругости E_k , ГПа
Среднее значение	5,53	1,083	21,80	16,19
Среднеквадратичное отклонение	0,41	0,074	0,745	0,969
Минимальное значение	4,48	0,929	20,94	15,27
Максимальное значение	6,54	1,243	23,25	17,20
Размах	2,06	0,314	2,32	1,93
Относительный размах, %	37,19	28,98	10,58	11,79
Коэффициент вариации, %	7,45	6,86	3,41	3,29

Начальный и конечный модули упругости найдены дифференцированием аппроксимирующей функции и подстановкой начальной и конечной деформации соответственно. Предельное значение напряжения определяется подстановкой в выражение аппроксимирующей функции величину предельной деформации.

Вторая часть образцов (6 штук) была нагружена до уровня $\sim 2000\text{Н}$, далее они разгружались и нагружались повторно. Такое циклическое проведение эксперимента необходимо для определения модуля разгрузки. На рисунке 2.76 приведен вид типовой кривой при циклическом нагружении образца.

Найдем аппроксимирующую кривую как на участке нагружения, так и на участке разгрузки. Модуль разгрузки будет определен как тангенс угла наклона касательной, а остаточная деформация равная значению при нулевой нагрузке.

Особо отметим, что при осреднении модулей упругости материала, поскольку слой ткани содержит только один слой нитей каждого семейства, нет оснований считать модули упругости слоёв переменными по их толщине.

Деформирование при активном нагружении. Определяющее уравнение связывает текущую деформацию с напряжением растяжения нитей. Обозначим через E_0 начальный модуль упругости (при малой деформации), тогда растягивающее напряжение выразится через деформацию следующим образом:

$$\sigma(\varepsilon) = E_0(1 + A \cdot \varepsilon + B \cdot \varepsilon^2) \cdot \varepsilon, \quad (2.44)$$

где ε – текущая деформация, максимальная за всё время нагружения.

Одновременно с ростом текущей деформации накапливается остаточная деформация, которая входит в определяющее уравнение в состоянии разгрузки.

Коэффициент пропорциональности между напряжением и деформацией в (2.44) – текущий модуль упругости, зависящий от текущей деформации; он равен отношению напряжения к текущей деформации:

$$E_{сек} = E_0(1 + A \cdot \varepsilon + B \cdot \varepsilon^2). \quad (2.45)$$

Касательный модуль упругости (производная от напряжения по текущей деформации) имеет следующий вид:

$$E_{кас} = E_0(1 + 2A \cdot \varepsilon + 3B \cdot \varepsilon^2). \quad (2.46)$$

С учётом (2.46), уравнение (2.44) может быть линеаризовано в окрестности текущего состояния – фиксированной деформации ε_0 :

$$\sigma(\varepsilon) \approx E_0(1 + A \cdot \varepsilon_0 + B \cdot \varepsilon_0^2) \cdot \varepsilon_0 + E_0(1 + 2A \cdot \varepsilon_0 + 3B \cdot \varepsilon_0^2) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (2.47)$$

Константы E_0 , A и B определяются путём аппроксимации диаграммы деформирования методом наименьших квадратов, как будет описано в главе 4.

Для записи уравнения движения нам понадобится вариация работы напряжений, а для расчёта тепловыделения – работа напряжений на необратимых деформациях $\varepsilon_{ост}$. Величина необратимой деформации будет определена далее при анализе разгрузки нити. Вариация работы напряжений (на единицу объёма слоя) может быть записана в виде:

$$\delta A = \xi_\alpha E_0(1 + A \cdot \varepsilon_\alpha + B \cdot \varepsilon_\alpha^2) \varepsilon_\alpha \delta \varepsilon_\alpha + \xi_\beta E_0(1 + A \cdot \varepsilon_\beta + B \cdot \varepsilon_\beta^2) \varepsilon_\beta \delta \varepsilon_\beta. \quad (2.48)$$

Работа напряжений на необратимых деформациях при активном нагружении (на единицу объёма нити) определяется следующим образом:

$$A = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2E_0}. \quad (2.49)$$

Тогда с учётом необратимых деформаций основы и утка в расчёте на единицу объёма слоя получим:

$$A = \xi_\alpha \left[\int_0^{\varepsilon_\alpha} \sigma_\alpha(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma_\alpha(\varepsilon)^2}{2E_{0\alpha}} \right] + \xi_\beta \left[\int_0^{\varepsilon_\beta} \sigma_\beta(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma_\beta(\varepsilon)^2}{2E_{0\beta}} \right]. \quad (2.50)$$

Деформирование нити при разгрузке. При разгрузке нити диаграмма «напряжение-деформация» предполагается линейной, а модуль разгрузки можно принять равным начальному модулю при активном нагружении. Остаточная деформация при разгрузке остаётся постоянной. Тогда с учётом (2.44) получаем:

$$\sigma(\varepsilon) = E_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{ост}), \quad (2.51)$$

в начальный момент разгрузки (при $\varepsilon = \varepsilon_{max}$):

$$\sigma(\varepsilon_{max}) = E_0 \cdot (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{ост}) = E_0 \cdot (1 + A \cdot \varepsilon_{max} + B \cdot \varepsilon_{max}^2) \cdot \varepsilon_{max}, \quad (2.52)$$

откуда находим остаточную деформацию в зависимости от максимальной деформации за всё время нагружения:

$$\varepsilon_{ост} = -A \cdot \varepsilon_{\max}^2 - B \cdot \varepsilon_{\max}^3. \quad (2.53)$$

Линеаризация (2.53) в окрестности текущего состояния $\varepsilon_{ост} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\max}$ принимает вид:

$$\sigma(\varepsilon) \approx E_0 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_{ост}) + E_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (2.54)$$

Вариация работы напряжений при разгрузке (на единицу объёма нити):

$$\delta A = E_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{ост}) \delta \varepsilon, \quad (2.55)$$

откуда на единицу объёма слоя получаем:

$$\delta A = \xi_{\alpha} E_{0\alpha} \cdot (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{ост\alpha}) \delta \varepsilon_{\alpha} + \xi_{\beta} E_{0\beta} \cdot (\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{ост\beta}) \delta \varepsilon_{\beta}. \quad (2.56)$$

Работа напряжений на необратимых деформациях при разгрузке остаётся постоянной.

Определяющие уравнения проскальзывания нитей. Примем, что в состоянии покоя (при нулевой относительной скорости) сила трения равна нулю, а при скорости, превышающей некоторый предел V_{\min} , сила трения (на единицу длины нити) равна известному из эксперимента значению F_{mp} . При скоростях, меньших V_{\min} , сила трения пропорциональна относительной скорости. Во всех случаях сила трения направлена противоположно вектору относительной скорости. Таким образом, получаем:

$$f_{вязк} = -\eta \cdot V, \quad \eta = \frac{F_{mp}}{\max(V, V_{\min})}. \quad (2.57)$$

В случае разрушения нити сила трения обращается в нуль. Для сжатой нити проскальзывание отсутствует, и тогда коэффициент должен быть принят достаточно большим, так, чтобы «вязкое» смещение за характерное время деформирования было достаточно малым. Если обозначить характерное время через $t_{y\delta}$, а малое смещение – через δ , то необходимо обеспечить выполнение условия:

$$V \cdot t_{y\delta} \leq \delta. \quad (2.58)$$

Тогда минимальную скорость можно оценить как $V_{\min} = \frac{\delta}{t_{y\delta}}$, и требуемый коэффициент вязкости найдётся следующим образом:

$$\eta_{сж} \geq \frac{F_{mp} \cdot t_{y\delta}}{\delta}. \quad (2.59)$$

Удельная работа от силы внутреннего трения при проскальзывании нитей необратима и пропорциональна скорости относительного перемещения:

$$A_{тр.нитей} = \int_0^t \frac{1}{h} (\tau_\alpha \dot{u}_\alpha + \tau_\beta \dot{u}_\beta) dt, \quad (2.60)$$

где h – толщина слоя, а касательные напряжения τ_α и τ_β выражаются как произведение вязкости проскальзывания на относительные скорости соответствующего семейства нитей:

$$\tau_\alpha = \eta_{вязк} \dot{u}_\alpha, \quad \tau_\beta = \eta_{вязк} \dot{u}_\beta, \quad (2.61)$$

где $\eta_{вязк}$ – коэффициент вязкого трения.

Определяющие уравнения сдвига слоёв. Силы трения при взаимном проскальзывании слоёв ткани предполагаются пропорциональными скоростям проскальзывания:

$$\tau_{nx} = f \cdot \dot{u}_{слx}, \quad \tau_{ny} = f \cdot \dot{u}_{слy}, \quad (2.62)$$

где коэффициент пропорциональности f может быть принят переменным и зависящим от скорости смещения.

Скорость взаимного смещения слоёв найдём дифференцированием (2.39) по времени, что позволяет выразить её через параметры переносного движения поверхности приведения:

$$\dot{u}_{сл} = h \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u'_x{}^2 + u'_y{}^2}. \quad (2.63)$$

Далее находим компоненты скорости (2.63):

$$\dot{u}_{слx} = \dot{u}_{сл} \cdot \frac{u'_x}{\sqrt{u'_x{}^2 + u'_y{}^2}}, \quad \dot{u}_{слy} = \dot{u}_{сл} \cdot \frac{u'_y}{\sqrt{u'_x{}^2 + u'_y{}^2}}. \quad (2.64)$$

Подставляя (2.64) в (2.62), окончательно получим:

$$\tau_{nx} = f \cdot \dot{u}_{cl} \cdot \frac{u'_x}{\sqrt{u'_x{}^2 + u'_y{}^2}}, \quad \tau_{ny} = f \cdot \dot{u}_{cl} \cdot \frac{u'_y}{\sqrt{u'_x{}^2 + u'_y{}^2}}. \quad (2.65)$$

Их удельная работа:

$$A_{тр.слоев} = \int_0^t \frac{1}{h} (\tau_{nx} \dot{u}_{clx} + \tau_{ny} \dot{u}_{cly}) dt. \quad (2.66)$$

Определяющее уравнение вязкого основания. Податливое основание используется при испытаниях тканых преград по методике, описанной в [22]. Оно может не использоваться при проведении экспериментов по другим методикам. В частности, ряд экспериментов, описанных в главе 4, был проведен при свободной подвеске прямоугольных образцов. Однако в общем случае следует учитывать реакцию податливого основания на тканый образец при его движении.

В качестве основания обычно используется пластилиновый блок (подложка). При испытаниях без подложки на образец при движении с большой скоростью действует аэродинамическая сила. В первом приближении примем, что подложка либо поток окружающего воздуха создают нормальное давление, пропорциональное скорости поверхности образца. Для идеализированного линейного вязкого материала коэффициент пропорциональности – постоянный, при необходимости он может пересчитываться в зависимости от скорости; по крайней мере при испытаниях без пластилиновой подложки торможения за счёт основания достаточно мало, чтобы можно было принять линейную модель.

Тогда нормальное напряжение на поверхности ткани можно связать с переносной скоростью следующим определяющим уравнением, аналогичным определяющему уравнению основания Винклера [83] и отличающимся тем, что вместо перемещения u в нём используется скорость \dot{u} :

$$\sigma_n = \eta_{осн} \cdot \dot{u}_n, \quad \tau_{xn} = \tau_{yn} = 0, \quad (2.67)$$

где напряжения отнесены к лагранжеву базису, $\eta_{осн}$ – коэффициент вязкости основания.

Вариация работы внешних нагрузок от основания:

$$\delta A = \int_S \sigma_n \delta u_n dS. \quad (2.68)$$

Все деформации основания являются необратимыми, поэтому работа внешних сил на необратимой деформации основания может быть определена следующим образом:

$$A = \int_0^t \int_S \sigma_n \dot{u}_n dS \cdot dt. \quad (2.69)$$

2.5 Приведение напряжений к модели оболочки

Осреднение напряжений в пределах слоя. Объём, занимаемый слоем ткани, частично заполнен нитями – основой и утком, а также воздухом (порами) между ними. Обозначим объёмную долю основы через ξ_α , утка – через ξ_β , пор – ξ_ε . В нитях основы действуют напряжения σ_α^H , входящие в определяющее уравнение (2.44), причём площадь поверхности, к которой они приложены, составляет долю ξ_α от площади сечения слоя ткани. Аналогично, в нитях утка действуют напряжения σ_β^H , приложенные к площади поверхности, составляющей долю ξ_β от площади сечения слоя ткани. Тогда средние напряжения в слое σ_α , σ_β составят:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^H \cdot \xi_\alpha, \quad \sigma_\beta = \sigma_\beta^H \cdot \xi_\beta. \quad (2.70)$$

Касательные напряжения достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь:

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = 0. \quad (2.71)$$

Выразим напряжения в ортогональной системе координат (x, y, n) через напряжения в координатах α, β с учетом того, что угол армирования между осью α и x составляет φ [17]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_\alpha \cos^2 \varphi + \sigma_\beta \sin^2 \varphi, \\
\sigma_y &= \sigma_\alpha \sin^2 \varphi + \sigma_\beta \cos^2 \varphi, \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin \varphi \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Отметим, что в процессе деформации базис перестаёт быть ортогональным, и формула (2.72) требует уточнения, которое рассмотрено ниже.

Напряжения поперечного сдвига примем равными напряжениям от сил трения на поверхностях раздела слоёв (2.61).

Погонные силы и моменты. Введем вместо компонент напряжений эквивалентные им интегральные характеристики – усилия и моменты для i -го слоя ткани толщиной h , ограниченного поверхностями $z = z_{i-1}$ и $z = z_i$, $z_i = z_{i-1} + h$ [26]. В отличие от моделей, использующих гипотезу единой нормали, эти интегральные характеристики необходимо определять как коэффициенты при вариациях обобщённых деформаций (кривизны, кручения, растяжения и сдвига) в вариации работы напряжений на вариациях деформаций нитей, совместных с обобщёнными деформациями.

Чтобы найти вариации обобщённых деформаций каждого слоя, представим выражения (2.35) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(z) &= k_\alpha \cdot (\kappa_\alpha + \kappa_\alpha^*), \\
\kappa_\beta(z) &= k_\beta \cdot (\kappa_\beta + \kappa_\beta^*), \\
\chi_{\alpha\beta}(z) &= k_{\alpha\beta} \cdot (\chi_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}^*),
\end{aligned} \tag{2.73}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
k_\alpha &= \frac{\sqrt{1 + u_\alpha'^2 + u_\beta'^2} \cdot (1 + u_\alpha'^2)}{\sqrt{1 + (u_\alpha' + z \cdot \varepsilon_\alpha^*)^2 + (u_\beta' + z \cdot \varepsilon_\beta^*)^2} \cdot (1 + (u_\alpha' + z \cdot \varepsilon_\alpha^*)^2)}, \\
k_\beta &= \frac{\sqrt{1 + u_\alpha'^2 + u_\beta'^2} \cdot (1 + u_\beta'^2)}{\sqrt{1 + (u_\alpha' + z \cdot \varepsilon_\alpha^*)^2 + (u_\beta' + z \cdot \varepsilon_\beta^*)^2} \cdot (1 + (u_\beta' + z \cdot \varepsilon_\beta^*)^2)}, \\
k_{\alpha\beta} &= \frac{\sqrt{1 + u_\alpha'^2 + u_\beta'^2} \sqrt{1 + u_\alpha'^2} \sqrt{1 + u_\beta'^2}}{\sqrt{1 + w_\alpha'^2 + w_\beta'^2} \sqrt{1 + w_\alpha'^2} \sqrt{1 + w_\beta'^2}},
\end{aligned}$$

$$\kappa_{\alpha}^{*} = -\frac{z \cdot (\varepsilon''_{\alpha\alpha} *)}{\sqrt{1 + u'_{\alpha}{}^2 + u'_{\beta}{}^2} \cdot (1 + u'_{\alpha}{}^2)}, \quad \kappa_{\beta}^{*}(z) = -\frac{z \cdot (\varepsilon''_{\beta\beta} *)}{\sqrt{1 + u'_{\alpha}{}^2 + u'_{\beta}{}^2} \cdot (1 + u'_{\beta}{}^2)},$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{*}(z) = \frac{z \cdot (\varepsilon''_{\alpha\beta} *)}{\sqrt{1 + u'_{\alpha}{}^2 + u'_{\beta}{}^2} \sqrt{1 + u'_{\alpha}{}^2} \sqrt{1 + u'_{\beta}{}^2}}.$$

Вариации деформаций изгиба и кручения слоёв могут быть приближённо выражены через вариации деформаций поверхности приведения. Для слоя l получим:

$$\delta\kappa_{\alpha}^{(l)} = k_{\alpha}^{(l)} \cdot \delta\kappa_{\alpha}, \quad \delta\kappa_{\beta}^{(l)}(z) = k_{\beta}^{(l)} \cdot \delta\kappa_{\beta}, \quad \delta\chi_{\alpha\beta}^{(l)} = k_{\alpha\beta}^{(l)} \cdot \delta\chi_{\alpha\beta}. \quad (2.74)$$

Считая в пределах слоя материальную нормаль совпадающей с геометрической, получим, что «переносные» деформации слоя зависят от нормальной координаты z линейно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z) &= \varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z_l) + \kappa_{\alpha}^{(l)}(z - z_l), \\ \varepsilon_{\beta}^{(l)}(z) &= \varepsilon_{\beta}^{(l)}(z_l) + \kappa_{\beta}^{(l)}(z - z_l), \\ \gamma_{\alpha\beta}^{(l)}(z) &= \gamma_{\alpha\beta}^{(l)}(z_l) + \chi_{\alpha\beta}^{(l)}(z - z_l). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Здесь деформации нитей на поверхности приведения определяются формулами (2.36). Поэтому вариация деформаций нитей будет выражаться через вариации деформаций поверхности приведения следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z) &= \delta\varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z_l) + \delta\kappa_{\alpha}^{(l)}(z - z_l), \\ \delta\varepsilon_{\beta}^{(l)}(z) &= \delta\varepsilon_{\beta}^{(l)}(z_l) + \delta\kappa_{\beta}^{(l)}(z - z_l), \end{aligned} \quad (2.76)$$

причём деформации нитей разных семейств не являются компонентами одного и того же тензора (в отличие от «переносных» деформаций слоя).

Напряжения в точке одной и той же материальной нормали, при фиксированных координатах (α, β) , найдём, используя определяющие уравнения растяжения нитей. В линеаризованном виде (2.47) и (2.54) имеем:

$$\sigma_{\alpha}^{(l)}(z) = \sigma_{\alpha_0}^{(l)} + E_{\alpha} \cdot \left(\varepsilon_{\alpha}^{(l)} - \varepsilon_{\alpha_0}^{(l)} + \varepsilon_{\alpha_r}^{(l)} + (z - z_l) \kappa_{\alpha}^{(l)} \right), \quad (2.77)$$

и аналогично для нитей утка.

Примем, что отсчётная поверхность слоя расположена на половине его толщины, тогда работа напряжений (2.77) на вариациях деформаций (2.76) будет выражена интегралом по симметричному интервалу:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{z_l - \frac{h^{(l)}}{2}}^{z_l + \frac{h^{(l)}}{2}} \xi_{\alpha} \left[\sigma_{\alpha_0}^{(l)} + E_{\alpha} \cdot \left(\varepsilon_{\alpha}^{(l)} - \varepsilon_{\alpha_0}^{(l)} + \varepsilon_{\alpha_r}^{(l)} + (z - z_l) \kappa_{\alpha}^{(l)} \right) \right] \delta \varepsilon_{\alpha} dz = \\ &= \int_{z_l - \frac{h^{(l)}}{2}}^{z_l + \frac{h^{(l)}}{2}} \xi_{\alpha} \left[\sigma_{\alpha_0}^{(l)} + E_{\alpha} \cdot \left(\varepsilon_{\alpha}^{(l)} - \varepsilon_{\alpha_0}^{(l)} + \varepsilon_{\alpha_r}^{(l)} + (z - z_l) \kappa_{\alpha}^{(l)} \right) \right] \left(\delta \varepsilon_{\alpha}^{(l)} + \delta \kappa_{\alpha}^{(l)} (z - z_l) \right) dz. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Учитывая, что интегралы при нечётных степенях z обращаются в нуль, получаем:

$$\delta A = h^{(l)} \xi_{\alpha} \left[\sigma_{\alpha_0}^{(l)} + E_{\alpha} \cdot \left(\varepsilon_{\alpha}^{(l)} + \varepsilon_{\alpha_r}^{(l)} - \varepsilon_{\alpha_0}^{(l)} \right) \right] \cdot \delta \varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z_l) + \frac{\xi_{\alpha} E_{\alpha} \kappa_{\alpha}^{(l)} h^{(l)3}}{12} \cdot \delta \kappa_{\alpha}^{(l)}. \quad (2.79)$$

Таким образом, обобщённая погонная сила вдоль нитей основы будет равна коэффициенту при $\delta \varepsilon_{\alpha}^{(l)}(z_l)$, а погонный момент – при $\delta \kappa_{\alpha}^{(l)}$. Осталось выразить эти вариации через вариации деформаций поверхности приведения.

Приведение деформаций к общему базису. Чтобы избежать сложностей, связанных с ковариантным дифференцированием и вытекающей из этого необходимостью перехода к геометрически нелинейным теориям второго порядка, воспользуемся тем, что напряжённое состояние каждого из семейств нитей одноосно.

Будем считать, что в некотором текущем положении поверхности приведения её деформации вычислены по формулам (2.18) и (2.30) – (2.31) в двух системах координат: (x, y) и (α, β) . Для вычисления напряжений в нитях, например, основы, нам необходима только деформация ε_{α} ; в этих нитях

действуют только напряжения σ_α , которые тем самым могут быть вычислены в рассматриваемом положении. При малой вариации перемещений отсчётной поверхности нам необходимо вычислить малые вариации деформации ε_α , которые следует линейно выразить через малые вариации деформаций отсчётной поверхности. Результат подстановки этого выражения в уравнение (2.79) даёт возможность получить линейризованное уравнение, коэффициенты которого дают статически эквивалентные погонные силы и моменты, которые можно суммировать по слоям ткани. Учитывая, что деформация сдвига ограничена, можно в качестве её меры принять не угол (как это было сделано выше), а синус этого угла, умноженный на произведение удлинений: $\gamma_{xy} \approx u'_x \cdot u'_y$. Тогда из формулы (2.18) получаем:

$$\lambda_\alpha^2 = \lambda_x^2 \cos^2 \varphi + \lambda_y^2 \sin^2 \varphi + 2\gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (2.80)$$

где φ - острый угол между осью x и направлением основы.

Находя вариации левой и правой части, получим:

$$\delta\varepsilon_\alpha = \frac{\lambda_x}{\lambda_\alpha} \cos^2 \varphi \cdot \delta\varepsilon_x + \frac{\lambda_y}{\lambda_\alpha} \sin^2 \varphi \cdot \delta\varepsilon_y + \frac{1}{\lambda_\alpha} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \delta\gamma_{xy}, \quad (2.81)$$

и аналогично для нитей утка:

$$\delta\varepsilon_\beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_\beta} \sin^2 \varphi \cdot \delta\varepsilon_x + \frac{\lambda_y}{\lambda_\beta} \cos^2 \varphi \cdot \delta\varepsilon_y - \frac{1}{\lambda_\beta} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \delta\gamma_{xy}. \quad (2.82)$$

Для деформаций изгиба и кручения выкладки полностью аналогичны.

Таким образом, вариации двух «переносных» деформаций поверхности приведения в системе координат (α, β) и двух деформаций изгиба для любого слоя могут быть выражены через вариации деформаций, вычисленные в осях (x, y) , путём умножения на одну и ту же матрицу перехода:

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{(l)} = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_{\alpha_s}^{(l)} \\ \delta\varepsilon_{\beta_s}^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(x,y)}, \quad \delta\bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^{(l)} = \begin{pmatrix} \delta\kappa_\alpha^{(l)} \\ \delta\kappa_\beta^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \delta\boldsymbol{\kappa}_{(x,y)}, \quad (2.83)$$

$$\text{где } \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{k}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \delta\kappa_x \\ \delta\kappa_y \\ \delta\chi_{xy} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_x}{\lambda_\alpha} \cos^2 \varphi & \frac{\lambda_y}{\lambda_\alpha} \sin^2 \varphi & \frac{1}{\lambda_\alpha} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{\lambda_x}{\lambda_\beta} \sin^2 \varphi & \frac{\lambda_y}{\lambda_\beta} \cos^2 \varphi & -\frac{1}{\lambda_\beta} \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

и окончательно с учётом (2.74):

$$\begin{aligned} \delta A^{(l)} = & \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(x,y)}^T \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} h^{(l)} \left(\boldsymbol{\sigma}_0^{(l)} + \begin{bmatrix} \xi_\alpha E_\alpha & 0 \\ 0 & \xi_\beta E_\beta \end{bmatrix} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(l)} + \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(x,y)}) \right) + \\ & + \delta\mathbf{k}_{(x,y)}^T \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \left(\mathbf{m}_0^{(l)} + \frac{h^{(l)3}}{12} \begin{bmatrix} \xi_\alpha E_\alpha & 0 \\ 0 & \xi_\beta E_\beta \end{bmatrix} \right) \mathbf{k}^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \Delta\mathbf{k}_{(x,y)}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Здесь обозначено:

$$\mathbf{k}^{(l)} = \begin{bmatrix} k_\alpha^{(l)} & 0 \\ 0 & k_\beta^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_0^{(l)} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^{(l)} = \frac{h^{(l)3}}{12} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Суммируя по слоям, получим погонные силы:

$$N_x = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\varepsilon_x)}, \quad N_y = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\varepsilon_y)}, \quad N_{xy} = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\gamma_{xy})} \quad (2.87)$$

и погонные моменты для всего пакета как многослойной оболочки:

$$M_x = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\kappa_x)}, \quad M_y = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\kappa_y)}, \quad M_{xy} = \sum_{(l)} \frac{\partial(\delta A^{(l)})}{\partial(\delta\chi_{xy})}. \quad (2.88)$$

Ввиду громоздкости выражений, привести их явный вид затруднительно, поэтому покажем результат в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} h^{(l)} \boldsymbol{\sigma}_0^{(l)} + \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} C_r^{(l)} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(l)} + \left(\sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} C_r^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(x,y)}, \quad (2.89)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{m}_0^{(l)} + \left(\sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{D}_r^{(l)} \mathbf{k}^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \right) \Delta \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (2.90)$$

$$\mathbf{C}_r^{(l)} = \begin{bmatrix} h^{(l)} \xi_\alpha E_\alpha & 0 \\ 0 & h^{(l)} \xi_\beta E_\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_r^{(l)} = \begin{bmatrix} \frac{\xi_\alpha E_\alpha h^{(l)3}}{12} & 0 \\ 0 & \frac{\xi_\beta E_\beta h^{(l)3}}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Погонные силы и моменты входят в дифференциальные уравнения движения оболочки и в граничные условия на краях пакета слоёв ткани.

2.6 Уравнения движения

Выше указывалось, что уравнения движения многослойного пакета по форме являются уравнениями движения оболочки и связывают ускорения (вторые производные по времени от переносных перемещений) с текущими перемещениями и скоростями, т.е. структура этих уравнений – следующая:

$$L\left(\ddot{u}_z, \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial x}, \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial y}\right) = D\left(u_z, \dot{u}_z, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, F(u_\alpha^{(i)}, u_\beta^{(i)}, \dot{u}_\alpha^{(i)}, \dot{u}_\beta^{(i)})\right),$$

$$L^{(i)}(\ddot{u}_\alpha, \ddot{u}_\beta) = D^{(i)}\left(u_\alpha, u_\beta, \dot{u}_\alpha, \dot{u}_\beta, \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}, \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta}, F(u_z, \dot{u}_z)\right),$$

причём относительные перемещения в слоях являются непрерывными функциями: $u_\alpha^{(i)}(x, y, t) \in C^0$, $u_\beta^{(i)}(x, y, t) \in C^0$, а прогибы – гладкими: $u_z(x, y, t) \in C^1$.

Для дальнейшего преобразования уравнений движения используем вариационный принцип Лагранжа [93]:

$$\delta U = \delta A, \quad (2.92)$$

где δU – вариация работы внутренних сил и сил инерции,

δA – вариация работы внешних сил.

Вариация работы сил инерции. Вариация работы силы инерции $F_{ин}$ может быть известным образом преобразована в вариацию кинетической энергии материальной точки [93]:

$$F_{ин}\delta u = -\rho\dot{\mathbf{V}}^H\delta u = -\frac{1}{2}\rho\cdot\delta\left(\mathbf{V}^{H^2}\right), \quad (2.93)$$

где \mathbf{V}^H - абсолютная скорость материальной точки (бесконечно малого объёма плотности ρ), равная векторной сумме переносной скорости \mathbf{V}_s и относительной скорости \mathbf{V}_r :

$$\mathbf{V}^H = \mathbf{V}_s + \mathbf{V}_r. \quad (2.94)$$

Переносная скорость определяется как производная переносных перемещений (2.34) и содержит только компоненту вдоль оси Z:

$$V_s = \dot{u}_z + \dot{u}_z^*. \quad (2.95)$$

Относительная скорость нити (относительно слоя ткани) направлена вдоль нити, т.е. имеет одну ненулевую компоненту: для основы это u_α , для утка u_β . Полная скорость материальной точки для нити α -семейства (основы) в этом случае равна векторной сумме векторов, направленных по осям Z и α (для утка - аналогично):

$$\mathbf{V}^H = \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_\alpha. \quad (2.96)$$

Средняя поверхностная плотность основы $\rho_{\alpha s}$ и утка $\rho_{\beta s}$ определяется поверхностной плотностью ткани ρ_s , объёмной долей основы ξ_α и объёмной долей утка ξ_β :

$$\rho_{\alpha s} = \rho_s \cdot \frac{\xi_\alpha}{\xi_\alpha + \xi_\beta}, \quad \rho_{\beta s} = \rho_s \cdot \frac{\xi_\beta}{\xi_\alpha + \xi_\beta}. \quad (2.97)$$

Кинетическая энергия нитей основы T_α и утка T_β (в расчёте на единицу площади):

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= \frac{1}{2} \rho_{\alpha s} (\mathbf{V}_z + \mathbf{V}_\alpha)^2 = \frac{1}{2} \rho_{\alpha s} (V_z^2 + V_\alpha^2 + 2V_z V_\alpha \cos(z, \alpha)), \\
T_\beta &= \frac{1}{2} \rho_{\beta s} (V_z^2 + V_\beta^2 + 2V_z V_\beta \cos(z, \beta))
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Кинетическая энергия поступательного движения слоя складывается из (2.97) и (2.98). Поскольку материальная нормаль в пределах одного слоя поворачивается вместе с геометрической нормалью, к энергии поступательного движения необходимо добавить кинетическую энергию вращения нормали. Для слоя l в расчёте на единицу площади имеем:

$$\begin{aligned}
T^{(l)} &= \frac{1}{2} \left[\rho_s \left(V_z^2 + \frac{1}{12} h^{(l)2} \omega^2 \right) + \rho_{\alpha s} (V_\alpha^2 + 2V_z V_\alpha \cos(z, \alpha)) + \right. \\
&\quad \left. + \rho_{\beta s} (V_\beta^2 + 2V_z V_\beta \cos(z, \beta)) \right]
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Угловая скорость ω однозначно выражается через производные переносной скорости по координатам, т.е. не является независимо варьируемой функцией.

Суммируя последнее выражение по слоям, получим кинетическую энергию многослойного тканого пакета. К кинетической энергии ткани необходимо добавить кинетическую энергию ударника, скорость которого на оболочечной стадии деформирования равна скорости контактирующих с ним точек поверхности приведения. Вариация кинетической энергии может быть записана в виде:

$$\delta T = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_z} \cdot \delta u_z + \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_\alpha^{(i)}} \cdot \delta u_\alpha^{(i)} + \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_\beta^{(i)}} \cdot \delta u_\beta^{(i)}. \tag{2.100}$$

Вариация работы напряжений в нитях. Растягивающие напряжения в основе совершают работу на деформациях ε_α , а в утке – на деформациях ε_β . Поскольку деформации зависят как от относительных, так и от переносных перемещений, их вариация также должна быть выражена через вариации всех перемещений. Выше было показано, что при варьировании только переносных перемещений работа равна работе погонных сил и моментов; при варьировании

относительных перемещений работа должна вычисляться для каждого слоя ткани отдельно и суммироваться. В расчёте на единицу площади получаем:

$$\delta A_{раст.} = \sum_l h^{(l)} \left(\sigma_\alpha^{(i)} \delta \varepsilon_\alpha^{(i)} + \sigma_\beta^{(i)} \delta \varepsilon_\beta^{(i)} \right). \quad (2.101)$$

Работа сил трения при проскальзывании нитей выражена формулой (2.60). Ее вариация в расчёте на единицу площади определяется интегрированием по толщине для l -го слоя; суммируя по всем слоям, получим вариацию работы сил трения нитей для многослойного пакета:

$$\delta A_{тр.нитей} = \sum_l \left(\tau_\alpha^{(l)} \delta u_\alpha^{(l)} + \tau_\beta^{(l)} \delta u_\beta^{(l)} \right). \quad (2.102)$$

Вариация работы касательных напряжений на поверхностях раздела слоёв определяется из (2.66). Суммированием по всем слоям получаем:

$$\delta A_{тр.слоев} = \sum_l \left(\tau_{nx}^{(l)} \delta u_x^{(l)} + \tau_{ny}^{(l)} \delta u_y^{(l)} \right), \quad (2.103)$$

где вариация взаимных смещений слоёв должна быть выражена через вариацию переносных перемещений согласно (2.40).

Вариация работы внешних сил. К внешним силам относится реакция основания (если оно есть). Вариация работы реакции вязкого основания с учетом (2.68) в расчёте на единицу площади представляется в виде:

$$\delta A_{осн} = \sigma_n \cos(n, z) \cdot \delta u_z. \quad (2.104)$$

Постановка начально-краевой задачи. Суммируя полученные результаты, запишем уравнение движения в вариационной постановке с учетом (2.100), (2.101), (2.102), (2.103) и (2.104):

$$\delta T + \delta A_{раст.} + \delta A_{тр.нитей} + \delta A_{тр.слоев} = \delta A_{осн}. \quad (2.105)$$

Раскрывая каждое выражение, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial V_z} \cdot \delta u_z + \sum_i \frac{\partial T}{\partial V_\alpha^{(i)}} \cdot \delta u_\alpha^{(i)} + \sum_i \frac{\partial T}{\partial V_\beta^{(i)}} \cdot \delta u_\beta^{(i)} \right) + \\
& + \frac{\partial T}{\partial u_z} \cdot \delta u_z + \sum_i \frac{\partial T}{\partial u_\alpha^{(i)}} \cdot \delta u_\alpha^{(i)} + \sum_i \frac{\partial T}{\partial u_\beta^{(i)}} \cdot \delta u_\beta^{(i)} + \\
& + \sum_i \int_{V_i} \left(\sigma_\alpha^{(i)} \delta \varepsilon_\alpha^{(i)} + \sigma_\beta^{(i)} \delta \varepsilon_\beta^{(i)} \right) dV + \sum_i \int_{S_i} \left(\tau_\alpha^{(i)} \delta u_\alpha^{(i)} + \tau_\beta^{(i)} \delta u_\beta^{(i)} \right) dS + \\
& + \sum_i \int_{S_i} \left(\tau_{nx}^{(i)} \delta u_x^{(i)} + \tau_{ny}^{(i)} \delta u_y^{(i)} \right) dS = \int_S \sigma_n \cdot \cos(n, z) dS \cdot \delta u_z.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Неизвестными функциями в этом уравнении являются переносные перемещения u_z и относительные перемещения нитей в слоях $u_\alpha^{(i)}$, $u_\beta^{(i)}$, где i – номер слоя. Неизвестные перемещения $u_x^{(i)}$, $u_y^{(i)}$ однозначно выражаются через u_z и её производные по координатам согласно (2.40).

Функционал (2.106) содержит величины, зависящие от искомым функций, их первых и вторых производных по времени, а также производных по координатам. При этом в функционал входят только первые производные по координатам от относительных перемещений $u_\alpha^{(i)}$, $u_\beta^{(i)}$, а переносные перемещения u_z входят в него вместе с первыми и вторыми производными. Поэтому, согласно [37], решения вариационного уравнения u_z должны быть непрерывно дифференцируемыми и имеющими кусочно-непрерывные вторые производные по координатам, а $u_\alpha^{(i)}$, $u_\beta^{(i)}$ – непрерывными и имеющими кусочно-непрерывные первые производные по координатам. В соответствии с нестандартным определением степени гладкости [37], u_z должна иметь класс гладкости C^1 , а $u_\alpha^{(i)}$, $u_\beta^{(i)}$ – класс C^0 . Все искомые функции зависят от двух независимых координат.

Поэтому постановка задачи может быть записана следующим образом.

Пусть задана прямоугольная область $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, которая является поверхностью приведения пакета из N слоёв ткани, причём угол между основной i -го слоя и осью хравен φ_i .

Требуется найти функции двух координат $u_z(x, y, t) \in C^1$, $u_\alpha^{(i)}(x, y, t) \in C^0$, $u_\beta^{(i)}(x, y, t) \in C^0$, $i=1, \dots, N$, удовлетворяющие вариационному уравнению (2.106) с учётом определяющих уравнений, начальным условиям:

$$u_z(x, y, 0) = u_{z0}(x, y), u_\alpha^{(i)}(x, y, 0) = u_{\alpha 0}^{(i)}(x, y), u_\beta^{(i)}(x, y, 0) = u_{\beta 0}^{(i)}(x, y), \quad (2.107)$$

$$\dot{u}_z(x, y, 0) = V_{z0}(x, y), \dot{u}_\alpha^{(i)}(x, y, 0) = V_{\alpha 0}^{(i)}(x, y), \dot{u}_\beta^{(i)}(x, y, 0) = V_{\beta 0}^{(i)}(x, y),$$

граничному условию на закреплённой части кромки Γ_1 :

$$u_z|_{\Gamma_1} = 0, \nabla u_z|_{\Gamma_1} = 0, \quad (2.108)$$

граничным условиям на кромках $x = \pm a$:

$$\sigma_\alpha^{(i)}(x, y, t) \cdot \cos \varphi_i \Big|_{x=\pm a} = 0, \sigma_\beta^{(i)}(x, y, t) \cdot \sin \varphi_i \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (2.109)$$

и граничным условиям на кромках $y = \pm b$:

$$\sigma_\alpha^{(i)}(x, y, t) \cdot \sin \varphi_i \Big|_{y=\pm b} = 0, \sigma_\beta^{(i)}(x, y, t) \cdot \cos \varphi_i \Big|_{y=\pm b} = 0. \quad (2.110)$$

Начальные условия, а также перемещения обжатия нормали, берём из результатов расчета волновой стадии деформирования.

Граничные условия в перемещениях заключаются в запрете переносных перемещений закреплённых кромок или частей кромок многослойного пакета.

Граничные условия в напряжениях на лицевой и обратной стороне пакета не ставятся, поскольку задача двумерная.

Для относительного движения нитей граничные условия состоят в равенстве нулю напряжений в нитях на кромках при произвольном угле армирования φ . В частности, если нити параллельны кромке, то условия (2.109)-(2.110) выполняются тождественно.

Выписывание вариационного уравнения в явном виде приводит к крайне громоздким выражениям, которые привести затруднительно. Далее для построения дискретной схемы будет использоваться вся совокупность соотношений, которые входят в постановку задачи.

2.7 Модель тепловыделения и адиабатического нагрева

При соударении поражающего элемента с тканым образцом происходит преобразование кинетической энергии ударника в необратимо рассеянную энергию в виде тепла.

Считая, что работа сил трения полностью переходит в тепло, а работа разрушения нитей переходит в тепло частично, выражение для адиабатической температуры ткани имеет вид:

$$T_{ад} = \frac{1}{c_p} (A_{тр.нитей} + A_{тр.слоев} + b \cdot A_p), \quad (2.111)$$

где c – удельная теплоемкость, b – коэффициент теплового эффекта.

Коэффициент теплового эффекта b не может быть найден прямым экспериментальным методом. Одним из путей его определения является идентификация модели по экспериментальным данным [41].

Методика идентификации модели тепловыделения [41] предполагает бесконтактную регистрацию температурных полей на поверхности образца в процессе его нагружения. В качестве исходных данных для идентификационных расчетов принимается диаграмма деформирования в осях «напряжение-деформация», скорость нагружения $\frac{d\varepsilon}{dt}$, температуры $T_k(t_i)$ в ряде точек образца в моменты времени t_i , где i – номер момента времени, k – номер точки [41].

На рисунке 2.9 показаны температурные профили для десяти выбранных точек образца.

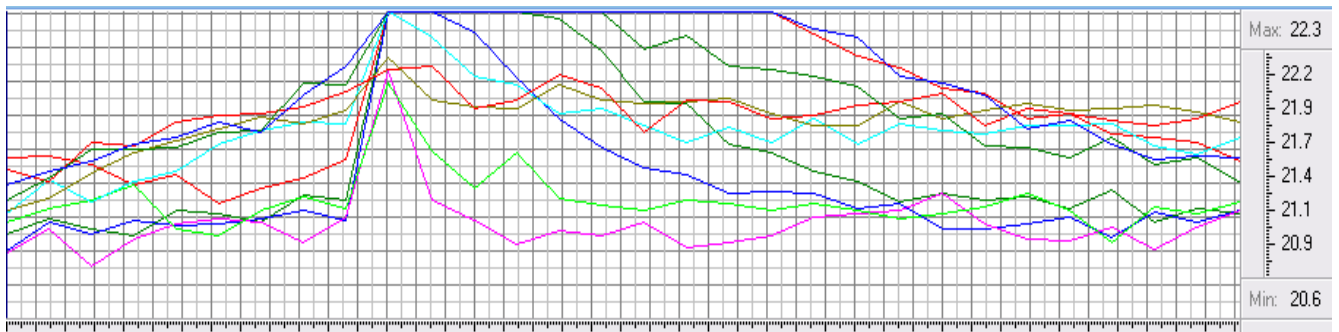


Рисунок 2.9 – Температурные профили в точках образца

Для расчетов выделим участок на диаграмме, расположенный до момента времени, при котором происходит повышение температуры во всех точках. При идентификации будем варьировать температуру среды и коэффициент теплового эффекта. Эти два параметра входят в уравнение теплового баланса [13]. Решением этого уравнения будут температуры в точках образца. Критерием идентификации выступает сумма квадратов отклонения расчетных и измеренных значений температур в точках образца.

Процесс идентификации был проведен для всех экспериментальных образцов (всего 20 штук). Найденное среднее значение коэффициента теплового эффекта равно $0,0192$. Эта величина показывает, какая доля необратимо затраченной работы расходуется в виде тепла.

Таким образом, построенная модель включает описание механических процессов и тепловыделения. Её выходные переменные включают адиабатическую температуру материала, изменяющуюся в течение соударения.

Различие температур в разных слоях должно вызывать теплоперенос между слоями. Однако малая продолжительность моделируемых процессов приводит к тому, что температура не успевает значительно измениться. Поэтому модель теплопереноса будет рассмотрена позже, в главе 4.

Выводы по главе 2

1. На основе анализа модели термомеханических процессов при соударении жесткого элемента с тканой преградой, которая рассматривается как

многослойная безмоментная оболочка, выявлены следующие недостатки известной модели: невозможность адекватного описания различий тепловыделения в одинаковых слоях на разном расстоянии от поверхности удара, наличие сингулярности в начальный момент соударения, отсутствие учёта трения между слоями.

2. Разработана усовершенствованная двухстадийная математическая модель деформирования тканого многослойного образца при соударении с жестким воздействующим объектом, в которой выделены волновая и оболочечная стадии соударения, причём начальное уплотнение ткани и начальные условия для процессов на оболочечной стадии определяются расчётом волновой стадии деформирования.

3. На оболочечной стадии принятые в модели кинематические гипотезы ломаной нормали позволяют описать различие деформаций слоёв пакета и их взаимного проскальзывания и привести уравнения движения многослойной ткани к системе уравнений переносного движения многослойной оболочки, в которой слои могут иметь взаимные смещения, и относительного движения нитей в слоях ткани, рассматриваемых как сплошная среда с включёнными в неё нитями.

4. Сформулированная начально-краевая задача позволяет определить деформации, напряжения, поглощённую энергию, тепловыделение и температуру нитей ткани в каждый момент времени с учётом необратимой деформации нитей, трения нитей при их проскальзывании, трения слоёв при взаимном смещении и реакции податливого основания. Тем самым разработана усовершенствованная математическая модель термомеханических процессов в многослойных тканых преградах при соударении с жёстким поражающим элементом.

5. Аналитическое решение полученных уравнений движения не представляется возможным, что требует разработки их численной схемы.

ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ ЗАДАЧ О ДЕФОРМИРОВАНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА НА ВОЛНОВОЙ И ОБОЛОЧЕЧНОЙ СТАДИЯХ

3.1 Численная схема задачи о деформировании на волновой стадии

Задача расчёта волновой стадии соударения имеет вспомогательный характер, и её решение предназначено для определения начальных условий для уравнений движения на оболочечной стадии. Радиус пятна контакта, как правило, не превышает размера конечного элемента оболочки. Поэтому целесообразно построить численную схему для упрощённого варианта этой задачи в одномерной постановке.

Перемещения $u(z, t)$ и скорость $\dot{u}(z, t)$ зависят от нормальной координаты и времени от начала соударения и определяются решением уравнения (2.5) при начальных условиях (2.6).

Заменяя в уравнении движения (2.5) дифференциал приращением функции и принимая, что лицевая поверхность слоя соответствует значению напряжений на левой границе, а обратная поверхность слоя соответствует значению напряжений на правой границе:

$$h\rho\ddot{u} = \sigma_z^{лев} - \sigma_z^{прав}. \quad (3.1)$$

Умножим обе части равенства на площадь малого участка слоя $dx dy$ и преобразуем к виду:

$$m\ddot{u} = S(\sigma_z^{лев} - \sigma_z^{прав}). \quad (3.2)$$

Для задания зависимости напряжений от деформаций смятия и деформаций сжатия введем коэффициент активности A : при $\dot{\varepsilon} < 0$ и $\mu < \mu_0$ $A=1$, иначе $A=0$.

Тогда напряжения можно представить в виде:

$$\sigma = (1 - A)E(\varepsilon - \varepsilon_0) + A\sigma_{см}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) уравнение движения (3.2) будет записано в виде

$$m\ddot{u} = S \begin{bmatrix} (1 - A_{лев})E_{лев}(\varepsilon_{лев} - \varepsilon_0) + A_{лев}\sigma_{см} - \\ -(1 - A_{прав})E_{прав}(\varepsilon_{прав} - \varepsilon_0) - A_{прав}\sigma_{см} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Считая, что значения, определенные на левой границе соответствуют i -узлу, а на правой границе $i+1$ узлу, деформации можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{лев} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h}, \quad \varepsilon_{прав} = \frac{u_i - u_{i+1}}{h}. \quad (3.5)$$

Подставляя выражения (3.5) в (3.4), получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_i = & S[A_i\sigma_{см} - A_{i+1}\sigma_{см} - (1 - A_i)E_i\varepsilon_0 + (1 - A_{i+1})E_{i+1}\varepsilon_0] + S(1 - A_i)E_i \frac{u_{i-1}}{h} - \\ & - S(1 - A_i)E_i \frac{u_i}{h} - S(1 - A_{i+1})E_{i+1} \frac{u_i}{h} + S(1 - A_{i+1})E_{i+1} \frac{u_{i+1}}{h}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем малый шаг по времени аппроксимируем производные разностными отношениями [82, 19] (верхний индекс обозначает номер момента времени):

$$\ddot{u}^{t+1} = \frac{\dot{u}^{t+1} - \dot{u}^t}{\tau} = \frac{v^{t+1} - v^t}{\tau}, \quad \dot{u}^{t+1} = \frac{u^{t+1} - u^t}{\tau}. \quad (3.7)$$

При подстановке (3.7) в (3.6) получается следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} m \frac{\dot{u}_i^{t+1} - \dot{u}_i^t}{\tau} = & S[A_i\sigma_{см} - A_{i+1}\sigma_{см} - (1 - A_i)E_i\varepsilon_0 + (1 - A_{i+1})E_{i+1}\varepsilon_0] + \\ & + S(1 - A_i)E_i \frac{u_{i-1}^t + \tau \cdot \dot{u}_{i-1}^{t+1}}{h} - S(1 - A_i)E_i \frac{u_i^t + \tau \cdot \dot{u}_i^{t+1}}{h} - \\ & - S(1 - A_{i+1})E_{i+1} \frac{u_i^t + \tau \cdot \dot{u}_i^{t+1}}{h} + S(1 - A_{i+1})E_{i+1} \frac{u_{i+1}^t + \tau \cdot \dot{u}_{i+1}^{t+1}}{h}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решением являются скорости и перемещения на каждом шаге по времени. Вычисления заканчиваются, когда перестают увеличиваться необратимые деформации обжатия нормали.

Значения, вычисленные в конце волновой стадии, принимаются за начальные скорости и перемещения узлов оболочки. Рассчитанное на этой стадии уменьшение толщины тканого пакета принимается за необратимое обжатие нормали в модели оболочки.

3.2 Дискретизация уравнений движения на оболочечной стадии

Численная схема задачи расчёта термомеханических процессов на оболочечной стадии деформирования расщепляется на две сопряжённые (но не связанные) подзадачи: расчёт движения многослойного пакета и расчёт тепловыделения и нагрева. Наиболее сложной является задача о движении.

Вначале используем для дискретизации по пространству метод конечных элементов, оставляя производные по времени. Это даёт возможность перейти от двумерной начально-краевой задачи к анализу системы с конечным числом степеней свободы.

Пусть многослойный пакет представлен в виде совокупности двумерных многослойных элементов, связанных в узловых точках. Для определённости примем, что все конечные элементы имеют четырёхугольную форму, а их узлы находятся в вершинах четырёхугольников на поверхности приведения.

В каждом узле неизвестными являются значения искомым функций: переносного перемещения u_z и относительных перемещений нитей $u_\alpha^{(i)}$, $u_\beta^{(i)}$. Не останавливаясь пока на интерполяции искомым функций по координатам, заметим, что для обеспечения гладкости u_z необходимо дополнительно ввести в каждом узле два неизвестных – производные $\vartheta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}$ и $\vartheta_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x}$. Таким образом, общее число узловых неизвестных равно $3+2k$, где k – число слоёв. Совокупность всех узловых неизвестных образует множество степеней свободы механической системы. Поскольку узловые неизвестные независимы, их можно принять за обобщённые перемещения [18].

Знаки при степенях свободы ϑ_x и ϑ_y приняты, как указано выше, из тех соображений, что указанные производные дают линейную оценку углов поворота нормали относительно осей x и y соответственно. Точные углы поворота выражаются через производные нелинейно, но для краткости будем называть

величины свободы ϑ_x и ϑ_y углами поворота в тех случаях, когда это не приведёт к путанице.

Следуя традиционным обозначениям аналитической механики, будем обозначать обобщённые перемещения q_i , где i – номер степени свободы. Весь вектор-столбец обобщённых перемещений будем обозначать \mathbf{q} . Порядок нумерации можно выбрать произвольным, что будет использовано в дальнейшем для компактной блочной записи получаемых соотношений.

Движение механической системы с конечным числом степеней свободы описывается уравнением Лагранжа 2-го рода [93]. Его использование позволяет избежать сложных преобразований исходного функционала и вычисления ускорений в неинерциальной системе отсчёта. Согласно [93], система уравнений движения механической системы с конечным числом степеней свободы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = P_i, \quad (3.9)$$

где i – номер степени свободы,

T – кинетическая энергия механической системы,

P_i – обобщённая сила (коэффициент при вариации обобщённого перемещения в выражении для вариации работы внешних и внутренних сил).

Кинетическая энергия и обобщённая сила в общем случае зависят от обобщённых перемещений и их производных по времени. Тогда система уравнений Лагранжа примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = P_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.10)$$

Эта система может быть линеаризована в окрестности некоторого состояния, определяемого фиксированными значениями перемещений q^* и скоростей \dot{q}^* . Так, кинетическую энергию представим в виде:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= T(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) + \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} (q_i - q_i^*) + \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i - \dot{q}_i^*) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} (q_i - q_i^*)(q_j - q_j^*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} (\dot{q}_i - \dot{q}_i^*)(\dot{q}_j - \dot{q}_j^*) + \\
&+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} (q_i - q_i^*)(\dot{q}_j - \dot{q}_j^*) + \dots
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Все частные производные вычислены при значениях перемещений q^* и скоростей \dot{q}^* и являются константами. Обозначим их следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = T_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \hat{T}_i, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} = \hat{M}_{ij}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = M_{ij}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = \tilde{M}_{ij}. \quad (3.12)$$

Величины M_{ij} образуют матрицу масс элемента [75], смысл остальных величин будет выяснен позже.

Тогда левую часть уравнения (3.11) можно преобразовать с учётом введённых обозначений (3.12):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\hat{T}_i + M_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_j^*) + \tilde{M}_{ij} (q_j - q_j^*) \right) - \\
&- \left(T_i + \hat{M}_{ij} (q_j - q_j^*) + \tilde{M}_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_j^*) \right) = P_i(q, \dot{q}).
\end{aligned} \quad (3.13)$$

После дифференцирования получим:

$$M_{ij} \ddot{q}_j + \tilde{M}_{ij} \dot{q}_j - \left(T_i + \hat{M}_{ij} (q_j - q_j^*) + \tilde{M}_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_j^*) \right) = P_i(q, \dot{q}). \quad (3.14)$$

Поступая аналогично с правой частью, будем иметь:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -K_{ij}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_j} = -C_{ij}, \quad (3.15)$$

$$P_i(q, \dot{q}) = P_i(q^*, \dot{q}^*) - K_{ij} (q_j - q_j^*) - C_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_j^*). \quad (3.16)$$

Здесь K_{ij} образуют матрицу жесткости, а C_{ij} – матрицу демпфирования.

В матричных обозначениях линеаризованная система уравнений движения принимает вид:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{M}})\mathbf{q} = \mathbf{P}(q^*, \dot{q}^*) + \mathbf{T}(q^*, \dot{q}^*) + (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{M}})\mathbf{q}^* + (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{M}})\dot{\mathbf{q}}^*. \quad (3.17)$$

Таким образом, линеаризованная система уравнений приняла вид системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Первая и вторая производная вектора узловых перемещений аппроксимируются конечными разностями с первым порядком относительно временного шага τ :

$$\dot{\mathbf{q}}^{t+1} = \frac{\mathbf{q}^{t+1} - \mathbf{q}^t}{\tau}, \quad \ddot{\mathbf{q}}^t = \frac{\dot{\mathbf{q}}^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}^t}{\tau} \quad (3.18)$$

После подстановки (3.18) в (3.17) может быть получена неявная разностная схема с первым порядком аппроксимации относительно шага τ , аналогичная (для волновой стадии). Вид матричных коэффициентов может быть найден только с учётом используемой интерполяции искомым перемещений. Далее после выяснения вида матричных коэффициентов будет построена более экономичная схема расщепления.

3.3 Дискретизация уравнений движения по координатам

Построение конечно-элементной модели затруднено нелинейностью задачи, приводящей к существенному усложнению вычислительных алгоритмов. В дальнейшем рассмотрении математические выкладки будут сопровождаться функционально-объектным анализом, что позволяет уменьшить трудоёмкость последующей программной реализации.

Дискретизация уравнений по координатам рассматривается на одном временном шаге, для которого, наряду с тополого-геометрическими и атрибутивными данными об исходном состоянии движущейся механической системы, известны переменные состояния в начале шага. К таким переменным относятся векторы-столбцы узловых перемещений и их производных по времени, а также переменные состояния материала в характерных точках элементов: остаточные деформации, флаг активности нагружения, флаг разрушения материала и напряжения.

Глобальные векторы узловых перемещений и скоростей. Перемещения в переносном движении должны иметь непрерывные и кусочно дифференцируемые первые производные по координатам, поэтому для них используется эрмитов сплайн [37]. Это позволяет аппроксимировать как линейные перемещения лицевой поверхности пакета слоёв, так и их производные, но требует введения в число степеней свободы производных от прогиба по координатам или углов поворота геометрической нормали. Для относительных перемещений предъявляются менее жесткие требования по гладкости, и целесообразно использовать непрерывные и кусочно дифференцируемые лагранжевы сплайны на тех же по форме конечных элементах.

Поэтому число степеней свободы узла для переносных перемещений будет отличаться от числа степеней свободы относительных перемещений. Как указывалось выше, число переносных перемещений для каждого узла равно трём: под первой степенью свободы принимаем переносное перемещение поверхности приведения u_z , далее две производные прогиба по координатам (линеаризованные величины углов поворота относительно осей x и y) ϑ_x и ϑ_y . Совокупность значений этих узловых переменных для одного узла будем обозначать $\mathbf{q}_{s_v} = (w_v \quad \vartheta_{xv} \quad \vartheta_{yv})^T$, вектор переносных перемещений всех узлов модели \mathbf{q}_s , вектор переносных узловых перемещений одного элемента $\mathbf{q}_s^{(e)}$ или просто \mathbf{q}_s , если из контекста будет понятно, что рассмотрение относится к одному элементу.

Число относительных перемещений узла равно удвоенному числу слоёв ткани. Совокупность относительных перемещений в узле будем обозначать $\mathbf{q}_{r_v} = (u_{\alpha_v}^{(1)} \quad u_{\beta_v}^{(1)} \quad \dots u_{\alpha_v}^{(k)} \quad u_{\beta_v}^{(k)})^T$, вектор относительных перемещений всех узлов модели \mathbf{q}_r , вектор относительных узловых перемещений k -го слоя элемента номер e $\mathbf{q}_r^{(k)(e)}$ или $\mathbf{q}_r^{(k)}$. Узловые скорости будем обозначать так же, как и узловые перемещения, но с добавлением верхней точки (знака производной по времени).

Каждый из векторов узловых данных будем отождествлять с одним из функциональных объектов [44, 42], для которых будут сохраняться введённые обозначения. Значения q_s и q_r в начале временного шага являются векторами-константами q_s^* и q_r^* соответственно. С ними отождествляются одноимённые функциональные объекты. Данные каждого функционального объекта могут быть доступны в других (зависимых) функциональных объектах, для которых объект – источник данных должен быть аргументом. Значение любого функционального объекта не может быть вычислено, пока не вычислены все его аргументы [42], т.е. алгоритм вычислений должен быть представлен в виде сети. Далее будет рассмотрен вариант представления алгоритмов в виде сети с побочными эффектами, при котором значение функционального объекта зависит от неявного аргумента (атрибутивных данных), который передаётся аргументу зависимым объектом.

Базисные функции. Будем различать базисные функции для разных степеней свободы, относящихся к одному и тому же узлу.

Как указывалось выше, общее число неизвестных в узле равно $3+2k$, здесь остальные степени свободы относятся к относительным перемещениям нитей в слоях – чередующиеся перемещения нитей u_α и u_β в каждом слое.

Для локальных интерполяционных формул будут использоваться следующие обозначения: гладкие эрмитовы сплайны для интерполяции прогиба в переносном движении обозначим буквой F ; эти же сплайны, но имеющие смысл коэффициентов при углах поворота ϑ_x и ϑ_y – буквами G и H соответственно; лагранжевы сплайны будем обозначать буквой N . Дополнительно малой греческой буквой v будем указывать номер узла элемента. Таким образом, в каждом узле имеем следующий набор базисных функций: F^v, G^v, H^v, N^v .

Значение произвольной функции $f(\xi, \eta)$, зависящей от безразмерных (топологических) координат (ξ, η) , в любой внутренней точке элемента

аппроксимирует интерполяционный полином. Для аппроксимации перемещений в переносном движении используются значения функции в узлах элемента

$$f^v = f(\xi_v, \eta_v) \text{ и значения её частных производных в узлах: } \frac{\partial f^v}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} \Big|_{\substack{\xi=\xi_v \\ \eta=\eta_v}} \text{ и}$$

$$\frac{\partial f^v}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} \Big|_{\substack{\xi=\xi_v \\ \eta=\eta_v}}. \text{ Интерполяционный полином будет иметь вид:}$$

$$f(\xi, \eta) = \sum_v F^v(\xi, \eta) \cdot f^v - \sum_v G^v(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial f^v}{\partial x} + \sum_v H^v(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial f^v}{\partial y}. \quad (3.19)$$

Производные по x и y в этом выражении находятся с учётом взаимно однозначного отображения безразмерных координат (ξ, η) на размерные координаты (x, y) .

Для аппроксимации относительных перемещений и других кусочно гладких функций используем лагранжев сплайн:

$$f(\xi, \eta) = \sum_v N^v(\xi, \eta) \cdot f^v. \quad (3.20)$$

В (3.19) и (3.20) используется обычное для алгебры матриц соглашение – суммирование по повторяющемуся неному индексу v (номеру узла элемента).

Каждый набор базисных функций будем считать функциональным объектом – интерполятором, значением которого является таблица значений всех базисных функций и их производных, вычисленных в определённой точке элемента. Координаты такой точки (ξ, η) содержатся в неявном аргументе. При вычислении производных используются координаты узлов элемента, которые содержатся в отдельном функциональном объекте; он должен быть явным аргументом интерполятора.

Далее будут приведены выражения базисных функций с учетом их различий для переносного и относительного движения.

Аппроксимация переносных перемещений. Для аппроксимации перемещений в переносном движении используется четырехугольный элемент

пластины с учетом наложения гипотезы Кирхгофа. Такой элемент был предложен в работе [3, 95] и далее будет обозначаться DKQ (рисунок 3.1).

В отличие от техники аппроксимации перемещений в лагранжевых и обычных эрмитовых элементах, для элемента DKQ используется аппроксимация только углов поворота нормали при узловых переменных – прогиб и два угла поворота. Угол поворота в интерполяторе отождествляется с производной угла поворота нормали по размерной координате (с точностью до знака). Таким образом, общее число базисных функций равно 24 (для каждого из двух углов поворота используются по 12 базисных функций – по три на переменные каждого узла):

$$\{\mathbf{q}\} = \{w_1 w'_{x1} w'_{y1} w_2 w'_{x2} w'_{y2} w_3 w'_{x3} w'_{y3} w_4 w'_{x4} w'_{y4}\}. \quad (3.22)$$

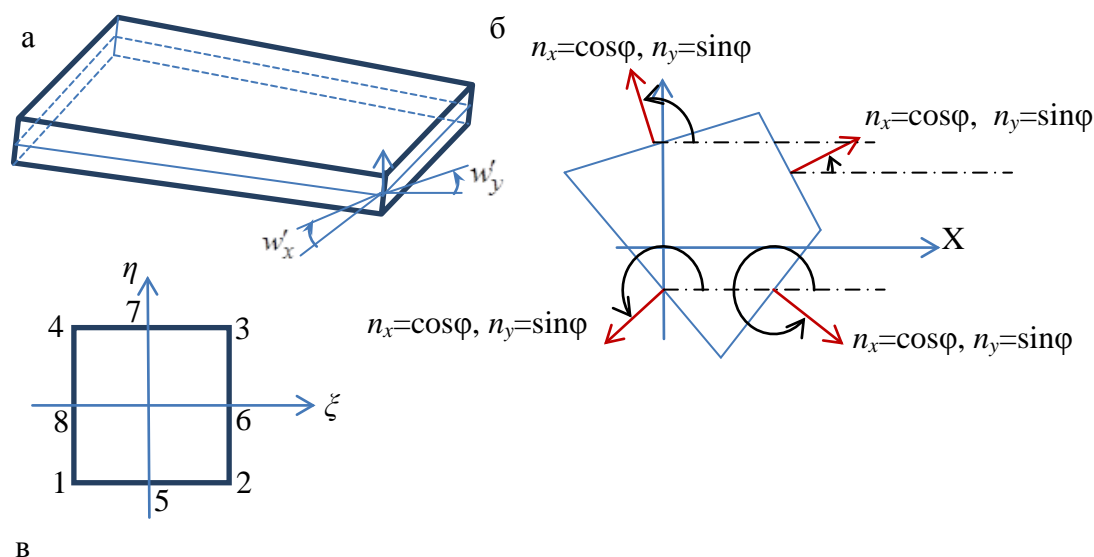


Рисунок 3.1 – Четырехугольный элемент DKQ: а - перемещения, б – геометрия, в – отображение на нормированный квадрат

Длину i – ой стороны будем обозначать L_i :

$$L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}. \quad (3.23)$$

Функции формы для угловых узлов имеют следующий вид [38]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3.24)$$

для узлов в серединах сторон:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) \quad (i = 5, 7), \\ \tilde{N}_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi) \quad (i = 6, 8).\end{aligned}\tag{3.25}$$

В целях упрощения разделим базисные функции на следующие группы:

- а) коэффициенты при прогибах в узлах $F_v(\xi, \eta)$;
- б) коэффициенты при одноимённой производной от прогиба $G_v(\xi, \eta)$;
- в) коэффициенты при другой производной от прогиба $H_v(\xi, \eta)$.

Следуя выводам, приведенным в [3], выпишем базисные функции для углов поворота нормали ϑ_x и ϑ_y . Будем указывать в верхнем индексе номер угла поворота: 1 – относительно x , 2 – относительно y . Буквой v указывается номер узла конечного элемента. Для определенности за номер стороны будем принимать номер первого узла этой стороны.

Коэффициенты при прогибах узлов:

$$F_v^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{3n_y^v}{2L_v} \tilde{N}_v(\xi, \eta) - \frac{3n_y^{v-1}}{2L_{v-1}} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta),\tag{3.26}$$

$$F_v^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{3n_x^v}{2L_v} \tilde{N}_v(\xi, \eta) + \frac{3n_x^{v-1}}{2L_{v-1}} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta).\tag{3.27}$$

Коэффициенты при одноимённых производных:

$$G_v^{(1)}(\xi, \eta) = N_v(\xi, \eta) + \frac{1}{4}(C_v \tilde{N}_v(\xi, \eta) + C_{v-1} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta)),\tag{3.28}$$

где $C_v = 2n_x^{v2} - n_y^{v2}$,

n_x^v и n_y^v - координаты единичной нормали к стороне, у которой первый узел имеет номер v ;

$$G_v^{(2)}(\xi, \eta) = N_v(\xi, \eta) + \frac{1}{4}(C_v \tilde{N}_v(\xi, \eta) + C_{v-1} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta)),\tag{3.29}$$

где $C_v = 2n_y^{v2} - n_x^{v2}$.

Коэффициенты при разноимённых производных:

$$H_v^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{3}{4} (S_v \tilde{N}_v(\xi, \eta) + S_{v-1} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta)), \quad (3.30)$$

$$H_v^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{3}{4} (S_v \tilde{N}_v(\xi, \eta) + S_{v-1} \tilde{N}_{v-1}(\xi, \eta)), \quad (3.31)$$

где $S_v = n_x^v \cdot n_y^v$.

Формулы (3.24)-(3.31) позволяют выразить через узловые переменные производные от прогиба:

$$\begin{aligned} w'_x &= \sum_v (F_v^{(1)} w_v + G_v^{(1)} w'_{xv} + H_v^{(1)} w'_{yv}), \\ w'_y &= \sum_v (F_v^{(2)} w_v + G_v^{(2)} w'_{xv} + H_v^{(2)} w'_{yv}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Заменяя в выражениях (3.32) w'_y на ϑ_x , а w'_x на $-\vartheta_y$, получим зависимости производных прогиба по координатам от узловых переменных:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{pmatrix} = \sum_v \begin{bmatrix} F_v^{(2)}(\xi, \eta) & H_v^{(2)}(\xi, \eta) & -G_v^{(2)}(\xi, \eta) \\ -F_v^{(1)}(\xi, \eta) & -H_v^{(1)}(\xi, \eta) & G_v^{(1)}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_v \\ \vartheta_{xv} \\ \vartheta_{yv} \end{Bmatrix}, \quad (3.33)$$

или в матричной форме:

$$\vartheta(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \vartheta_x(\xi, \eta) \\ \vartheta_y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\vartheta(\xi, \eta) \mathbf{q}_s, \quad (3.34)$$

где обозначено:

$$\mathbf{B}_\vartheta = [\mathbf{B}_{\vartheta_1} \mid \mathbf{B}_{\vartheta_2} \mid \mathbf{B}_{\vartheta_3} \mid \mathbf{B}_{\vartheta_4}],$$

$$\mathbf{B}_{\vartheta_v} = \begin{bmatrix} F_v^{(2)}(\xi, \eta) & H_v^{(2)}(\xi, \eta) & -G_v^{(2)}(\xi, \eta) \\ -F_v^{(1)}(\xi, \eta) & -H_v^{(1)}(\xi, \eta) & G_v^{(1)}(\xi, \eta) \end{bmatrix}.$$

Однако для вычисления работы распределённых сил, приложенных по нормали, прогибы могут быть также выражены через узловые неизвестные в виде [3]:

$$w(\xi, \eta) = \sum_v \Psi^v(\xi, \eta) \cdot w^v + \sum_v \Phi_x^v(\xi, \eta) \cdot \vartheta_{xv} + \sum_v \Phi_y^v(\xi, \eta) \cdot \vartheta_{yv}, \quad (3.35)$$

где $\Psi^v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} N^v(\xi, \eta) (2 + \xi^v \xi + \eta^v \eta - \xi^2 - \eta^2)$,

$$\Phi_x^v = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} + (x_{34} - x_{21}) \eta^v] \frac{1}{2} N^v(\xi, \eta) \xi^v (\xi^2 - 1) + \\ + \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} + (x_{34} - x_{21}) \xi^v] \frac{1}{2} N^v(\xi, \eta) \eta^v (\eta^2 - 1),$$

$$\Phi_y^v = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} + (y_{32} - y_{41}) \eta^v] \frac{1}{2} N^v(\xi, \eta) \xi^v (\xi^2 - 1) + \\ + \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} + (y_{32} - y_{41}) \xi^v] \frac{1}{2} N^v(\xi, \eta) \eta^v (\eta^2 - 1),$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j.$$

Деформации поверхности приведения. В начале временного шага положение нормали в точке элемента определяется согласно (3.34):

$$\mathfrak{g}^*(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_x^*(\xi, \eta) \\ \mathfrak{g}_y^*(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_g(\xi, \eta) \mathbf{q}_s^*; \quad (3.36)$$

функционально-объектная декомпозиция включает объекты: $\mathfrak{g}^*(\xi, \eta)$, $\mathbf{B}_g(\xi, \eta)$ и \mathbf{q}_s^* , которые зависят также от одного и того же неявного аргумента – координат точки (ξ, η) . Объекты $\mathbf{B}_g(\xi, \eta)$ и \mathbf{q}_s^* являются явными аргументами для $\mathfrak{g}^*(\xi, \eta)$. $\mathbf{B}_g(\xi, \eta)$, в свою очередь, зависит от явного аргумента – интерполятора. Взаимодействие этих функциональных объектов иллюстрируется схемой на рисунок 3.2.

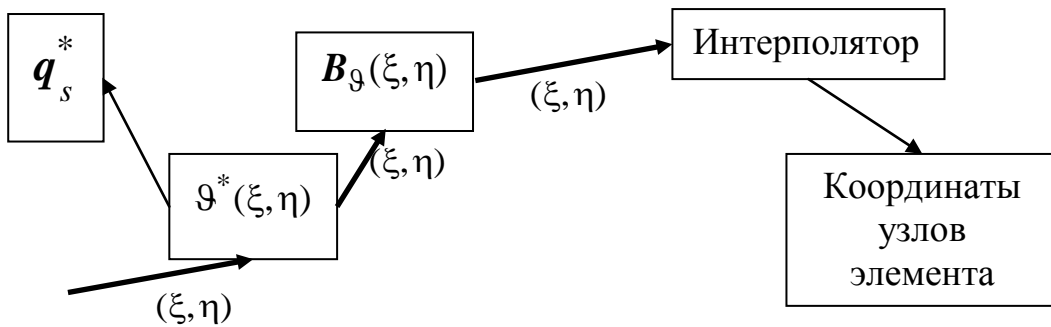


Рисунок 3.2 – Взаимодействие функциональных объектов при вычислении

$$\mathfrak{g}^*(\xi, \eta)$$

Стрелками показаны явные аргументы объектов. Жирными стрелками показаны аргументы, которым передаётся неявный аргумент (ξ, η) .

Для сокращения размера формул разделим все искомые деформации на две части – изгибно-крутильные и мембранные:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \mid \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s)^T, \quad (3.37)$$

где $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = (\bar{\varepsilon}_x \quad \bar{\varepsilon}_y \quad \bar{\gamma}_{xy})^T$, $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_s = (\bar{\kappa}_x \quad \bar{\kappa}_y \quad \bar{\chi}_{xy})^T$.

Мембранные деформации поверхности приведения определяются формулами (2.21) и (2.15). Получаем:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^*(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} - 1 \\ \sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2} - 1 \\ \vartheta_x^*(\xi, \eta)\vartheta_y^*(\xi, \eta) \\ - \frac{\vartheta_x^*(\xi, \eta)\vartheta_y^*(\xi, \eta)}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2} \cdot \sqrt{1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Изгибно-крутильные деформации в соответствии с формулами (2.30) – (2.31), определяются следующим образом:

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^*(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{-u''_{xx}(\xi, \eta)}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot (1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2)} \\ \frac{-u''_{yy}(\xi, \eta)}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot (1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2)} \\ \frac{2u''_{xy}(\xi, \eta)}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot \sqrt{(1 + u_\alpha'^2)(1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2)}} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Вторые производные от прогиба находятся дифференцированием (3.34) по координатам:

$$\begin{pmatrix} -u''_{xx} \\ -u''_{yy} \\ 2u''_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \vartheta_y + \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_x \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\partial \vartheta} \mathbf{q}_s, \quad (3.40)$$

где обозначено:

$$\mathbf{B}_{\partial\vartheta} = [\mathbf{B}_{\partial\vartheta_1} \mid \mathbf{B}_{\partial\vartheta_2} \mid \mathbf{B}_{\partial\vartheta_3} \mid \mathbf{B}_{\partial\vartheta_4}],$$

$$\mathbf{B}_{\partial\vartheta_v} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_v^{(1)}}{\partial x} & -\frac{\partial H_v^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial G_v^{(1)}}{\partial x} \\ -\frac{\partial F_v^{(2)}}{\partial y} & -\frac{\partial G_v^{(2)}}{\partial y} & \frac{\partial H_v^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_v^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial F_v^{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial H_v^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial H_v^{(2)}}{\partial x} & -\left(\frac{\partial G_v^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial G_v^{(2)}}{\partial x}\right) \end{bmatrix}.$$

Окончательно, получаем:

$$\bar{\mathbf{k}}_s^*(\xi, \eta) = [\mathbf{K}^*(\xi, \eta)] \mathbf{B}_{\partial\vartheta}(\xi, \eta) \mathbf{q}_s^*, \quad (3.41)$$

где $\mathbf{K}^*(\xi, \eta)$ - диагональная матрица с элементами:

$$\mathbf{K}_{11}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot (1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2)},$$

$$\mathbf{K}_{22}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot (1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2)}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}_{33}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2} \cdot \sqrt{(1 + \vartheta_x^*(\xi, \eta)^2)(1 + \vartheta_y^*(\xi, \eta)^2)}}.$$

Матрицы $\mathbf{K}^*(\xi, \eta)$, $\mathbf{B}_{\partial\vartheta}(\xi, \eta)$, $\bar{\mathbf{k}}_s^*(\xi, \eta)$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^*(\xi, \eta)$ будем ассоциировать с функциональными объектами.

Малые приращения деформаций поверхности приведения. Приращения деформаций в окрестности \mathbf{q}^* функциональными объектами не являются. Это – переменные величины, которые должны быть выражены через неопределённые приращения узловых переменных.

Линеаризуем мембранные деформации в окрестности отсчётного положения, заменяя малое приращение дифференциалом. Из (2.21) имеем:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\vartheta_y^*}{1 + \varepsilon_x^*} \Delta \vartheta_y \\ \frac{\vartheta_x^*}{1 + \varepsilon_y^*} \Delta \vartheta_x \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_x} \Delta \vartheta_x + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_y} \Delta \vartheta_y \end{array} \right\}, \quad (3.43)$$

где

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_x} = - \left[\bar{\gamma}_{xy}^* \left(1 + \vartheta_y^{*2} \right) \vartheta_x^* + \frac{\vartheta_y^*}{\left(1 + \varepsilon_x^* \right) \left(1 + \varepsilon_y^* \right)} \right],$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_y} = - \left[\bar{\gamma}_{xy}^* \left(1 + \vartheta_x^{*2} \right) \vartheta_y^* + \frac{\vartheta_x^*}{\left(1 + \varepsilon_x^* \right) \left(1 + \varepsilon_y^* \right)} \right].$$

Подставив вместо приращений результат интерполяции (3.34), получим:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \mathbf{L}^* (\xi, \eta) \mathbf{B}_g (\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s, \quad \mathbf{L}^* (\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\vartheta_y^*}{1 + \varepsilon_x^*} \\ \frac{\vartheta_x^*}{1 + \varepsilon_y^*} & 0 \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_x} & \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial \vartheta_y} \end{bmatrix}. \quad (3.43a)$$

Аналогично для деформаций изгиба и кручения из (3.41) имеем:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s (\xi, \eta) = \mathbf{K}^* (\xi, \eta) \mathbf{B}_{\partial g} (\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.44)$$

Таким образом, деформации поверхности приведения в линеаризованном виде принимают вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s (\xi, \eta) = \boldsymbol{\varepsilon}_s^* (\xi, \eta) + \mathbf{B}_s^* (\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s, \quad (3.45)$$

где обозначено:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^* = \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^* \mid \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^* \right)^T,$$

$$\mathbf{B}_s^* (\xi, \eta) = \left[\frac{\mathbf{L}^* (\xi, \eta) \mathbf{B}_g (\xi, \eta)}{\mathbf{K}^* (\xi, \eta) \mathbf{B}_{\partial g} (\xi, \eta)} \right].$$

С учётом (2.80) и (2.83) – (2.84) аналогичным образом вычисляются также деформации и приращения деформаций поверхности приведения в базисе, повернутом на угол армирования.

Взаимное смещение слоёв и его приращение. Взаимные смещения слоёв, согласно формуле (2.39), зависят от углов поворота геометрической нормали. Компоненты перемещения вдоль координатных осей определяются формулами (2.39) – (2.40). Подставляя интерполяцию (3.34) в формулу (2.40), получим компоненты взаимного смещения слоёв в начале временного шага \mathbf{u}_{cl}^* и их приращения $\Delta \mathbf{u}_{cl}$:

$$\mathbf{u}_{cl}^* = \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \mathbf{B}_\vartheta \mathbf{q}_s^*, \quad \Delta \mathbf{u}_{cl} = \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \mathbf{B}_\vartheta \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.46)$$

Переносные перемещения слоя. Переносные перемещения слоя, согласно формуле (2.34), отличаются от перемещений поверхности приведения на величину перемещения, вызванного обжатием нормали. Заменяя перемещения поверхности приведения их аппроксимацией (3.35), получим зависимость перемещений в точке слоя от безразмерных координат:

$$w^{(l)}(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) + u_z^*(\xi, \eta, z_l), \quad (3.47)$$

где перемещения обжатия нормали зависят как от безразмерных координат (ξ, η) , так и от лагранжевой координаты по толщине слоя.

Запишем (3.35) и (3.47) в матричной форме:

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{B}_w \mathbf{q}_s, \quad \mathbf{B}_{wv} = \begin{bmatrix} \Psi^v(\xi, \eta) & \Phi_x^v(\xi, \eta) & \Phi_y^v(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

и выполним линеаризацию, учитывая, что перемещения обжатия нормали постоянны:

$$w^{(l)*}(\xi, \eta) = \mathbf{B}_w \mathbf{q}_s^* + u_z^*(\xi, \eta, z_l), \quad \Delta w^{(l)}(\xi, \eta) = \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.49)$$

Производные от переносного перемещения слоя по координатам (x, y) могут быть вычислены следующим образом:

$$\nabla w^{(l)}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} \\ \frac{\partial w^{(l)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \mathbf{B}_w \mathbf{q}_s + \nabla u_z^*(\xi, \eta, z_l), \quad (3.50)$$

где обозначено:

$$\nabla \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi^v(\xi, \eta)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_x^v(\xi, \eta)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_y^v(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi^v(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_x^v(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_y^v(\xi, \eta)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Производные по координатам (α, β) получим, умножив (3.50) слева на матрицу поворота:

$$\nabla_{(\alpha\beta)} w^{(l)}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w^{(l)}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial w^{(l)}}{\partial \beta} \end{pmatrix} = P_{(\alpha\beta)} \nabla \mathbf{B}_w \mathbf{q}_s + P_{(\alpha\beta)} \nabla u_z^*(\xi, \eta, z_l), \quad (3.51)$$

$$P_{(\alpha\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим переносные деформации срединной поверхности слоя в отсчётной конфигурации:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta_s}^{(l)*} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha}^* \\ \varepsilon_{\beta}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w^{(l)}}{\partial \alpha}\right)^2} - 1 \\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w^{(l)}}{\partial \beta}\right)^2} - 1 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Приращения переносных деформаций срединной поверхности слоя определим по формуле (2.83), заменяя в ней вариации на приращения:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{(l)} = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{\alpha_s}^{(l)} \\ \Delta \varepsilon_{\beta_s}^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\varepsilon}^{(l)} \mathbf{L}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_g(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.53)$$

Интерполяция относительных перемещений и деформаций.

Относительное движение будем рассматривать в рамках теории плосконапряженного состояния [80]. Согласно этому подходу перемещения вдоль одной из осей (нормали) отсутствуют, а компоненты перемещения зависят только от двух координат, в нашем случае от α и β . Каждое семейство нитей находится в одноосном напряжённом состоянии.

Базисные функции для относительного перемещения будем получать на основе мембранного четырехугольного конечного элемента, совпадающего по форме с рассмотренным конечным элементом для переносного движения. Всего для каждого узла будет по две степени свободы: перемещения вдоль нити основы u_α и вдоль нити утка u_β . Таким образом, на конечный элемент будет приходиться по восемь узловых неизвестных.

Функции формы для четырех узлов конечного элемента имеют следующий вид [38]:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Относительные перемещения линейно выражаются через компоненты вектора \mathbf{q}_r :

$$\begin{pmatrix} u_{r\alpha}(\xi, \eta) \\ u_{r\beta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = [\mathbf{N}_1(\xi, \eta) \mid \mathbf{N}_2(\xi, \eta) \mid \mathbf{N}_3(\xi, \eta) \mid \mathbf{N}_4(\xi, \eta)] \mathbf{q}_r, \tag{3.55}$$

$$\text{где } \mathbf{N}_v(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_v(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_v(\xi, \eta) \end{bmatrix}.$$

Относительные деформации нитей в соответствии с формулой (2.42) зависят от относительных перемещений линейно:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(l)} = \mathbf{B}_r^{(l)}(\xi, \eta) \mathbf{q}_r^{(l)}, \quad \mathbf{B}_{r_v}^{(l)}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_v(\xi, \eta)}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_v(\xi, \eta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Деформация нитей в слое ткани согласно (2.42) складывается из деформации слоя в переносном движении и деформации в относительном движении (3.52) и (3.53), причём от степеней свободы относительного движения они зависят линейно. Таким образом, окончательно деформации нитей могут быть записаны в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(l)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta_s}^{(l)*} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta_r}^{(l)*} + \mathbf{B}_r(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_r^{(l)} + \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \mathbf{L}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_g(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.57)$$

Интерполяция скоростей и виртуальной работы сил инерции. В общем случае интерполяция скоростей может быть получена из интерполяции перемещений путём замены узловых перемещений на узловые скорости. Выражение для кинетической энергии может быть получено интегрированием произведения плотности на квадрат абсолютной скорости, однако получаемые при этом матричные коэффициенты системы уравнений движения оказываются несимметричными. Поэтому представляется целесообразным использовать «несогласованные» матрицы масс, получение которых основывается на сосредоточении масс в узлах элементов. При таком подходе кинетическая энергия рассчитывается в каждом узле, а кинетическая энергия всей механической системы получается как сумма по узлам модели.

Примем для многослойного элемента следующие представления.

В движении участвуют два семейства нитей каждого слоя. Их относительные скорости выражаются интерполяцией узловых скоростей: скорость нитей основы зависит только от узловых переменных $q_{\alpha_v}^{(l)}$, а скорость нитей утка – только от узловых переменных $q_{\beta_v}^{(l)}$.

Кроме нитей, в движении участвуют присоединённые массы (например, масса ударника), скорости которых зависят только от степеней свободы переносного движения.

Для каждого слоя с известной поверхностной плотностью ρ_s известна также поверхностная плотность нитей основы $\rho_{\alpha s}$ и утка $\rho_{\beta s}$, составляющие в сумме поверхностную плотность ткани: $\rho_s = \rho_{\alpha s} + \rho_{\beta s}$. Тогда масса основы, сосредоточенная в каждом узле элемента, для слоя составит $m_\alpha = \frac{S^{(e)}}{k_n} \cdot \rho_{\alpha s}$, где $S^{(e)}$ - площадь элемента в плане, k_n - число узлов (в нашем случае $k_n=4$), масса утка $m_\beta = \frac{S^{(e)}}{k_n} \cdot \rho_{\beta s}$, суммарная масса слоя $m = \frac{S^{(e)}}{k_n} \cdot \rho_s = m_\alpha + m_\beta$.

Кинетическая энергия основы (точнее, её массы, сосредоточенной в узле) будет равна:

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha (V_s^2 + V_{r\alpha}^2 + 2V_s V_{r\alpha} \cos(z, \alpha)), \quad (3.58)$$

а кинетическая энергия утка

$$T_\beta = \frac{1}{2} m_\beta (V_s^2 + V_{r\beta}^2 + 2V_s V_{r\beta} \cos(z, \beta)). \quad (3.59)$$

Суммарная кинетическая энергия слоя для узла элемента складывается из кинетической энергии каждого семейства нитей.

Скорость нити одного семейства зависит от четырёх степеней свободы: переносное перемещение вдоль оси z , два угла поворота геометрической нормали и перемещение нити вдоль соответствующей координатной линии, например, основы – вдоль оси α . С учётом этого преобразуем выражение для кинетической энергии нити семейства α . Подставив в (3.58) вместо скоростей производные обобщённых перемещений, для узла элемента получим:

$$2T = m_\alpha (\dot{q}_z^2 + \dot{q}_\alpha^2 + 2\dot{q}_z \dot{q}_\alpha \cdot \cos(\alpha, z)). \quad (3.60)$$

Выразим $\cos(\alpha, z)$:

$$\cos(\alpha, z) = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi \right)^2}} = \frac{-\vartheta_y \cos \varphi + \vartheta_x \sin \varphi}{\sqrt{1 + (-\vartheta_y \cos \varphi + \vartheta_x \sin \varphi)^2}}. \quad (3.61)$$

Выражение в числителе – производная от прогиба по координате α . Введём обозначение:

$$\vartheta_\beta = \vartheta_y \cos \varphi - \vartheta_x \sin \varphi. \quad (3.62)$$

Тогда выражение для косинуса угла между α и z запишется в виде зависимости от угла поворота нормали:

$$\cos(\alpha, z) = \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}}. \quad (3.63)$$

С учетом (3.63) выражение для кинетической энергии поступательного движения (3.58) будет записано в виде:

$$2T_\alpha = m_\alpha \left(\dot{q}_z^2 + \dot{q}_\alpha^2 + 2\dot{q}_z \dot{q}_\alpha \cdot \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} \right). \quad (3.64)$$

Найдем слагаемые системы уравнений Лагранжа 2-рода (2.106):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_z} \right) &= \frac{d}{dt} m_\alpha \left(\dot{q}_z + \dot{q}_\alpha \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} \right) = m_\alpha \left(\ddot{q}_z + \ddot{q}_\alpha \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} + \dot{q}_\alpha \dot{\vartheta}_\beta \frac{-1}{(1 + \vartheta_\beta^2)^{3/2}} \right) = \\ &= m_\alpha \left(\ddot{q}_z + \ddot{q}_\alpha \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} + \dot{q}_\alpha (-\dot{\vartheta}_y \cos \varphi + \dot{\vartheta}_x \sin \varphi) \frac{1}{(1 + \vartheta_\beta^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) &= \frac{d}{dt} m_\alpha \left(\dot{q}_\alpha + \dot{q}_z \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} \right) = m_\alpha \left(\ddot{q}_\alpha + \ddot{q}_z \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} + \dot{q}_z \dot{\vartheta}_\beta \frac{-1}{(1 + \vartheta_\beta^2)^{3/2}} \right) = \\ &= m_\alpha \left(\ddot{q}_\alpha + \ddot{q}_z \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} + \dot{q}_z (-\dot{\vartheta}_y \cos \varphi + \dot{\vartheta}_x \sin \varphi) \frac{1}{(1 + \vartheta_\beta^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta_x} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta_\beta} (-\sin \varphi) = m_\alpha \dot{q}_z \dot{q}_\alpha \frac{-1}{(1 + \vartheta_\beta)^{3/2}} (-\sin \varphi), \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta_y} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta_\beta} \cos \varphi = m_\alpha \dot{q}_z \dot{q}_\alpha \frac{-1}{(1 + \vartheta_\beta)^{3/2}} \cos \varphi. \quad (3.68)$$

Запишем уравнения (3.65)-(3.68) в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_\alpha}{\partial q} = m_\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\vartheta_\beta}{\sqrt{1 + \vartheta_\beta^2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_z \\ \ddot{\vartheta}_x \\ \ddot{\vartheta}_y \\ \ddot{q}_\alpha \end{pmatrix} + \frac{m_\alpha}{(1 + \vartheta_\beta^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\vartheta}_x \sin \varphi - \dot{\vartheta}_y \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{q}_z \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & \dot{q}_z \cos \varphi \\ \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_x \sin \varphi - \dot{\vartheta}_y \cos \varphi) & \frac{1}{2} \dot{q}_z \sin \varphi & -\frac{1}{2} \dot{q}_z \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{\vartheta}_x \\ \dot{\vartheta}_y \\ \dot{q}_\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Аналогично выпишем левую часть уравнения Лагранжа для семейства β (утка):

$$2T_\beta = m_\beta (\dot{q}_z^2 + \dot{q}_\beta^2 + 2\dot{q}_z \dot{q}_\beta \cdot \cos(\beta, z)), \quad (3.70)$$

$$\cos(\beta, z) = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi}{\sqrt{1 + \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi \right)^2}} = \frac{\vartheta_y \sin \varphi + \vartheta_x \cos \varphi}{\sqrt{1 + (\vartheta_y \sin \varphi + \vartheta_x \cos \varphi)^2}}; \quad (3.71)$$

введём обозначение:

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_y \sin \varphi + \vartheta_x \cos \varphi, \quad (3.72)$$

тогда

$$\cos(\beta, z) = \frac{\vartheta_\alpha}{\sqrt{1 + \vartheta_\alpha^2}}, \quad (3.73)$$

кинетическая энергия:

$$2T_{\beta} = m_{\beta} \left(\dot{q}_z^2 + \dot{q}_{\beta}^2 + 2\dot{q}_z \dot{q}_{\beta} \cdot \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} \right). \quad (3.74)$$

Слагаемые системы уравнений Лагранжа 2-го рода для семейства нитей β ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_z} \right) &= \frac{d}{dt} m_{\beta} \left(\dot{q}_z + \dot{q}_{\beta} \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} \right) = m_{\beta} \left(\ddot{q}_z + \ddot{q}_{\beta} \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} + \dot{q}_{\beta} \dot{\vartheta}_{\alpha} \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \right) = \\ &= m_{\beta} \left(\ddot{q}_z + \ddot{q}_{\beta} \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} + \dot{q}_{\beta} (\dot{\vartheta}_y \sin \varphi + \dot{\vartheta}_x \cos \varphi) \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\beta}} \right) &= \frac{d}{dt} m_{\beta} \left(\dot{q}_{\beta} + \dot{q}_z \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} \right) = m_{\beta} \left(\ddot{q}_{\beta} + \ddot{q}_z \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} + \dot{q}_z \dot{\vartheta}_{\alpha} \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \right) = \\ &= m_{\beta} \left(\ddot{q}_{\beta} + \ddot{q}_z \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} + \dot{q}_z (\dot{\vartheta}_y \sin \varphi + \dot{\vartheta}_x \cos \varphi) \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial T_{\beta}}{\partial \vartheta_x} = \frac{\partial T_{\beta}}{\partial \vartheta_{\alpha}} \cos \varphi = m_{\beta} \dot{q}_z \dot{q}_{\beta} \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \cos \varphi, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta_y} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta_{\alpha}} \sin \varphi = m_{\alpha} \dot{q}_z \dot{q}_{\beta} \frac{1}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \sin \varphi; \quad (3.78)$$

левая часть уравнения Лагранжа в матричном виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\beta}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_{\beta}}{\partial q} &= m_{\beta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_z \\ \ddot{\vartheta}_x \\ \ddot{\vartheta}_y \\ \ddot{q}_{\beta} \end{pmatrix} + \frac{m_{\beta}}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\vartheta}_y \sin \varphi + \dot{\vartheta}_x \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{q}_z \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{q}_z \sin \varphi \\ \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_y \sin \varphi + \dot{\vartheta}_x \cos \varphi) & \frac{1}{2} \dot{q}_z \cos \varphi & \frac{1}{2} \dot{q}_z \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{\vartheta}_x \\ \dot{\vartheta}_y \\ \dot{q}_{\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Собирая уравнения (3.69) и (3.79), в целом для поступательного движения слоя получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -m_{\alpha 1} & m_{\beta 1} \\ 0 & m_{\vartheta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\vartheta} & 0 & 0 \\ -m_{\alpha 1} & 0 & 0 & m_{\alpha} & 0 \\ m_{\beta 1} & 0 & 0 & 0 & m_{\beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_z \\ \ddot{\vartheta}_x \\ \ddot{\vartheta}_y \\ \ddot{q}_{\alpha} \\ \ddot{q}_{\beta} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{\alpha 1} & c_{\beta 1} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{\alpha 2} & -c_{\beta 2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{\alpha 3} & -c_{\beta 3} \\ -\frac{c_{\alpha 1}}{2} & \frac{c_{\alpha 2}}{2} & -\frac{c_{\alpha 3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{c_{\beta 1}}{2} & \frac{c_{\beta 2}}{2} & \frac{c_{\beta 3}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{\vartheta}_x \\ \dot{\vartheta}_y \\ \dot{q}_{\alpha} \\ \dot{q}_{\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_m\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} m_{\alpha 1} &= \frac{m_{\alpha} \vartheta_{\beta}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\beta}^2}}, \quad m_{\beta 1} = \frac{m_{\beta} \vartheta_{\alpha}}{\sqrt{1 + \vartheta_{\alpha}^2}}, \\ c_{\alpha 1} &= \frac{m_{\alpha} \dot{\vartheta}_{\beta}}{(1 + \vartheta_{\beta}^2)^{3/2}}, \quad c_{\beta 1} = \frac{m_{\beta} \dot{\vartheta}_{\alpha}}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}}, \quad c_{\alpha 2} = \frac{m_{\alpha} \dot{q}_z \sin \varphi}{(1 + \vartheta_{\beta}^2)^{3/2}}, \\ c_{\beta 2} &= \frac{m_{\beta} \dot{q}_z \cos \varphi}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}}, \quad c_{\alpha 3} = \frac{m_{\alpha} \dot{q}_z \cos \varphi}{(1 + \vartheta_{\beta}^2)^{3/2}}, \quad c_{\beta 3} = \frac{m_{\beta} \dot{q}_z \sin \varphi}{(1 + \vartheta_{\alpha}^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

На диагонали первой матрицы находятся ненулевые коэффициенты, которые выше не описаны. Они добавлены во избежание вырожденности уравнения Лагранжа. Для их получения учтём дополнительно кинетическую энергию вращательного движения каждого слоя. Угловые скорости материальной нормали в пределах слоя равны угловым скоростям геометрической нормали; выразим их через обобщённые перемещения:

$$\omega_x = \frac{\dot{\vartheta}_x}{1 + \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}, \quad \omega_y = \frac{\dot{\vartheta}_y}{1 + \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}. \quad (3.81)$$

Кинетическая энергия нормального элемента определяется как половина произведения момента инерции на квадрат угловой скорости:

$$T_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} J (\omega_x^2 + \omega_y^2), \quad (3.82)$$

откуда получаем диагональные элементы матрицы при ускорениях m_g :

$$m_g = \frac{J}{(1 + \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2)^2} = \frac{mh^2}{12(1 + \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2)^2}. \quad (3.83)$$

Структура левой части уравнения Лагранжа для многослойного элемента будет аналогична приведенной выше формуле (3.80), однако матрицы имеют большие размеры: каждый слой добавляет две степени свободы – переменные $q_\alpha^{(l)}$ и $q_\beta^{(l)}$. Соответственно в матрицы добавляется по два столбца и две строки. Блок из первых трёх строк и первых трёх столбцов будет содержать суммарные массы и моменты инерции всех слоёв, ненулевые элементы остальных строк и столбцов находятся либо на диагонали, либо в первых трёх строках, либо в первых трёх столбцах.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_l m^{(l)} & 0 & 0 & -m_{\alpha 1}^{(1)} & m_{\beta 1}^{(1)} & \dots & -m_{\alpha 1}^{(l)} & m_{\beta 1}^{(l)} \\ 0 & \sum_l m_g^{(l)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_l m_g^{(l)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -m_{\alpha 1}^{(1)} & 0 & 0 & m_{\alpha}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{\beta 1}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & m_{\beta}^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{\alpha 1}^{(l)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{\alpha}^{(l)} & 0 \\ m_{\beta 1}^{(l)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{\beta}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_z \\ \ddot{\vartheta}_x \\ \ddot{\vartheta}_y \\ \ddot{q}_\alpha^{(1)} \\ \ddot{q}_\beta^{(1)} \\ \dots \\ \ddot{q}_\alpha^{(l)} \\ \ddot{q}_\beta^{(l)} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{\alpha 1}^{(1)} & c_{\beta 1}^{(1)} & \dots & -c_{\alpha 1}^{(l)} & c_{\beta 1}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{\alpha 2}^{(1)} & -c_{\beta 2}^{(1)} & \dots & -c_{\alpha 2}^{(l)} & -c_{\beta 2}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & c_{\alpha 3}^{(1)} & -c_{\beta 3}^{(1)} & \dots & c_{\alpha 3}^{(l)} & -c_{\beta 3}^{(l)} \\ -\frac{c_{\alpha 1}^{(1)}}{2} & \frac{c_{\alpha 2}^{(1)}}{2} & -\frac{c_{\alpha 3}^{(1)}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c_{\beta 1}^{(1)}}{2} & \frac{c_{\beta 2}^{(1)}}{2} & \frac{c_{\beta 3}^{(1)}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{c_{\alpha 1}^{(l)}}{2} & \frac{c_{\alpha 2}^{(l)}}{2} & -\frac{c_{\alpha 3}^{(l)}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c_{\beta 1}^{(l)}}{2} & \frac{c_{\beta 2}^{(l)}}{2} & \frac{c_{\beta 3}^{(l)}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{\vartheta}_x \\ \dot{\vartheta}_y \\ \dot{q}_\alpha^{(1)} \\ \dot{q}_\beta^{(1)} \\ \dots \\ \dot{q}_\alpha^{(l)} \\ \dot{q}_\beta^{(l)} \end{pmatrix} = \\
& = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_m\dot{\mathbf{q}}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Аппроксимация работы напряжений в нитях. Деформации нитей зависят от переносных и относительных перемещений согласно равенствам (3.57). Напряжения в нитях зависят от текущих деформаций в соответствии с (2.47) и (2.54). В начале временного шага значения напряжений определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^*(\xi, \eta) \\ \sigma_\beta^*(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha 0}^*(\xi, \eta) + E_\alpha^* \cdot (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha 0}) \\ \sigma_{\beta 0}^*(\xi, \eta) + E_\beta^* \cdot (\varepsilon_\beta - \varepsilon_{\beta 0}) \end{pmatrix}, \tag{3.85}$$

где модули упругости, начальные напряжения и начальные деформации находятся в соответствии с определяющими уравнениями. Это позволяет далее построить аппроксимацию работы напряжений единым образом для всех стадий деформирования – активного нагружения, разгрузки, сжатия и состояния разрушения. Формально можно записать приращения напряжений в виде линейной зависимости от неопределённых приращений деформаций на временном шаге:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) = \mathbf{C}_r^{(l)} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_\alpha \\ \Delta\varepsilon_\beta \end{pmatrix}, \tag{3.86}$$

где приращения деформаций представляют собой линейную часть (3.57).

Обозначим матрицу, содержащую модули упругости в начале шага, через \mathbf{D}_r .

Тогда

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) = \boldsymbol{\sigma}^*(\xi, \eta) + \mathbf{D}_r \left(\mathbf{B}_r(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_r^{(l)} + \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \mathbf{L}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_g(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s \right). \quad (3.87)$$

Равенство (3.87) определяет напряжения на срединной поверхности слоя. В соответствии с (2.89) получаем аппроксимацию погонных сил в многослойном пакете:

$$\begin{pmatrix} N_x(\xi, \eta) \\ N_y(\xi, \eta) \\ N_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} h^{(l)} \boldsymbol{\sigma}^{*(l)} + \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{B}_r(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_r^{(l)} + \left(\sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \right) \mathbf{L}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_g(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.88)$$

Аппроксимация погонных моментов в соответствии с (2.90):

$$\begin{pmatrix} M_x(\xi, \eta) \\ M_y(\xi, \eta) \\ M_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{m}^{*(l)} + \left(\sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{D}_r^{(l)} \mathbf{k}^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \right) \mathbf{K}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_{\partial g}(\xi, \eta) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.89)$$

Вариация работы напряжений (на единицу площади) будет определяться как сумма работ на вариациях переносных и относительных перемещений (2.85).

С учётом (3.87) – (3.89), интегрируя по площади элемента, получаем:

$$\begin{aligned} \delta A = \delta \mathbf{q}_s^T \left(\mathbf{N}_s^* + \mathbf{M}_s^* + \left(\mathbf{K}_{ss}^{(N)} + \mathbf{K}_{ss}^{(M)} \right) \Delta \mathbf{q}_s + \sum_l \mathbf{K}_{sr}^{(l)} \Delta \mathbf{q}_r^{(l)} \right) + \\ + \sum_l \delta \mathbf{q}_r^{(l)T} \mathbf{K}_{rs}^{(l)} \Delta \mathbf{q}_s + \sum_l \delta \mathbf{q}_r^{(l)T} \mathbf{K}_{rr}^{(l)} \Delta \mathbf{q}_r, \end{aligned} \quad (3.90)$$

где $\mathbf{N}_s^* = \int_S \mathbf{B}_g^T \mathbf{L}^{*T} \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} h^{(l)} \boldsymbol{\sigma}^{*(l)} dx dy,$

$$\mathbf{M}_s^* = \int_S \mathbf{B}_{\partial g}(\xi, \eta)^T \mathbf{K}^*(\xi, \eta)^T \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{m}^{*(l)} dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{ss}^{(N)} = \int_S \mathbf{B}_g^T \mathbf{L}^{*T} \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \mathbf{L}^* \mathbf{B}_g dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{sr}^{(l)} = \int_S \mathbf{B}_g^T \mathbf{L}^{*T} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{B}_r^{(l)} dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{rs}^{(l)} = \int_S \mathbf{B}_r^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \mathbf{L}^* \mathbf{B}_g dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{rr}^{(l)} = \int_S \mathbf{B}_r^{(l)T} \mathbf{C}_r^{(l)} \mathbf{B}_r^{(l)} dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{ss}^{(M)} = \int_S \mathbf{B}_{\partial g}(\xi, \eta)^T \mathbf{K}^*(\xi, \eta)^T \mathbf{D}_\Sigma \mathbf{K}^*(\xi, \eta) \mathbf{B}_{\partial g}(\xi, \eta) dx dy,$$

$$\mathbf{D}_\Sigma = \sum_l \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)T} \mathbf{k}^{(l)T} \mathbf{D}_r^{(l)} \mathbf{k}^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)},$$

$$\mathbf{m}^{*(l)} = \mathbf{D}_r^{(l)} \mathbf{k}^{(l)} \mathbf{P}_\varepsilon^{(l)} \bar{\mathbf{k}}_s^*.$$

Равенство (3.90) содержит две части: линейную относительно вариаций обобщённых перемещений и квадратичную.

Аппроксимация работы сил трения. Вариация работы сил трения на перемещениях проскальзывания нитей определяется равенствами (2.60), (2.61). Напряжения, обусловленные трением нитей, в слое l , выразим в матричном виде:

$$\boldsymbol{\tau}^{(l)} = \begin{bmatrix} \eta_{вязк\alpha} & 0 \\ 0 & \eta_{вязк\beta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_r \Delta \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (3.91)$$

где матрица интерполяции \mathbf{N}_r определяется в соответствии с (3.55), а вместо вектора относительных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_r$ записан равный ему вектор скоростей приращений относительных перемещений $\Delta \dot{\mathbf{q}}_r$ (не приращение скорости).

Тогда работа напряжений сил трения на относительных перемещениях для слоя l согласно (2.60) может быть представлена в виде:

$$\delta A_\tau^{(l)} = \delta \mathbf{q}_r^{(l)T} \int_S \mathbf{N}_r^T \begin{bmatrix} \eta_{вязк\alpha} & 0 \\ 0 & \eta_{вязк\beta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_r dx dy \Delta \dot{\mathbf{q}}_r^{(l)}. \quad (3.92)$$

Суммируя по слоям, получим аппроксимацию уравнения (2.102):

$$\delta A_{тр.нитей} = \delta \mathbf{q}_r^T \mathbf{C}_{тр} \Delta \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (3.93)$$

где $\mathbf{C}_{тр}$ – блочно-диагональная матрица вязкости:

$$\mathbf{C}_{тр} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}^{(2)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}^{(3)} & & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & & \mathbf{C}^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{тр}^{(l)} = \int_S \mathbf{N}_r^T \begin{bmatrix} \eta_{вязк\alpha} & 0 \\ 0 & \eta_{вязк\beta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_r dx dy.$$

Интерполяция работы сил трения на относительных перемещениях слоёв. Взаимные перемещения слоёв (3.46) зависят только от переносных перемещений. Касательные напряжения (силы трения) между слоями, согласно (2.62), пропорциональны скоростям проскальзывания. Тогда вариация работы этих напряжений на переносных перемещениях (2.103) может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\delta A_{тр.слоев} = \delta \mathbf{q}_s^T \sum_l \int_S \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} f \cdot h^{(l)} & 0 \\ 0 & f \cdot h^{(l)} \end{bmatrix} \mathbf{N} dx dy \Delta \dot{\mathbf{q}}_s. \quad (3.94)$$

Окончательно, в матричном виде:

$$\delta A = \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{C}_{сдв} \Delta \dot{\mathbf{q}}_s, \quad (3.95)$$

где $\mathbf{C}_{сдв}$ – матрица вязкости сдвига слоёв:

$$\mathbf{C}_{сдв} = \sum_l \int_S \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} f \cdot h^{(l)} & 0 \\ 0 & f \cdot h^{(l)} \end{bmatrix} \mathbf{N} dx dy.$$

Аппроксимация работы реакции основания. Согласно (2.104), вариация работы реакции основания может быть найдена интегрированием по площади произведения напряжений в вязком основании на нормальную составляющую прогиба. Используем аппроксимацию прогиба в виде (3.48); косинус угла между нормалью и осью z в начале временного шага найдём из (2.24):

$\cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta_x^{*2} + \vartheta_y^{*2}}}$. Тогда (2.104) будет аппроксимировано следующим

равенством:

$$\delta A_{осн} = \delta q_S^T \left(\int_S \frac{\eta_{осн}}{\sqrt{1 + \vartheta_x^{*2} + \vartheta_y^{*2}}} \mathbf{B}_w^T \mathbf{B}_w dx dy \right) \Delta \dot{q}_S. \quad (3.96)$$

Обозначим матрицу в скобках через $\mathbf{C}_{вязк.осн}$, получим:

$$\delta A_{осн} = \delta \mathbf{q}_S^T \mathbf{C}_{вязк.осн} \Delta \dot{\mathbf{q}}_S, \quad (3.97)$$

где $\mathbf{C}_{вязк.осн}$ – матрица вязкости основания.

Отметим, что в п. 3.3 всюду рассматривались локальные аппроксимации на одном конечном элементе. Каждая локальная матрица является отдельным функциональным объектом. Матрицы жёсткости и вязкости вычисляются численным интегрированием. Интегрируемые выражения, зависящие от координат, являются явными аргументами таких матриц. Координаты квадратурной точки передаются в интегрируемое выражение в качестве неявного аргумента.

3.4 Расщепление уравнений движения по процессам переносного и относительного движения

Глобальные матрицы и блочное представление уравнений. Все полученные выше матрицы масс, вязкости и жесткости являются локальными и определены для одного конечного элемента. Глобальные матрицы коэффициентов уравнения движения формируются по известному алгоритму сборки (например, [38]). Эту операцию отдельно рассматривать нецелесообразно, поскольку она хорошо известна.

Будем считать, что глобальные матрицы масс, вязкости и жесткости известны (или могут быть сформированы из локальных матриц элементов). Для

удобства пронумеруем степени свободы так, чтобы получить блочный вид глобальных матриц: вначале все переносные степени свободы, затем относительные степени свободы первого слоя, затем относительные перемещения второго слоя и т.д., т.е. глобальный вектор обобщённых перемещений примет блочный вид:

$$\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}_s^T \quad \mathbf{q}_r^T) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_s^T & \mathbf{q}_r^{(1)T} & \mathbf{q}_r^{(2)T} & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

В том же порядке пронумеруем уравнения движения Лагранжа: вначале – производные по переносным степеням свободы, затем – по относительным первого слоя и т.д.

Тогда каждая глобальная матрица также примет блочную форму:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{ss} & \mathbf{X}_{sr} \\ \mathbf{X}_{rs} & \mathbf{X}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{ss} & \mathbf{X}_{sr}^{(1)} & \mathbf{X}_{sr}^{(2)} & \dots \\ \mathbf{X}_{rs}^{(1)} & \mathbf{X}_{rr}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_{rs}^{(2)} & 0 & \mathbf{X}_{rr}^{(2)} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \mathbf{X}_{rr}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Структура типовой глобальной матрицы оказывается блочно-диагональной с окаймлением. Это вызвано тем, что относительные перемещения разных слоёв не входят в одну и ту же производную по относительной степени свободы (в уравнение движения, номер которого соответствует относительному перемещению).

С учётом этого, система уравнений движения примет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sr} \\ \mathbf{C}_{rs} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sr} \\ \mathbf{K}_{rs} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q}_s \\ \Delta \mathbf{q}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_s \\ -\mathbf{R}_r \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

причём блоки с индексами rr являются блочно-диагональными матрицами.

Проанализируем зависимость различных блоков глобальных матриц от переменных величин.

Блоки матрицы масс (3.82) зависят от переносных перемещений:

$$\mathbf{M}_{ss} = \mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s), \quad \mathbf{M}_{sr} = \mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s), \quad \mathbf{M}_{rs} = \mathbf{M}_{rs}(\mathbf{q}_s), \quad \mathbf{M}_{rr} = const.$$

Матрица вязкости складывается из четырёх слагаемых, обусловленных работой сил инерции (3.82), сил трения нитей (3.93), сил трения слоёв (3.94) и вязкостью основания (3.96). Различные блоки зависят от разных переменных:

$$\mathbf{C}_{ss} = \mathbf{C}_{c\partial\theta} + \mathbf{C}_{\text{вязк.осн}} = \text{const}, \quad \mathbf{C}_{sr} = \mathbf{C}_{sr}^M(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s), \quad \mathbf{C}_{rs} = \mathbf{C}_{rs}^M(q_s, \dot{q}_s),$$

$$\mathbf{C}_{rr} = \mathbf{C}_{\text{тр}} = \text{const}.$$

Матрица жесткости \mathbf{K} и вектор обобщённых сил \mathbf{R} входят только в выражение работы растягивающих напряжений в нитях (3.90): $\mathbf{K}_{ss} = \mathbf{K}_{ss}(\mathbf{q}_s)$, $\mathbf{K}_{rs} = \mathbf{K}_{rs}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r)$, $\mathbf{K}_{sr} = \mathbf{K}_{sr}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r)$, $\mathbf{K}_{rr} = \mathbf{K}_{rr}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r)$, $\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r)$, $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_r(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_r)$.

Построим неявную разностную схему по времени, для аппроксимации первой и второй производной перемещений по времени будем использовать конечные разности:

$$\ddot{\mathbf{q}}^t = \frac{\dot{\mathbf{q}}^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}^t}{\tau}, \quad \mathbf{q}^{t+1} = \mathbf{q}^t + \tau \dot{\mathbf{q}}^{t+1}. \quad (3.101)$$

Для сокращения объёма вычислений будем строить схему расщепления по процессам переносного и относительного движения (эйлеров этап и лагранжев этап). На первом этапе неизвестными являются переносные скорости и перемещения в конце шага по времени \mathbf{q}_s , а на втором – относительные скорости и перемещения \mathbf{q}_r .

Подставим выражения (3.101) в (3.100) отдельно для каждого блока неизвестных. Для эйлерова этапа получаем:

$$\mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \frac{\dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}_s^t}{\tau} + \mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s^t) \frac{\dot{\mathbf{q}}_r^t - \dot{\mathbf{q}}_r^{t-1}}{\tau} + \mathbf{C}_{ss} \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} + \mathbf{C}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \dot{\mathbf{q}}_s^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_r^t +$$

$$+ \mathbf{K}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \cdot \tau \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} + \mathbf{K}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t) \cdot \tau \dot{\mathbf{q}}_r^t = -\mathbf{R}_s(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t). \quad (3.102)$$

Неизвестен здесь вектор $\dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}$. Сгруппируем все слагаемые, содержащие $\dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}$, в левой части и перенесём остальные в правую часть; получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) + \tau \mathbf{C}_{ss} + \tau^2 \mathbf{K}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \right] \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} = \mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \dot{\mathbf{q}}_s^t + \mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s^t) (\dot{\mathbf{q}}_r^{t-1} - \dot{\mathbf{q}}_r^t) - \\ - \tau \mathbf{C}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \dot{\mathbf{q}}_s^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_r^t - \tau^2 \mathbf{K}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t) \dot{\mathbf{q}}_r^t - \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t). \end{aligned} \quad (3.103)$$

После её решения определим $\mathbf{q}_s^{t+1} = \mathbf{q}_s^t + \tau \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}$.

Для лагранжева этапа:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{rs}(q_s^{t+1}) \frac{\dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}_s^t}{\tau} + \mathbf{M}_{rr} \frac{\dot{\mathbf{q}}_r^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}_r^t}{\tau} + \mathbf{C}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} + \mathbf{C}_{rr} \cdot \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1} + \\ + \mathbf{K}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \cdot \tau \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} + \mathbf{K}_{rr}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1} \tau = -\mathbf{R}_r(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t). \end{aligned} \quad (3.104)$$

После группировки слагаемых с неизвестным $\dot{\mathbf{q}}_r^{t+1}$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M}_{rr} + \tau \mathbf{C}_{rr} + \tau^2 \mathbf{K}_{rr}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \right] \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1} = \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{q}}_r^t + \mathbf{M}_{rs}(q_s^{t+1}) (\dot{\mathbf{q}}_s^t - \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}) - \\ - \tau \mathbf{C}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \tau^2 \mathbf{K}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \mathbf{R}_r(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Решив эту систему, найдём $\mathbf{q}_r^{t+1} = \mathbf{q}_r^t + \tau \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1}$.

Заметим, что обе системы уравнений имеют симметричные матрицы коэффициентов. Поскольку матрицы масс положительно определены, а матрицы вязкости и жесткости по крайней мере полуположительно определены, матрицы систем (3.103) и (3.105) являются положительно определёнными, что гарантирует единственность их решения. Можно показать, что при «замороженных» коэффициентах разностная схема обладает абсолютной устойчивостью.

Оценка порядка сходимости по времени. Оценим порядок аппроксимации разностными выражениями (3.7) для уравнения движения на волновой стадии и выражений (3.101) для оболочечной стадии.

Пусть неизвестная u в выражении (3.6) – гладкая функция, тогда при малом шаге τ справедливы равенства:

$$u^{t+1} = u^t + \dot{u}^t \cdot \tau + \frac{\ddot{u}^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3), \quad \dot{u}^{t+1} = \dot{u}^t + \ddot{u}^t \cdot \tau + o(\tau^2). \quad (3.106)$$

Подставим эти разложения в качестве точного решения в разностное уравнение (3.8):

$$\begin{aligned}
m \frac{\dot{u}_i^t + \ddot{u}_i^t \cdot \tau + o(\tau^2) - \dot{u}_i^t}{\tau} &= S \cdot L + S(1 - A_i)E_i \frac{u_{i-1}^t + \dot{u}_{i-1}^t \tau + \frac{\ddot{u}_{i-1}^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3) + \tau \cdot \dot{u}_{i-1}^{t+1}}{h} - \\
- S(1 - A_i)E_i &\frac{u_i^t + \dot{u}_i^t \tau + \frac{\ddot{u}_i^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3) + \tau \cdot \dot{u}_i^{t+1}}{h} - \\
- S(1 - A_{i+1})E_{i+1} &\frac{u_i^t + \dot{u}_i^t \tau + \frac{\ddot{u}_{i-1}^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3) + \tau \cdot \dot{u}_i^{t+1}}{h} + \\
+ S(1 - A_{i+1})E_{i+1} &\frac{u_{i+1}^t + \dot{u}_{i+1}^t \tau + \frac{\ddot{u}_{i+1}^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3) + \tau \cdot \dot{u}_{i+1}^{t+1}}{h}, \tag{3.107}
\end{aligned}$$

здесь для множителя, не зависящего от неизвестной функции, введено обозначение: $L = [A_i \sigma_{cm} - A_{i+1} \sigma_{cm} - (1 - A_i)E_i \varepsilon_0 + (1 - A_{i+1})E_{i+1} \varepsilon_0]$.

После преобразований получим:

$$\begin{aligned}
m \ddot{u}_i^t &= S \cdot L + S(1 - A_i)E_i \frac{u_{i-1}^t}{h} + o(\tau) - S(1 - A_i)E_i \frac{u_i^t}{h} - S(1 - A_{i+1})E_{i+1} \frac{u_i^t}{h} + \\
+ S(1 - A_{i+1})E_{i+1} &\frac{u_{i+1}^t}{h} + o(\tau). \tag{3.108}
\end{aligned}$$

Таким образом, получен первый порядок аппроксимации относительно шага τ для разностного уравнения движения на волновой стадии соударения.

Аналогичные выкладки для оценки погрешности аппроксимации разностными выражениями (3.101) приведем и для уравнения движения на оболочечной стадии.

Пусть q – гладкая функция, тогда при малом шаге τ справедливы равенства:

$$q^{t+1} = q^t + \dot{q}^t \cdot \tau + \frac{\ddot{q}^t}{2} \tau^2 + o(\tau^3), \quad \dot{q}^{t+1} = \dot{q}^t + \ddot{q}^t \cdot \tau + o(\tau^2). \tag{3.109}$$

Ввиду того, что коэффициенты уравнения (3.102) зависят от неизвестной функции q и \dot{q} , то для них также справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
M_{ss}^{t+1} &= M_{ss}^t + \frac{\partial M_{ss}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \quad M_{sr}^{t+1} = M_{sr}^t + \frac{\partial M_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \\
C_{sr}^{t+1} &= C_{sr}^t + \frac{\partial C_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial C_{sr}}{\partial \dot{q}_s} \cdot \ddot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \quad K_{ss}^{t+1} = K_{ss}^t + \frac{\partial K_{ss}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \\
K_{sr}^{t+1} &= K_{sr}^t + \frac{\partial K_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial K_{sr}}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + 0(\tau^2), \\
R_s^{t+1} &= R_s^t + \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Подставим разложения (3.109) и (3.110) в качестве точного решения в первое из разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(M_{ss}^t + \frac{\partial M_{ss}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2) \right) \frac{\dot{q}_s^t + \ddot{q}_s^t \cdot \tau + o(\tau^2) - \dot{q}_s^t}{\tau} + \\
&+ \left(M_{sr}^t + \frac{\partial M_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2) \right) \frac{\dot{q}_r^t - (\dot{q}_r^t - \ddot{q}_r^t \cdot \tau + o(\tau^2))}{\tau} + \\
&+ C_{ss} (\dot{q}_s^t + \ddot{q}_s^t \cdot \tau + o(\tau^2)) + \left(C_{sr}^t + \frac{\partial C_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s^t \tau + \frac{\partial C_{sr}}{\partial \dot{q}_s} \cdot \ddot{q}_s^t \tau + 0(\tau^2) \right) \dot{q}_r^t + \\
&+ \left(K_{ss}^t + \frac{\partial K_{ss}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2) \right) \tau (\dot{q}_s^t + \ddot{q}_s^t \cdot \tau + o(\tau^2)) + \\
&+ \left(K_{sr}^t + \frac{\partial K_{sr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial K_{sr}}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + 0(\tau^2) \right) (\dot{q}_r^t \cdot \tau) = - \left(R_s^t + \frac{\partial R_s}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2) \right).
\end{aligned} \tag{3.111}$$

После преобразований получим:

$$M_{ss}^t \ddot{q}_s^t + M_{sr}^t \ddot{q}_r^t + C_{ss} \dot{q}_s^t + C_{sr}^t \dot{q}_r^t = -R_s^t + 0(\tau). \tag{3.112}$$

Учитывая, что в дифференциальное уравнение входит приращение перемещений (а не само перемещение), получаем, что невязка первой системы уравнений имеет первый порядок малости относительно τ .

Для второй системы уравнений выкладки аналогичны:

$$\begin{aligned}
M_{rs}^{t+1} &= M_{rs}^t + \frac{\partial M_{rs}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \quad C_{rs}^{t+1} = C_{rs}^t + \frac{\partial C_{rs}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial C_{rs}}{\partial \dot{q}_s} \cdot \ddot{q}_s \tau + 0(\tau^2), \\
K_{rs}^{t+1} &= K_{rs}^t + \frac{\partial K_{rs}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial K_{rs}}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + 0(\tau^2),
\end{aligned}$$

$$K_{rr}^{t+1} = K_{rr}^t + \frac{\partial K_{rr}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial K_{rr}}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + o(\tau^2), \quad (3.113)$$

$$R_r^{t+1} = R_r^t + \frac{\partial R_r}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial R_r}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + o(\tau^2).$$

Подставляя выражения (3.113) во вторую систему уравнений (3.104), получим:

$$\begin{aligned} & \left(M_{rs}^t + \frac{\partial M_{rs}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + o(\tau^2) \right) \frac{\dot{q}_s^t + \ddot{q}_s^t \cdot \tau + o(\tau^2) - \dot{q}_s^t}{\tau} + M_{rr} \frac{\dot{q}_r^t + \ddot{q}_r^t \cdot \tau + o(\tau^2) - \dot{q}_r^t}{\tau} + \\ & + \left(C_{rs}^t + \frac{\partial C_{rs}}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial C_{rs}}{\partial \dot{q}_s} \cdot \ddot{q}_s \tau + o(\tau^2) \right) \cdot \left(\dot{q}_s^t + \ddot{q}_s^t \cdot \tau + o(\tau^2) \right) + \\ & + C_{rr} \cdot \left(\dot{q}_r^t + \ddot{q}_r^t \cdot \tau + o(\tau^2) \right) + K_{rs}(q_s^{t+1}, q_r^t) \cdot \tau \dot{q}_s^{t+1} + K_{rr}(q_s^{t+1}, q_r^t) \cdot \dot{q}_r^{t+1} \tau = \\ & = - \left(R_r^t + \frac{\partial R_r}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s \tau + \frac{\partial R_r}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tau + o(\tau^2) \right). \end{aligned} \quad (3.114)$$

После преобразований (3.114) получили, невязка второй системы уравнений имеет первый порядок малости относительно τ :

$$M_{rs}^t \ddot{q}_s^t + M_{rr} \ddot{q}_r^t + C_{rs}^t \dot{q}_s^t + C_{rr} \dot{q}_r^t = -R_r^t + o(\tau). \quad (3.115)$$

Остаётся заметить, что гладкость решения нарушается в случае разрыва нитей, перехода от активного нагружения к разгрузке и от растяжения к сжатию. В двух последних случаях изменение обобщённой силы имеет порядок малости $o(\tau)$. В случае разрыва нитей обобщённая сила изменяется от предельного напряжения до нуля. Однако такие ситуации возникают лишь в изолированные моменты времени.

Таким образом, разностная схема расщепления для уравнений движения на оболочечной стадии имеет первый порядок аппроксимации по времени, за исключением конечного числа изолированных моментов времени.

3.5 Аппроксимация тепловыделения

Тепловые источники образуются вследствие двух причин: от накопления необратимой деформации, вызывающей поглощение механической энергии и её частичный переход в тепло, и от трения слоёв и нитей.

Вначале найдём плотность поглощённой механической энергии в элементе (в расчёте на единицу площади) вследствие трения нитей при проскальзывании.

Работа сил трения нитей определяется согласно подынтегральному выражению (3.92). Поглощение механической энергии при этом происходит в объёме слоя ткани. За время τ в точке, определяемой координатами (ξ, η) , поглощённая энергия на единицу площади с точностью до τ^2 будет равна:

$$\Delta A_{\tau}^{(l)}(\xi, \eta) = \tau \cdot \Delta \dot{\mathbf{q}}_r^{(l)T} \mathbf{N}_r^T \begin{bmatrix} \eta_{\text{вязк}\alpha} & 0 \\ 0 & \eta_{\text{вязк}\beta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_r \Delta \dot{\mathbf{q}}_r^{(l)}. \quad (3.116)$$

Найдём удельную поверхностную теплоёмкость слоя (на единицу площади) как произведение удельной теплоёмкости материала нитей на поверхностную плотность ткани:

$$c_{y\delta}^{(l)} = c_{\text{нити}} \cdot \rho_s. \quad (3.117)$$

Согласно (2.111), приращение адиабатической температуры слоя за время τ составит:

$$\Delta T_{ad}^{(l)}(\xi, \eta) = \frac{1}{c_{y\delta}^{(l)}} \Delta A_{\tau}^{(l)}(\xi, \eta). \quad (3.118)$$

Далее, найдём приращение работы сил трения слоёв за время τ . Согласно (3.94), имеем:

$$\Delta A_{\text{тр.слоев}}(\xi, \eta) = \tau \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^T \sum_l \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} f \cdot h^{(l)} & 0 \\ 0 & f \cdot h^{(l)} \end{bmatrix} \mathbf{N} \Delta \dot{\mathbf{q}}_s. \quad (3.119)$$

Поглощение энергии происходит на границах раздела всех слоёв. Следовательно, для определения адиабатической температуры необходимо

разделить полученную работу сил трения на удельную теплоёмкость всего пакета слоёв:

$$\Delta T_{ad}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sum_l c_{y\delta}^{(l)}} \Delta A_{тр.слоев}(\xi, \eta). \quad (3.120)$$

Наконец, найдём приращение работы напряжений на приращениях необратимой деформации. При активном нагружении, согласно (2.49), удельная работа напряжений на необратимых деформациях (на единицу объёма нити) равна разности работы, затрачиваемой при нагружении, и энергии, высвобождаемой при разгрузке. Дифференцируя (2.49) по времени и умножая на τ , получим приращение удельной работы за малый интервал времени τ :

$$\Delta A = \left(\sigma(\varepsilon) - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E_0} \cdot \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} \cdot \tau. \quad (3.121)$$

Учитывая, что напряжение равно произведению секущего модуля упругости (2.45) на деформацию, а производная от напряжения по деформации равна касательному модулю упругости (2.46), равенство (3.121) может быть преобразовано к виду:

$$\Delta A = E_{сек} \varepsilon \left(1 - \frac{E_{кас}}{E_0} \right) \dot{\varepsilon} \cdot \tau. \quad (3.122)$$

Просуммировав (3.122) для основы и утка, приведём удельную работу к единице поверхности с учётом объёмного содержания основы и утка в слое ткани ξ_α и ξ_β соответственно. Получаем:

$$\Delta A_{нов}^{(l)} = h^{(l)} \left[E_{сек\alpha} \xi_\alpha \varepsilon_\alpha \left(1 - \frac{E_{кас\alpha}}{E_{0\alpha}} \right) \dot{\varepsilon}_\alpha + E_{сек\beta} \xi_\beta \varepsilon_\beta \left(1 - \frac{E_{кас\beta}}{E_{0\beta}} \right) \dot{\varepsilon}_\beta \right] \cdot \tau, \quad (3.123)$$

откуда получим аппроксимацию (в матричном виде):

$$\Delta A_{нов} = q_r^{(l)T} B_r^{(l)T} \tilde{C}_r^{(l)} B_r^{(l)} \dot{q}_r^{(l)} \cdot \tau, \quad (3.124)$$

где обозначено:

$$\tilde{C}_r^{(l)} = h^{(l)} \begin{bmatrix} \xi_\alpha E_{сек\alpha} \left(1 - \frac{E_{кас\alpha}}{E_{0\alpha}} \right) & 0 \\ 0 & \xi_\beta E_{сек\beta} \left(1 - \frac{E_{кас\beta}}{E_{0\beta}} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

Модули упругости в (3.125) определяются при деформациях в начале временного шага.

Приращение адиабатической температуры на шаге определяется с учётом доли поглощённой энергии, переходящей в тепло согласно (2.111) (коэффициента теплового эффекта b). Разделив правую часть (3.123) на поверхностную теплоёмкость (3.117) и умножив на b , получим:

$$\Delta T_{ad}^{(l)}(\xi, \eta) = \frac{b\tau}{c_{y\partial}^{(l)}} q_r^{(l)T} B_r^{(l)T} \tilde{C}_r^{(l)} B_r^{(l)} \dot{q}_r^{(l)}. \quad (3.126)$$

Итоговое приращение адиабатической температуры за шаг времени определяется суммированием (3.118), (3.120) и (3.126).

Влияние процессов теплопроводности и теплоотдачи на температурное поле, в силу кратковременности соударения, незначительно; соответствующие оценки будут приведены в главе 4.

Выводы по главе 3

1. Полученные в главе 2 уравнения деформирования тканого многослойного образца при соударении с жестким воздействующим объектом и энергопоглощения на основе двухстадийной математической модели приведены к дискретным уравнениям движения системы с конечным числом степеней свободы.

2. Неявная разностная схема уравнений движения с уплотнением ткани на волновой стадии построена в одномерной постановке. В результате расчёта волновой стадии определяются перемещения, скорости и необратимые деформации в локальной зоне контакта многослойного тканого пакета с

поражающим элементом. Эти величины принимаются за начальные условия для последующего расчёта оболочечной стадии деформирования.

3. Задача расчета термомеханических процессов на оболочечной стадии деформирования рассматривается как решение уравнения движения многослойного пакета и одновременный расчёт тепловыделения и нагрева.

4. Дискретизация уравнений движения по координатам выполнена на основе метода конечных элементов. Разработан конечный элемент многослойного пакета ткани, в котором перемещения лицевой поверхности аппроксимируются эрмитовым сплайном, относительные движения нитей в слоях – лагранжевым сплайном, а общее число степеней свободы каждого узла равно трем переносным перемещениям поверхности приведения и по два относительных перемещения на каждый слой ткани. Матричные коэффициенты уравнения движения конечно-элементной модели получены из уравнения Лагранжа 2-го рода.

5. Для решения дискретизованных уравнений движения построена неявная разностная схема по времени. Использование в ней расщепления по процессам переносного движения всего пакета и относительного движения нитей вдоль искривленной поверхности слоя позволяет уменьшить время расчёта.

6. Получена оценка порядка аппроксимации для разностных уравнений на волновой и оболочечной стадиях. Показано, что порядок аппроксимации по времени равен единице, за исключением конечного числа изолированных моментов времени, в которые происходит разрыв нитей.

7. В силу нелинейности уравнений движения и зависимости их коэффициентов от переменных перемещений и скоростей теоретическая оценка порядка сходимости требует дальнейшей проверки на контрольных примерах.

8. Для описания алгоритмов вычисления коэффициентов дискретных уравнений выполнена функционально-объектная декомпозиция модели, которая использована при программной реализации.

ГЛАВА 4 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОСЛОЙНОЙ ТКАНИ

4.1 Разработка комплекса программ для исследования термомеханических процессов в многослойной ткани при ударе

Состав комплекса. Для реализации численных схем, приведенных в главе 3, используется среда функционально-объектного программирования «Алгозит» [49]. Обоснование выбора данной среды программирования приведено в главе 1. Ранее разработанные программные средства и технологии этой среды адаптированы для реализации алгоритмов, основанных на методе конечных элементов и конечных разностей, что используется для решения задач настоящей работы.

Разработанный и описанный далее программный комплекс представляет собой совокупность программ вычислительного и сервисного назначения. Комплекс содержит следующие программы, связанные по данным:

- 1) программа задания исходных данных о модели «Редактор сеток»;
- 2) программа расчета деформирования и тепловыделения «Программа расчета динамических температурных полей в многослойном композиционном материале при ударе» [78];
- 3) программа отображения и экспорта результатов расчёта «Алгозит Экспорт»;

Кроме того в среду включены программы служебного назначения «Транслятор» и «Интерпретатор».

На рисунке 4.1 представлена структурная схема среды функционально-объектного программирования «Алгозит». На схеме обозначены включенные в среду программные модули с указанием входных и выходных данных для каждого из этих модулей.



Рисунок 4.1 - Структурная схема среды функционально-объектного программирования «Алгозит»

Программа подготовки данных о конечно-элементной модели.

Инструментальная программа «Редактор сеток» ориентирована на создание одно-, дву- и трехмерных геометрических моделей, которые могут быть разбиты на различные виды конечных элементов. Формат требуемых для расчета данных строго определен, и представленная программа может гибко настраиваться с учетом предъявляемых требований.

Данные каждого атрибутивного назначения должны храниться в отдельных текстовых файлах. Таковыми файлами являются: файл с координатами «Coord.txt», файл с топологией «Top.txt», файлы с ориентацией глобальной и местной системы

координат «Orient.txt» и «Сm.txt», файл с закреплениями узлов «Ng.txt» и другие файлы.

Генерация программой данных о конечно-элементной модели осуществляется путем выполнения скриптов, написанных на встроенном языке «Ядро» [50]. Результат выполнения может отображаться графически в виде аксонометрического или стереоскопического изображения. Покажем на рисунке 4.2 примеры скрипта для задания топологии и ориентации местных осей элемента и результаты выполнения этих скриптов.

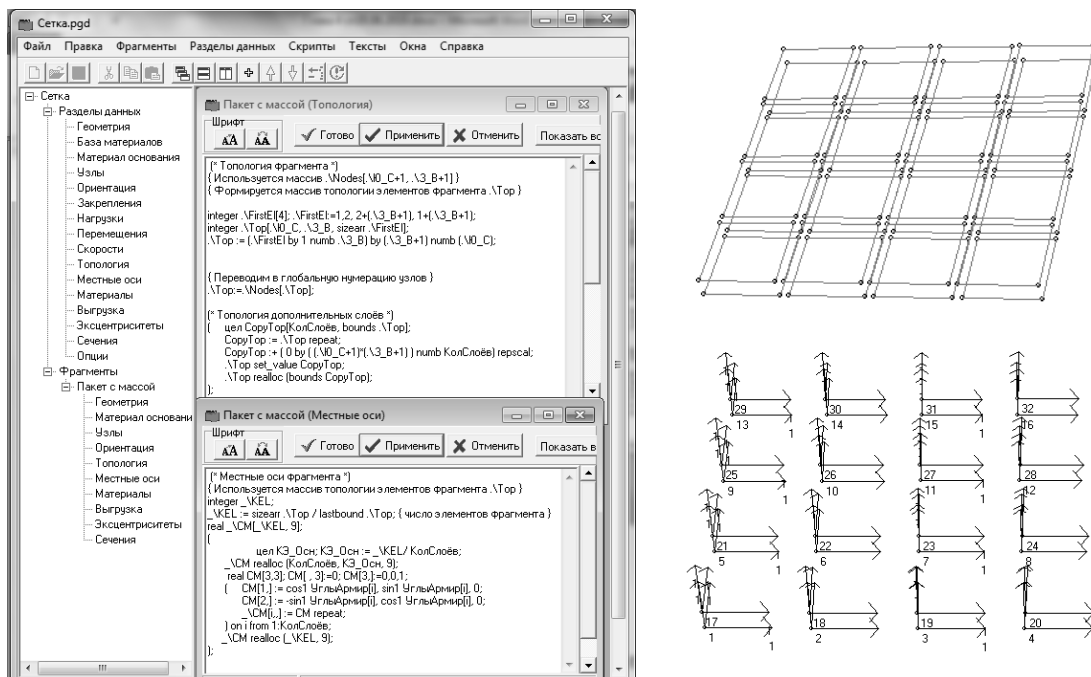


Рисунок 4.2 - Интерфейс программы «Редактор сеток» и графические результаты выполнения скриптов

Программа «Редактор сеток» имеет многооконный интерфейс. В левой части главного окна располагается дерево разделов данных и фрагментов модели. В примере на рисунке 4.2 модель содержит только один фрагмент. Каждый раздел данных предназначен для задания одной таблицы определённого вида (координат, топологии и др.), которая может состоять из подтаблиц данных фрагментов. Выгрузка данных в итоговые файлы программируется на уровне скриптов.

Вклад автора в разработку этой программы заключается в создании набора типовых скриптов для генерации таблиц данных о конечно-элементной модели

многослойного тканого пакета совместно с поражающим элементом, что позволяет оперативно формировать таблицы данных с задаваемыми геометрическими, физико-механическими и теплофизическими параметрами слоёв ткани, а также граничными и начальными условиями.

Программа расчета деформирования и тепловыделения включает в себя набор функционально-объектных схем, разработанных в компоненте «Конструктор» среды «Алгозит», и библиотеку классов на языке C++ («Фабрику объектов»). Программа выполняется под управлением интерпретатора среды «Алгозит».

Интерфейс редактора и пример типовой функционально-объектной схемы представлен на рисунке 4.3.

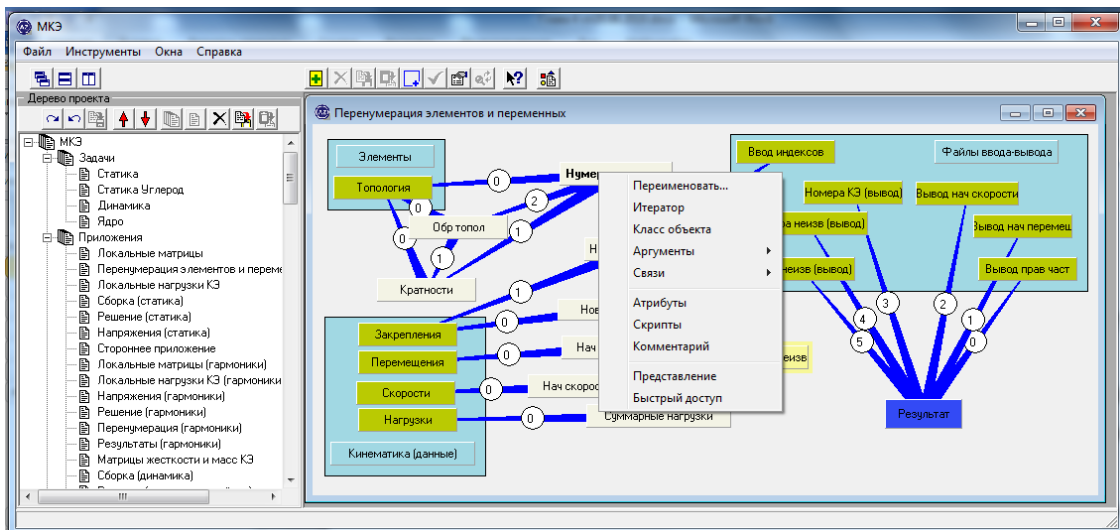


Рисунок 4.3 - Окно конструктора функционально-объектных схем

В левой части окна расположен список разработанных страниц, эти страницы могут логически объединяться в линейки страниц. В центральной части расположена область для дочерних окон редактирования функциональных схем. Для добавления новых элементов, удаления, копирования и вставки объектов с одной страницы на другую предназначены служебные кнопки, расположенные выше окна редактора. На рисунке показан вид контекстного меню для простой панели.

Обязательным атрибутом каждого объекта сети является имя функционального класса, который содержится в библиотеке «Фабрика объектов» и разрабатывается с учетом необходимой функциональности объекта.

Построенная объектно-функциональная схема преобразуется в последовательность команд при помощи модуля «Транслятор» и сохраняется в той же папке, что и исходные функционально-объектные схемы, в виде оттранслированной последовательности команд интерпретатора. Модуль «Интерпретатор» управляет выполнением команд, вызывая методы объектов. Вычисленные значения объектов могут выводиться в двоичные и текстовые файлы, которые в дальнейшем обрабатываются сервисными программами.

Вклад автора в разработку конструктора функционально-объектных схем состоит в добавлении средств задания и отображения транзитной передачи неявного аргумента объектам сети с побочными эффектами. Вклад в расширение компонента «Фабрика объектов» заключается в разработке и включении в библиотеку 18 функциональных классов для вычисления локальных матриц элементов многослойного пакета и элементом слоев ткани применительно к рассматриваемой задаче расчёта деформирования и тепловыделения. Интерфейсы разработанных на языке C++ функциональных классов приведены в Приложении 2.

Программа отображения и экспорта результатов предназначена для визуального представления результатов расчета на каждом временном шаге в процессе движения: скоростей, перемещений, деформаций, напряжений и температурных полей, рассчитанных путём численного решения уравнений движения. Каждый из параметров состояния хранится в отдельных файлах, соответствующих определенному моменту времени. Имя файла состоит из названия параметра состояния и номера шага по времени. В файлах может храниться несколько рассчитанных значений, например, в файле с перемещениями для каждой точки имеется три столбца данных: переносное перемещение и два относительных. Вывод конкретного вида перемещения для

просмотра настраивается пользователем в диалоге. На рисунке 4.4 показан интерфейс программы для просмотра результатов с загруженными данными.

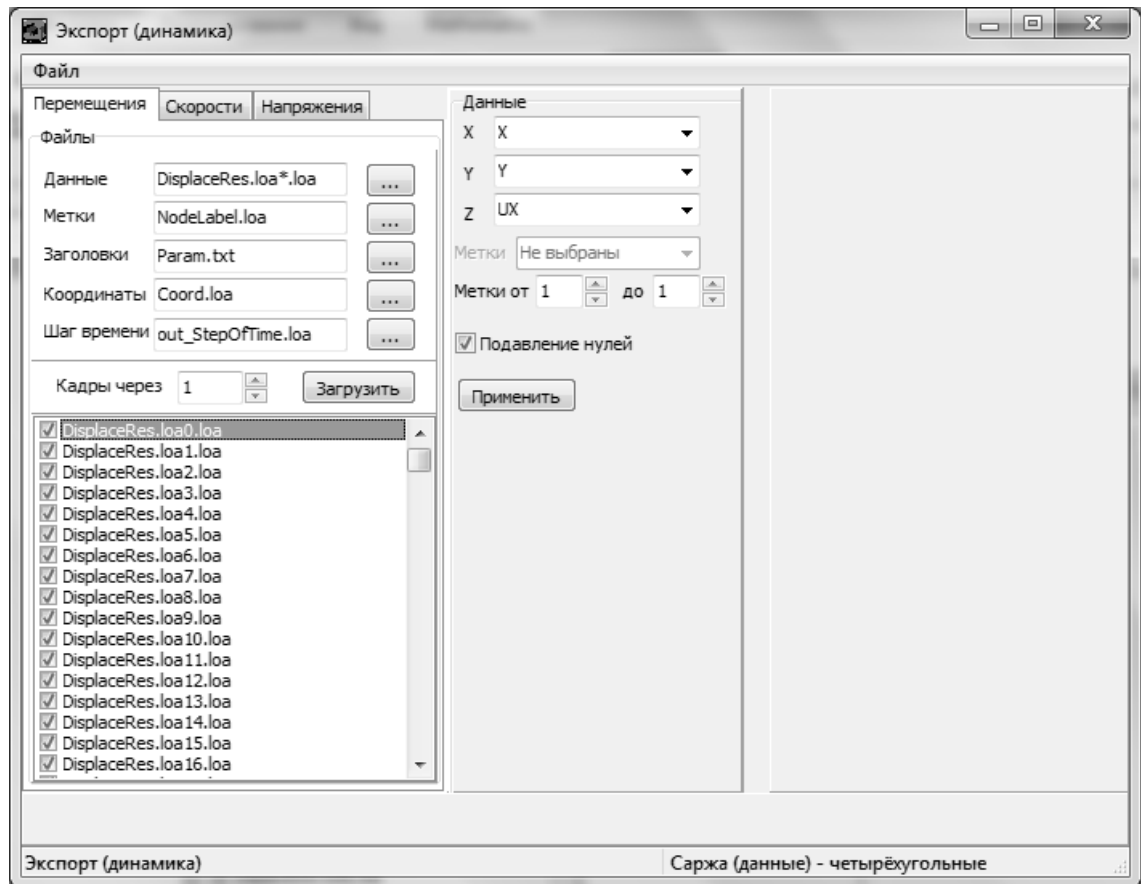


Рисунок 4.4 – Главное окно программы отображения и экспорта результатов

Представленное приложение позволяет просматривать результаты расчетов для каждого временного шага. Для просмотра перемещений, скоростей и напряжений предназначены одноименные вкладки. На вкладке «Напряжения» список выбора конкретного параметра состояния пакета включает: необратимую работу растягивающих напряжений, работу вязкого трения, адиабатическую температуру, максимальные деформации, напряжения и некоторые другие.

Далее после нажатия на кнопку «Применить» открывается панель настройки изображения. На этой панели отображаются граничные значения значение выбранной компоненты среди всех кадров. На панели возможно регулировать количество цветовых уровней изображения, а настройка палитры позволяет настраивать цветовую схему изображения выбором из трех вариантов: красно-синее, трехцветное или черно-белое.

После применения всех установок и нажатия на кнопку «Применить» открывается окно с изображением (рисунок 4.5).

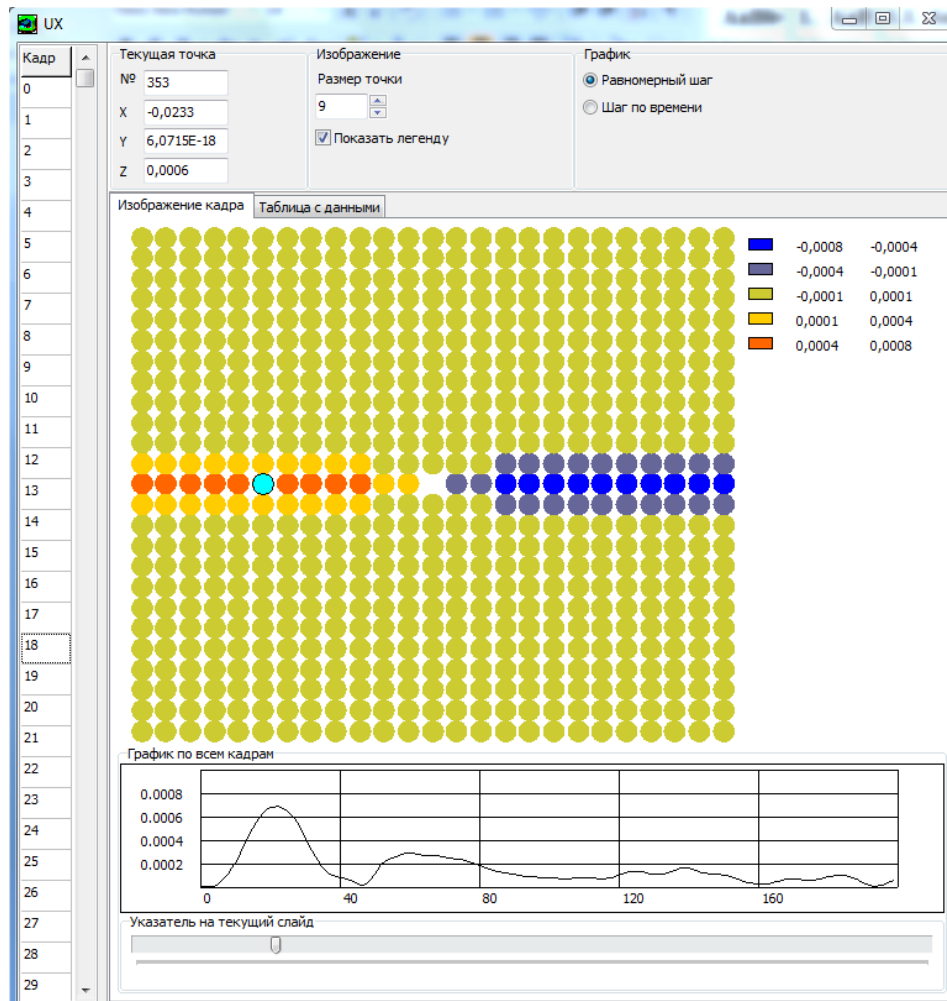


Рисунок 4.5 – Графическое представление результатов: слева – номера кадров, в центре – изображение кадра, внизу – график зависимости от времени в выбранной точке кадра

Поле просмотра графических результатов представляет собой область рисунка с цветными маркерами. Каждый маркер соответствует одной точке в плане на поверхности образца. Для установления соответствия цвета маркера и числового значения на форме расположена легенда. При нажатии кнопкой мыши по маркеру показывается изменение состояние выбранной точки по всему временному отрезку, возможно также добавление нескольких точек для сравнения состояний. При выборе номера кадра в левой части окна изображение с результатами перерисовывается по новым данным.

Дополнительно программа графического просмотра позволяет строить деформированную форму по данным из файла с перемещениями (рисунок 4.6). Для построения выбирается один файл с перемещениями, соответствующий конкретному моменту времени.

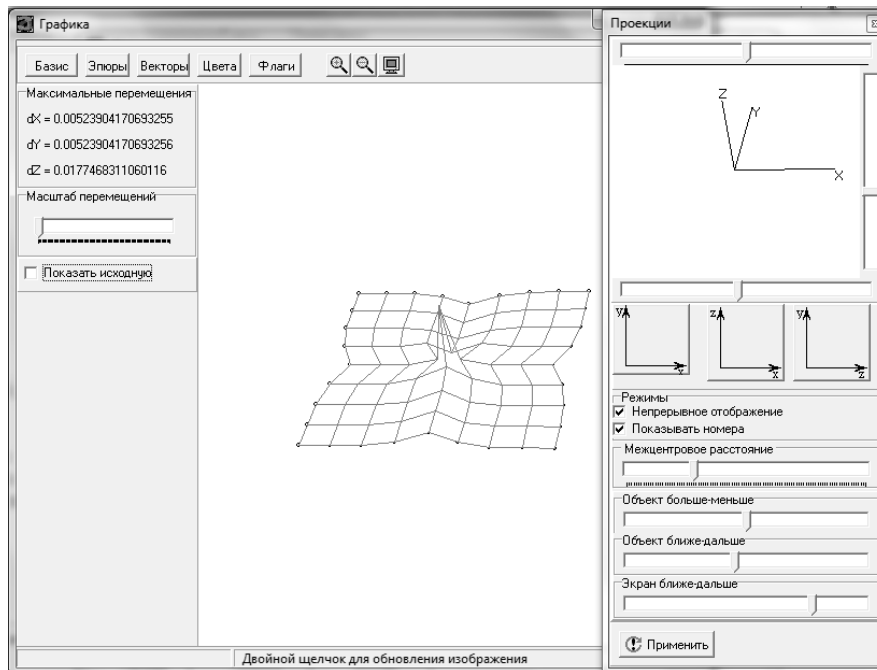


Рисунок 4.6 – Окно просмотра деформированной формы

В левой части окна показаны максимальные перемещения по всем измерениям и панель для регулировки масштаба перемещений. Увеличение масштаба позволяет более наглядно отображать форму деформированной поверхности. Для настройки проекции, в которой будет показано изображение, предназначена диалоговая панель «Проекция», которая открывается при нажатии кнопки «Базис». Трёхмерное изображение может быть показано как стереоскопическое, для этого на форме «Флаги» требуется установить режим «Анаглиф»; для просмотра анаглифа необходимы очки с красным и синим стёклами.

Таким образом, сервисные программы среды «Алгозит» были адаптированы для задач расчёта деформирования и тепловыделения многослойных тканых образцов при ударе. В программе «Редактор сеток» разработаны типовые скрипты для генерации исходных данных о конечно-элементной модели многослойного

тканого пакета. В программе экспорта результатов разработаны: модуль ввода покадровых данных, инструменты для построения графиков, фильтры для выбора отображаемых параметров (из набора рассчитанных) в файлах результатов расчёта.

Модификация модели поведения функциональных объектов с неявным аргументом. При решении описанных в главе 3 дискретных уравнений на каждом шаге по времени требуется вычисление матричных коэффициентов – глобальных матриц масс, вязкости и жесткости. Глобальные матрицы собираются из локальных матриц элементов, которые вычисляются с помощью численного интегрирования по площади двумерного элемента.

Значительная часть времени затрачивается на вычисление матриц, зависящих от локальных координат, а значительная часть кода программы реализует эти операции. Координаты точки интегрирования передаются объекту (переменной матрице) с помощью специальной структуры данных – неявного аргумента. Переменная матрица, в отличие от алгомагов с базовым поведением, вычисляется алгомагом-«сервером»; его значение изменяется при получении изменённого неявного аргумента от зависимых объектов, т.е. возникает побочный эффект. Представление потока вычислений в виде сети с побочными эффектами сокращает число элементов функционально-объектной схемы.

В существующей модели поведения функциональных объектов [44, 42] за передачу неявного аргумента отвечал зависимый объект – экземпляр «конечного» класса, в котором программируется вычисление значения. В методе поведения «конечного» класса необходимо программировать вызов метода передачи неявного аргумента и метода вычисления для каждого аргумента, который использует тот же самый неявный аргумент. Это вызывает дополнительный расход вычислительного времени.

В новой модели поведения функция передачи неявного аргумента реализована на уровне базового класса алгомата. На этом же уровне делаются проверки полученного значения неявного аргумента и автоматический вызов виртуального метода вычисления значения. Поэтому при написании методов

«конечного» класса на языке C++ нет необходимости программировать вызовы соответствующих методов для аргументов, а компьютерное время сокращается за счёт отсутствия повторных вычислений алгомата-«сервера» в случае, когда неявный аргумент сохраняет прежнее значение.

При модификации модели поведения в структуру данных для неявного аргумента добавлены заголовки числовых данных, а алгома-«сервер» получил дополнительный атрибут – заголовки используемых полей неявного аргумента. Это позволяет организовать проверки изменения неявного аргумента так, чтобы вычисление нового значения не производилось, если изменились только данные, не используемые сервером.

Блок-схема разработанного алгоритма установки неявного аргумента показана на рисунке 4.7. Эта блок-схема реализует процедуру вида: $A \rightarrow SetLoc(Csi)$, т.е. некоторому аргументу A устанавливается неявный аргумент с именованной строкой данных Csi .

Результатом выполнения данной процедуры является установка флага состояния объекта в значение «Готов» и его вычисление. Если все используемые поля данных нового неявного аргумента имеют те же значения, что и в старом неявном аргументе, а значения явных аргументов не изменялись, то повторное вычисление не производится.

Возвращаемое значение равно единице, если после получения неявного аргумента объект был заново вычислен, и нуль – если его значение осталось прежним.

Кроме координат точки, в неявном аргументе могут передаваться другие атрибутивные данные, например, деформации и перемещения в квадратурной точке. Данные, необходимые алгома-«серверу», автоматически выбираются в соответствии с заголовками используемых полей, заданными в атрибуте алгомата, который добавлен при модификации. Если в строке передаваемого неявного аргумента содержатся не все требуемые компоненты данных, то недостающие значения берутся из другого добавленного атрибута – значений по умолчанию.

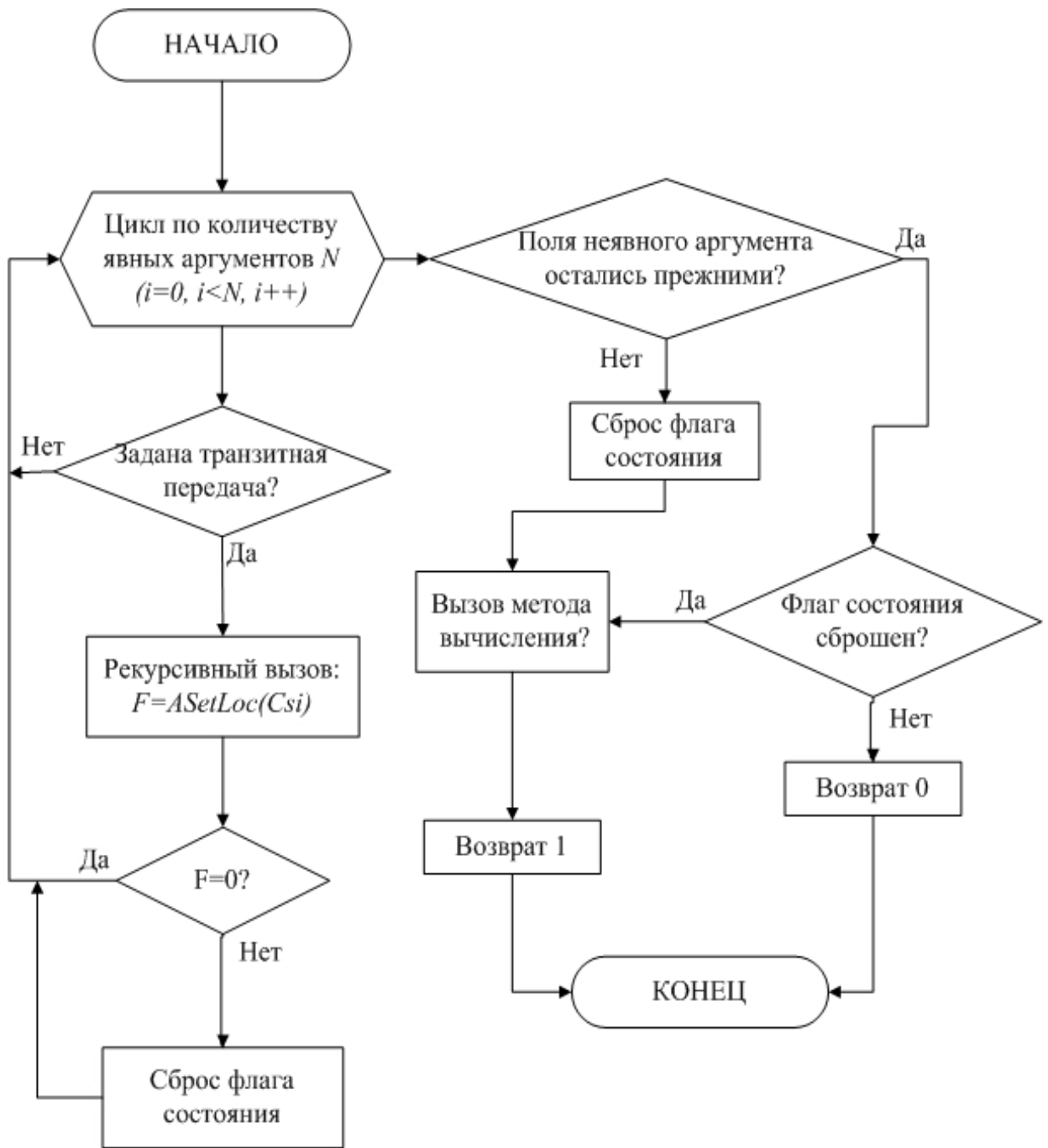


Рисунок 4.7 – Блок-схема алгоритма установки неявного аргумента

На функционально-объектной схеме наличие в сети побочных эффектов в существующем варианте не отображалось, что снижает наглядность визуального представления. Поэтому в код программы-конструктора внесены изменения, а для транзитной передачи неявного аргумента введено специальное обозначение в виде стрелки светлого цвета. Алгоритмы-«серверы», участвующие в транзитной передаче, должны иметь атрибут «Транзит Неявного». В нём задаются номера

аргументов, которым неявный аргумент должен передаваться транзитом при его получении с выполнением описанных выше проверок и вычислением нового значения в случае изменения используемых компонент данных.

На рисунке 4.8 показана функционально-объектная схема фрагмента сети, задающей вычисление матрицы жесткости элемента слоя ткани.

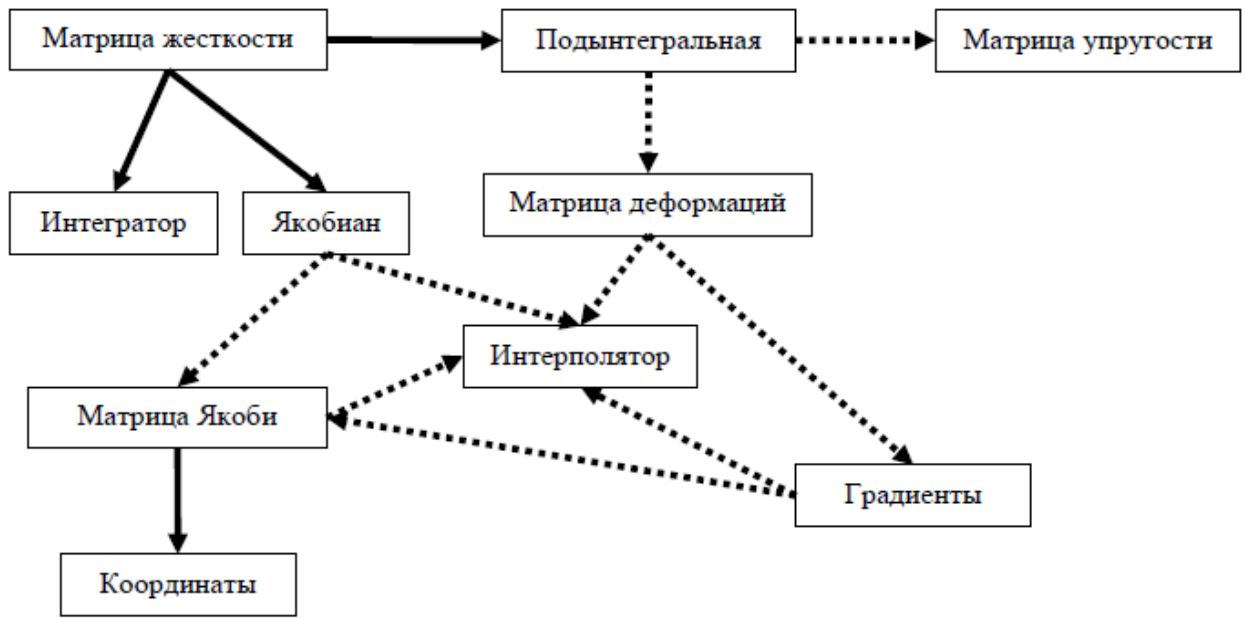


Рисунок 4.8 – Схема вычисления матрицы жесткости элемента слоя ткани (фрагмент)

Вычисление матрицы жесткости конечного элемента выполняется путём численного интегрирования произведения матриц, зависящих от координат и перемещений точки. Квадратурные точки и их веса хранятся в алгомате «Интегратор», который определен как объект класса `TBasicIntegrator`, реализованный на языке C++ как таблица с заголовками: «Csi», «Eta», «Dzeta» - безразмерные координаты, «P» - вес точки.

В функциональном классе `TIntegratedMatrix` объекта «Матрица жесткости» в методе «calculation» в цикле вычисляются значения подынтегральной функции. При каждом повторении цикла в аргументы-«серверы» «Подынтегральная» и «Якобиан» передается неявный аргумент – координаты квадратурной точки. На схеме такая зависимость обозначена стрелкой черного цвета. Для вычисления объекта «Подынтегральная» (произведения переменных матриц) требуется

вычислить сомножители - значения объектов «Матрица деформаций» и «Матрица упругости» в той же точке. Алгоритм «Подынтегральная» передаёт своим аргументам неявный аргумент транзитом (пунктирные стрелки на рисунке 4.8), т.е. в методе вычисления подынтегральной матрицы вызовы вычисления сомножителей не программируются.

Далее неявный аргумент передаётся транзитом другим алгоритмам, вычисляющим переменные матрицы, в соответствии с пунктирными стрелками на рисунке 4.8. Транзит заканчивается, когда неявный аргумент получает алгоритм-интерполятор (экземпляр класса TUnunitApprox), от которого зависят все остальные переменные матрицы. Интерполятор вычисляет значения базисных функций и их производных в точке, заданной неявным аргументом. Он использует только безразмерные координаты – от одной до трёх, в зависимости от размерности сплайна: одномерные интерполяторы используют только координату «Csi», двумерные - «Csi» и «Eta», трёхмерные - «Csi», «Eta» и «Dzeta». Как видно из схемы, объект «Интерполятор» является аргументом четырёх алгоритмов: «Якобиан», «Матрица Якоби», «Градиенты» и «Матрица деформаций», т.е. в старой модели поведения он вычислялся бы в каждой квадратурной точке четыре раза. В новой модели поведения он вычисляется один раз, поскольку при совпадении предыдущего и текущего неявного аргумента объект сохраняет то же значение. Это сокращает затраты времени на вычисление значения объекта «Интерполятор» в четыре раза.

Таким образом, модифицировано поведение алгоритмов с побочными эффектами при транзитной передаче неявного аргумента. В среде функционально-объектного программирования «Алгозит» реализован новый алгоритм автоматической транзитной передачи неявных аргументов. Описанная модификация комплекса программ сокращает время вычислений за счёт исключения повторных вычислений аргумента-сервера при неизменных данных в неявном аргументе, используемых этим сервером. Тем самым устранены недостатки, отмеченные в главе 1.

Реализация численной схемы расщепления. В главе 3 построена разностная схема расщепления для решения уравнения движения слоистого пакета на оболочечной стадии деформирования.

Алгоритм решения можно представить в виде блок-схемы (рисунок 4.9).

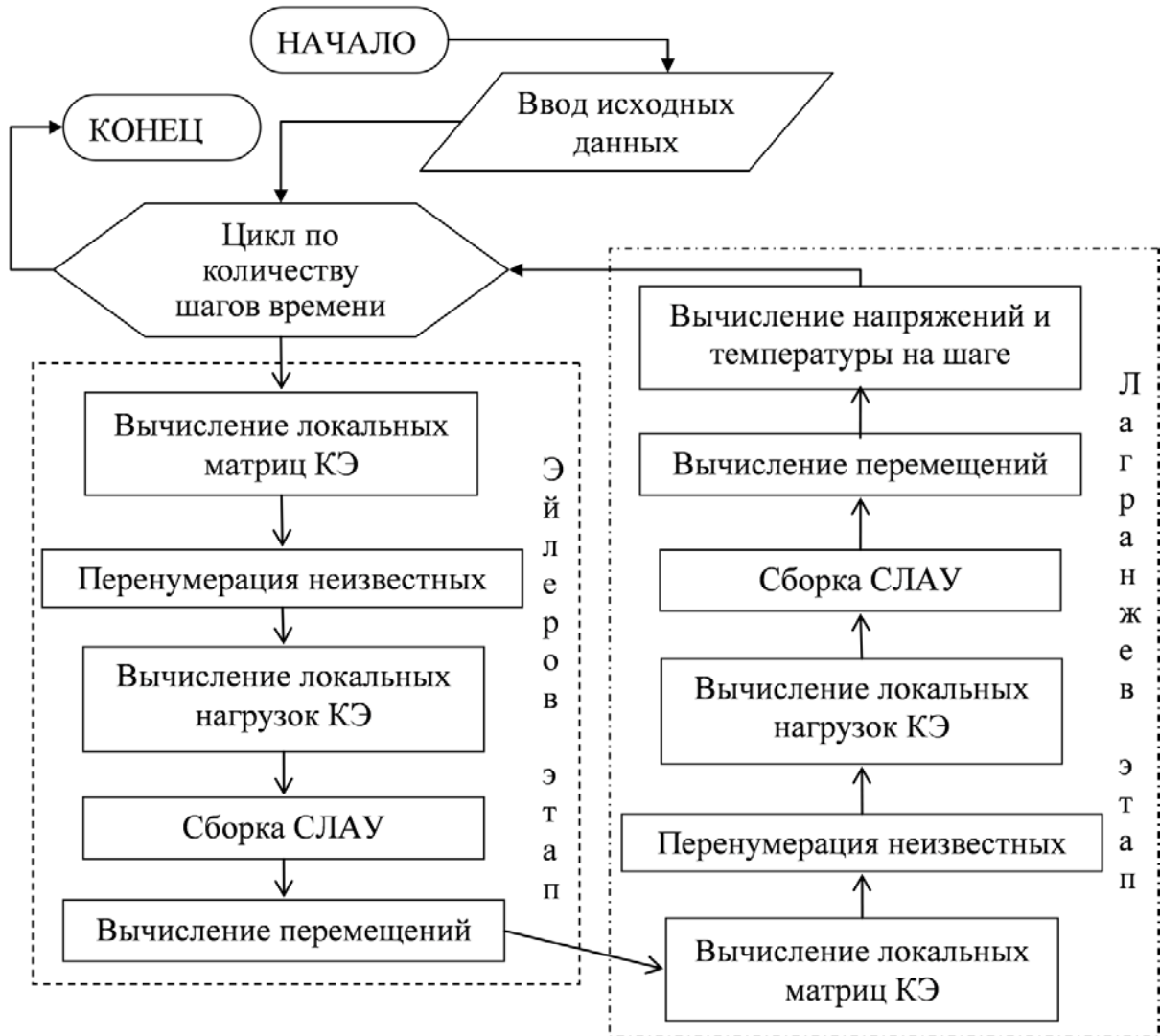


Рисунок 4.9 – Блок-схема алгоритма расщепления по процессам

Выполнение данного алгоритма начинается с загрузки исходных данных о тополого-геометрической модели. Далее реализуется цикл, число повторений которого равно количеству заданных шагов времени. Общее время соударения, а также количество шагов разбиения задается в исходном файле «options.txt», а шаг времени τ вычисляется как отношение этих величин.

Дискретные уравнения движения интегрируются по времени по показанному алгоритму. Каждый шаг по времени расщепляется на два этапа – эйлеров и лагранжев.

На первом этапе последовательно вычисляются локальные матрицы жесткости, вязкости и масс элементов многослойного пакета и локальные матрицы нагрузок. Они зависят от перемещений и скоростей переносного и относительного движения в начале шага. Затем собираются глобальные матрицы коэффициентов уравнений, и решением СЛАУ определяются переносные перемещения и скорости.

На втором этапе вычисляются локальные матрицы элементов слоёв ткани, зависящие от относительных перемещений в начале шага и от найденных переносных перемещений. Затем собираются глобальные матрицы, и решением СЛАУ определяются относительные перемещения в конце шага. После этого рассчитываются напряжения в слоях ткани, поглощённая энергия и адиабатические температуры в квадратурных точках элементов всех слоёв.

Функциональная схема, эквивалентная представленной на рисунке блок-схеме, приведена на рисунке 4.10.

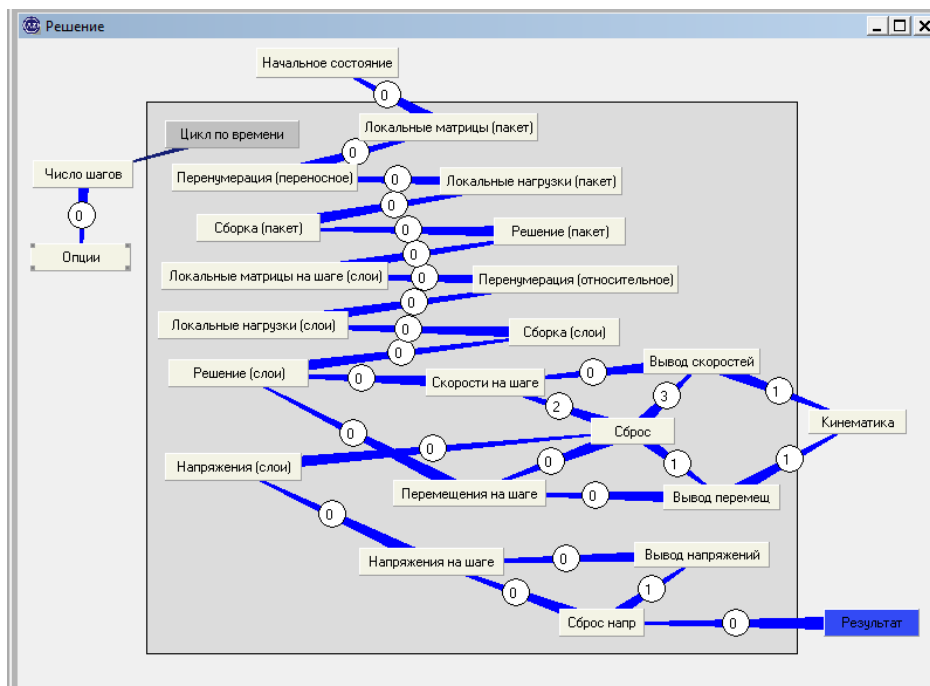


Рисунок 4.10 - Страница функциональной схемы реализации алгоритма расщепления по процессам

На представленной схеме каждый алгомот представляет собой отдельное приложение, результатом выполнения которого является выгрузка расчетных данных в тестовый файл. В Приложении 1 представлены функционально-объектные схемы, которые были разработаны при формировании локальных матриц для элементов многослойного пакета и слоев ткани.

В модели деформирования на оболочечной стадии используются два типа конечных элементов: мембранный четырехугольный элемент, предназначенный для расчетов параметров относительного движения, и четырехугольный элемент оболочки – для расчета параметров переносного движения. Для вычисления локальных матриц каждого из этапов разработано отдельное приложение, в то время как для алгоритма сборки и решения СЛАУ используется одно и то же приложение.

На рисунке 4.10 все выполняемые приложения заключены в итератор «Цикл по времени», его индексным объектом является панель «Число шагов», данные в которую загружаются из текстового файла с опциями. Исключением является приложение «Начальное состояние», результатом выполнения которого является выгруженные в файл состояния нитей с учетом начальных условий, принятых после волновой стадии.

Согласно схеме, представленной на рисунке 4.10, итогом выполнения приложений, входящих в каждый из этапов, является решение СЛАУ вида:

$$(M + \tau C + \tau^2 K) \{\dot{U}\}^{t+1} = M \{\dot{U}\}^t - \tau K \{U\}^t + \tau \{F\}^t, \quad (4.1)$$

а для того чтобы найти узловые перемещения, следует воспользоваться выражением:

$$\{U\}^{t+1} = \{U\}^t + \tau \{\dot{U}\}^{t+1}. \quad (4.2)$$

Нахождение левой части выражения (4.1) заключается в последовательном выполнении линейки приложений: «Локальные матрицы» – «Перенумерация» – «Локальные нагрузки» - «Сборка». В результате выполнения этих приложений формируются матрицы масс, вязкости и жесткости. Матрицы масс и жесткости также используются при формировании правых частей СЛАУ. Здесь локальные

матрицы собираются согласно топологии элементов оболочки. Приложения «Перенумерация» и «Сборка» входят в стандартные приложения «Алгозита» для метода конечных элементов и не изменялись.

В конце каждого временного шага рассчитываются приращения рассеянной энергии и адиабатической температуры. Поскольку эти вычисления не входят в решение уравнений движения, на схеме (рисунок 4.10) они не показаны. Формируемые при этом таблицы выгружаются в отдельные файлы по кадрам. Точки, в которых рассчитываются термомеханические параметры и температуры, совпадают с точками, в которых рассчитываются деформации и напряжения, что позволяет объединять эти файлы для обработки программой визуализации и экспорта результатов.

Вычисление локальных матриц, а также расчёт напряжений, деформаций и температур требуют использования одинаковых объектов: базисных интерполяционных функций, матриц коэффициентов определяющих уравнений материалов, геометрических характеристик конечных элементов и других вспомогательных объектов для выполнения интерполяции, численного интегрирования и прочих типовых операций. При сопровождении программного комплекса может потребоваться изменить математическую модель и численную схему, чтобы обеспечить адекватность моделирования по мере изменения условий натурных испытаний. С целью улучшения управляемости программы и её приспособленности к быстрым модификациям функционально-объектные схемы разделены на страницы (агрегаты взаимосвязанных объектов) в соответствии с уравнениями, образующими модель: объекты определяющих уравнений материалов (напряжения при нелинейно-упругих деформациях, силы вязкого трения и т.д.), топология, геометрия элемента, объекты базисных функций и интерполяции, объекты квадратурных формул и другие специализированные страницы библиотеки конечных элементов. Отдельно включены в набор многостраничные схемы объектов глобальных матриц, их сборки и факторизации, решения СЛАУ. Таким образом, изменение какой-либо одной группы уравнений математической модели или изменение способа аппроксимации в численной

схеме обычно требует изменения только тех страниц схемы, которые содержат объекты, относящиеся к изменяемым аспектам модели.

4.2 Исследование модели деформирования ткани на волновой и оболочечной стадиях соударения

Волновая стадия соударения была проанализирована в одномерной постановке. Такое упрощение позволяет с меньшим количеством вычислительных затрат произвести исследование приведенных разностных схем по времени.

Рассматривается тканый пакет, имеющий 15 слоев одинаковой толщины $h=0,0002$ м с модулем упругости вдоль нормали $E=10^9$ Па, массой $m=6,334 \cdot 10^{-5}$ кг, начальной пористостью $\mu=0,5$. Поражающий элемент имеет заданную массу $M=1,05 \cdot 10^{-3}$ кг и начальную скорость $V=300$ м/с. Скорость звука в поперечном направлении $a=800$ м/с.

Время прохождения акустической волной пути, равного толщине слоя, определяется как:

$$t_{см} = \frac{h}{V_{звукa}} = \frac{0,0002 \text{ м}}{800 \text{ м/с}} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ с.} \quad (4.3)$$

Для численного решения использована неявная разностная схема (3.8). Решение получено на интервале времени, который на 50% превышает время полного уплотнения ткани во всех слоях пакета.

На рис. 4.12 – 4.14 приведены графики полученных зависимостей.

На рисунке 4.12а сплошной линией приведена зависимость скорости от времени для первого слоя пакета. Эта кривая имеет вид гладкой убывающей кривой, что говорит о том, что в этом слое не возникает волновых эффектов после прохождения ударника через слой. Пунктирной линией обозначена кривая, соответствующая распределению скорости для второго слоя: вначале скорость возрастает и достигает максимума 407 м/с при $t = 1,8$ мкс, далее скорость немонотонно приближается к скорости первого слоя, но её колебания затухают. Скорость 15-го слоя (штрихпунктирная линия) монотонно возрастает до момента

времени $t = 10$ мкс, затем резко увеличивается до 375 м/с, после чего скорость уменьшается с незначительными колебаниями.

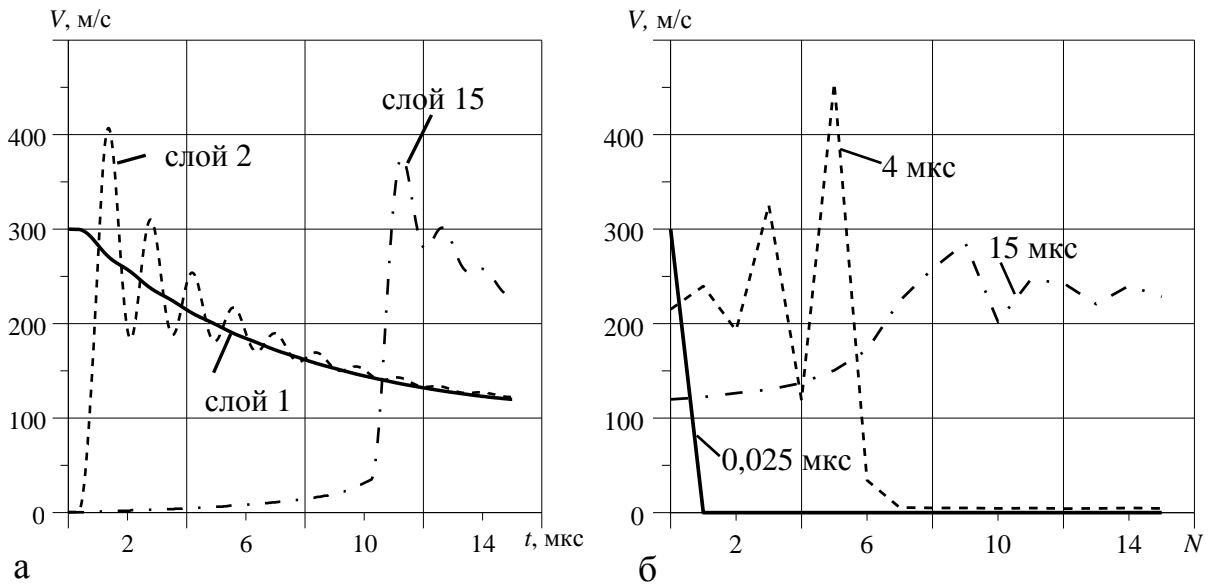


Рисунок 4.12 – Зависимость скорости от: а – времени для первого, второго и последнего слоя, б – номера слоя в фиксированные моменты времени

На рисунке 4.12б приведены зависимости изменения скорости по каждому слою для разных моментов времени. Сплошной линией обозначен начальный момент времени, где для первого слоя скорость составила 300 м/с, а для остальных слоев скорость была нулевой. В момент времени 4 мкс (пунктирная линия) ненулевая скорость наблюдается только в слоях с первого по седьмой. Это свидетельствует о том, что ударная волна к этому времени доходит до восьмого слоя. В 15-й момент времени (штрихпунктирная линия) скорости всех слоёв пакета уже ненулевые.

Рисунок 4.13а показывает изменение перемещений для первого, второго и последнего слоя. Перемещения максимальны в первом слое пакета. В последнем 15-м слое до момента времени 10 мкс перемещения возрастают незначительно, а при достижении фронтом волны этого слоя перемещения резко возрастают и достигают максимума 1,35 мм.

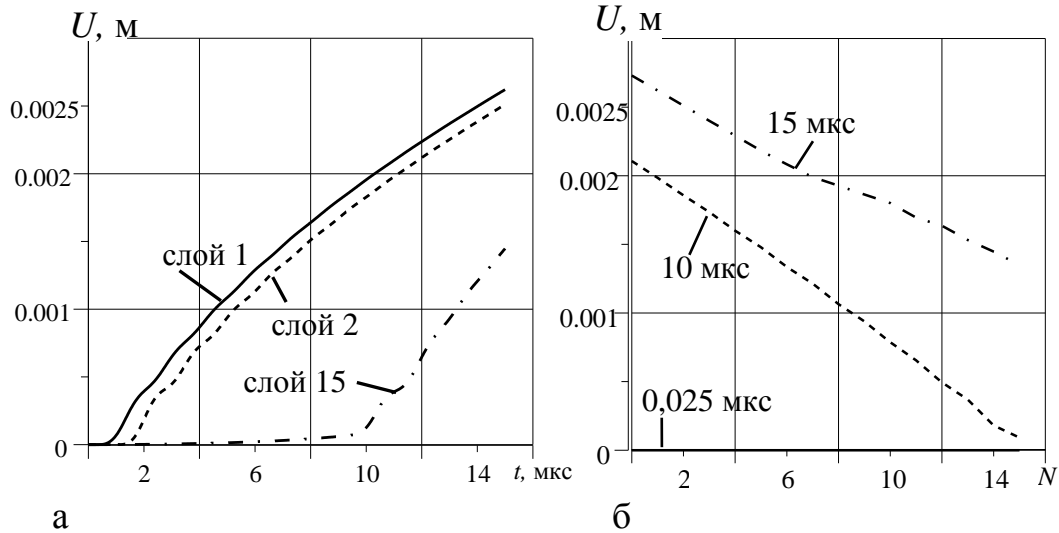


Рисунок 4.13 – Зависимость перемещений от: а – времени для первого, второго и последнего слоя, б – номера слоя в фиксированные моменты времени

Пунктирная линия на рисунке 4.13б показывает распределение перемещений по всем слоям после 8 мкс от момента соударения, видно, что во всех слоях имеются ненулевые перемещения, разброс значений перемещений от лицевого до обратного слоя составляет от $2,079 \cdot 10^{-3}$ м до $8,515 \cdot 10^{-5}$ м. Для момента времени 15 мкс (рис.3б, штрихпунктирная линия) разброс по перемещениям во всех слоях сокращается и составляет интервал от $2,621 \cdot 10^{-3}$ м до $1,349 \cdot 10^{-3}$ м.

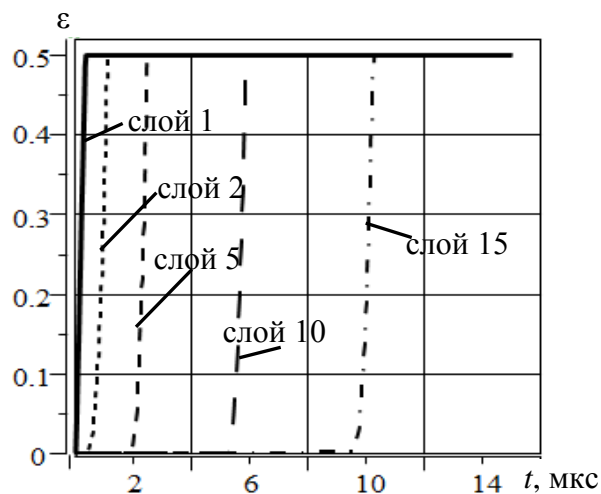


Рисунок 4.14 – Зависимости деформации смятия от времени для слоев

На рисунке 4.14 приведены зависимости деформации смятия от времени для пяти слоев пакета, номера которых указаны на рисунке. При полном смыкании пор деформация достигает значения 0,5, равного начальной пористости. Для первого слоя деформация достигает этого значения в момент времени 0,375 мкс, для второго слоя - 1,15, для пятого – 3,175, для десятого 6,6, для последнего (15-го) 10,375 мкс.

Таким образом, в приведенном примере уплотнение пакета заканчивается к 10,375 мкс от начала соударения. Распределение перемещений по толщине в этот момент близко к линейному, а распределение скорости по толщине остаётся неравномерным.

Погрешность решения контролировалась по изменению суммарного количества движения по формуле:

$$I^t = -1 + \frac{M \cdot V_{ПЭ}^t + \sum_i (m \cdot V_i^t)}{M \cdot V_{ПЭ}^0}, \quad (4.4)$$

где верхний индекс t означает номер момента времени,

V_{yd}^t - скорость поражающего элемента в момент времени t ,

V_i^t - скорость i -го слоя в момент времени t .

Покажем на рисунке 4.15 распределение погрешности решения для всех моментов времени.

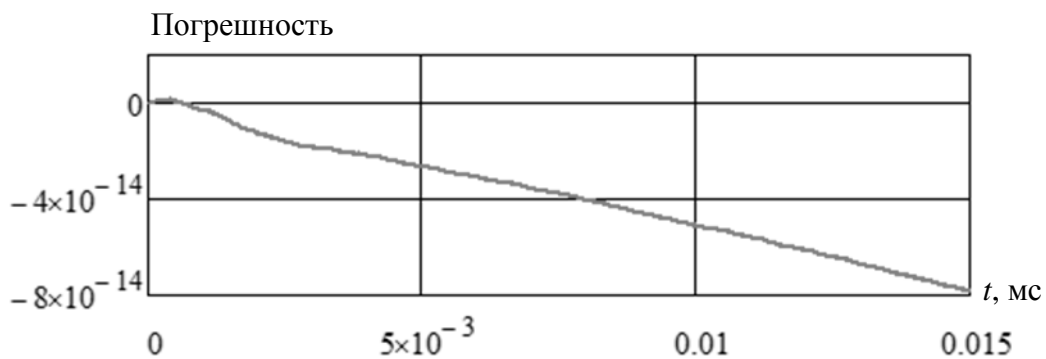


Рисунок 4.15 – Изменение погрешности по оценке суммарного количества движения

Рисунок 4.15 показывает, что отличие рассчитанного суммарного количества движения от начального импульса поражающего элемента на этом интервале времени не превышает 10^{-13} .

Оценим сходимость разностной схемы по времени. Для этого будем варьировать продолжительность шага по времени, при этом длительность волновой стадии будет всегда оставаться одинаковой. Составим план-матрицу вычислительного эксперимента (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – План матрица вычислительного эксперимента

Номер эксперимента	Продолжительность шага τ , мкс	Количество шагов
1	0,125	128
2	0,25	64
3	0,5	32
4	1	16
5	2	8
6	4	4
7	8	2

Для каждого эксперимента построим кривую распределения перемещений по всем слоям для последнего момента времени. Все построенные зависимости приведем на рисунке 4.16.

Графики показывают, что с уменьшением шага уменьшается скорость убывания осцилляций скорости (за счёт схемной вязкости), это объясняется тем, что реальная вязкость слоёв не учитывается. Поэтому такие осцилляции игнорируются при определении начальных условий для последующей стадии.

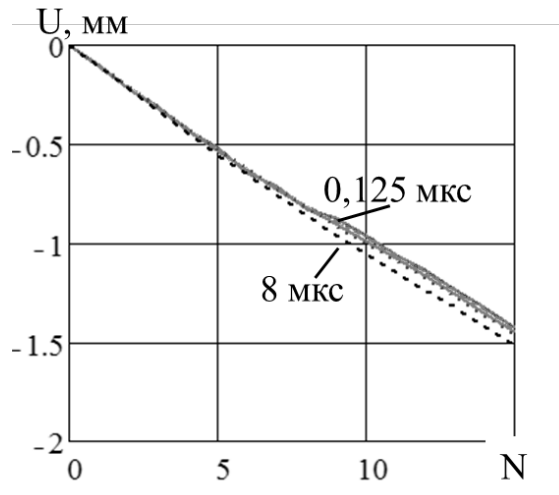


Рисунок 4.16 – Зависимости перемещений от номера слоя для разных шагов τ

Оценим порядок сходимости, применяя правило Рунге, которое заключается в вычислении с шагом по времени τ и затем с шагом $\tau/2$ и дальнейшем рассмотрении разностей погрешностей двух решений:

$$\|\Delta U_{\tau}\| \leq \frac{\|U_{\tau} - U_{\tau/2}\|}{1 - (1/2)^p}, \quad (4.5)$$

где p – порядок сходимости.

Погрешность численного метода при вычислении с шагом τ представляется в виде:

$$\|\Delta U_{\tau}\| \leq C \cdot \tau^p, \quad (4.6)$$

где C – константа.

Логарифмированием (4.6) выразим порядок сходимости p :

$$\ln \|\Delta U_{\tau}\| \leq \ln C + p \ln \tau. \quad (4.7)$$

Построим в логарифмических координатах зависимость изменения максимального перемещения от продолжительности шага (сплошная кривая на рисунке 4.17), построим аппроксимирующую прямую к полученной кривой (пунктирная линия на рисунке 4.17).

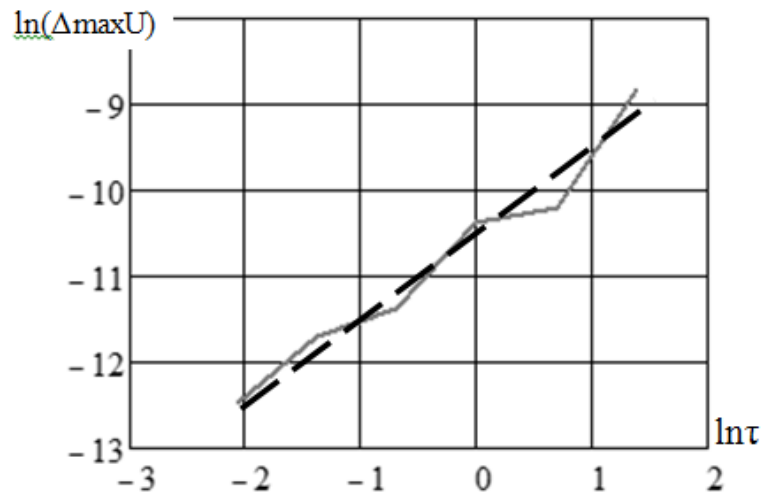


Рисунок 4.17 – Зависимость изменения максимального перемещения от продолжительности шага (в логарифмических координатах)

Угол наклона полученной кривой равный 0,98 показывает порядок сходимости разностной схемы по времени, что близко к теоретически найденному, равному 1.

Примем найденные перемещения и скорости за начальные условия для задачи деформирования и тепловыделения на оболочечной стадии.

Приведенные исследования начальной стадии деформирования позволяют сделать вывод о сходимости построенной разностной схемы по времени. Найденные деформации (рисунок 4.14) показывают, что за время прохождения фронта волны от лицевой до обратной стороны слоистого пакета происходит смятие слоев, при этом деформация смятия в точках образца постоянна по всей толщине.

Исследование параметров движения на оболочечной стадии соударения.

Для исследования адекватности поведение тканой преграды при соударении с поражающим элементом на оболочечной стадии деформирования будем рассматривать однослойную тканую структуру. Единственный слой представляет собой ортогональное пересечение двух семейств нитей с нулевым углом укладки нити основы вдоль кромки образца. Рассматривается квадратный образец со стороной 0,06 м. Шаг времени $\tau = 2 \text{ мкс}$, всего вычисления были проведены для

300 шагов. Покажем на рисунке 4.18 перемещения узлов тканого образца в момент времени 0,1 мс, 0,3 мс и 0,6 мс. (50, 150, 300) при скорости поражающего элемента 100 м/с, радиус ударника равен 0.00635 м.

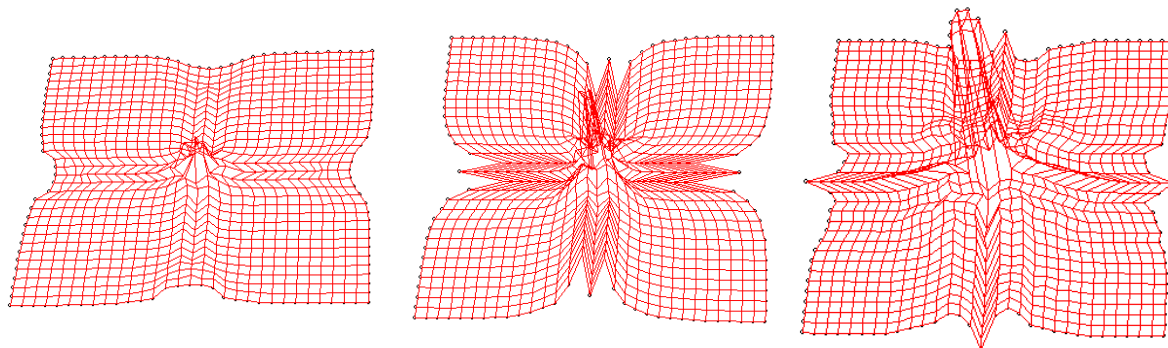


Рисунок 4.18 - Перемещения тканого образца в моменты времени: а-0,1 мс, б-0,3 мс, в-0,6 мс при скорости ударника 100 м/с

Результаты показывают, что до момента времени 0,1 мс образованный купол с наибольшими перемещениями наблюдается в центральной части образца. В крестообразных зонах от центра к краям вдоль направления укладки нитей имеет место их продергивание. Далее по мере увеличения времени контакты ударника с тканью перемещения в месте соударения возрастают, а в процессы движения нитей вовлекаются все большие поверхности ткани.

Покажем распределение перемещений (рисунок 4.19) для той же тканой преграды, но скорость ударника установим равную 30 м/с, а радиус ударника равным 0.0127 м.

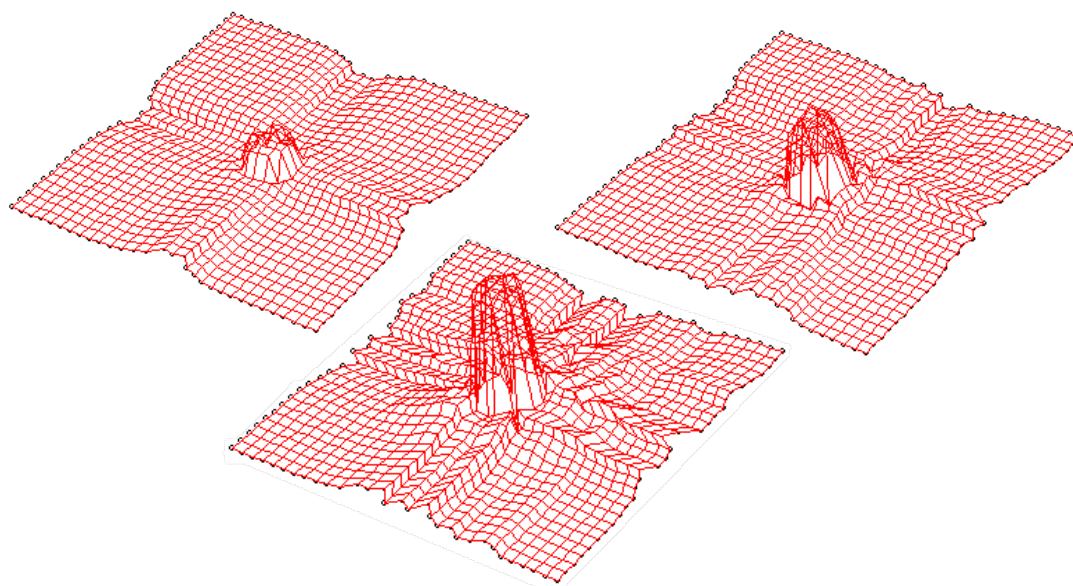


Рисунок 4.19 - Перемещения тканого образца в моменты времени: а - 0,1 мс, б - 0,3 мс, в - 0,6 мс при скорости ударника 30 м/с

На рисунке видно, что с ростом времени контакта поражающего элемента с тканью в процесс движения вовлекаются только крестообразные зоны от центра к краям, при этом угловые части тканого образца не получают значительных деформаций. Размеры центральной части с наибольшими перемещения на протяжении всего взаимодействия практически не изменяются.

Показанные результаты с образование деформационного купола соответствуют экспериментальным результатам [53, 24].

Рисунки 4.18 - 4.19 показывают, что перемещения достигают наибольших величин вблизи точки соударения поражающего элемента с тканой преградой. На рисунке 4.20 приведена зависимость рассчитанных нормальных перемещений в центральной точке образца в конце каждого шага по времени при различных начальных скоростях ударника.

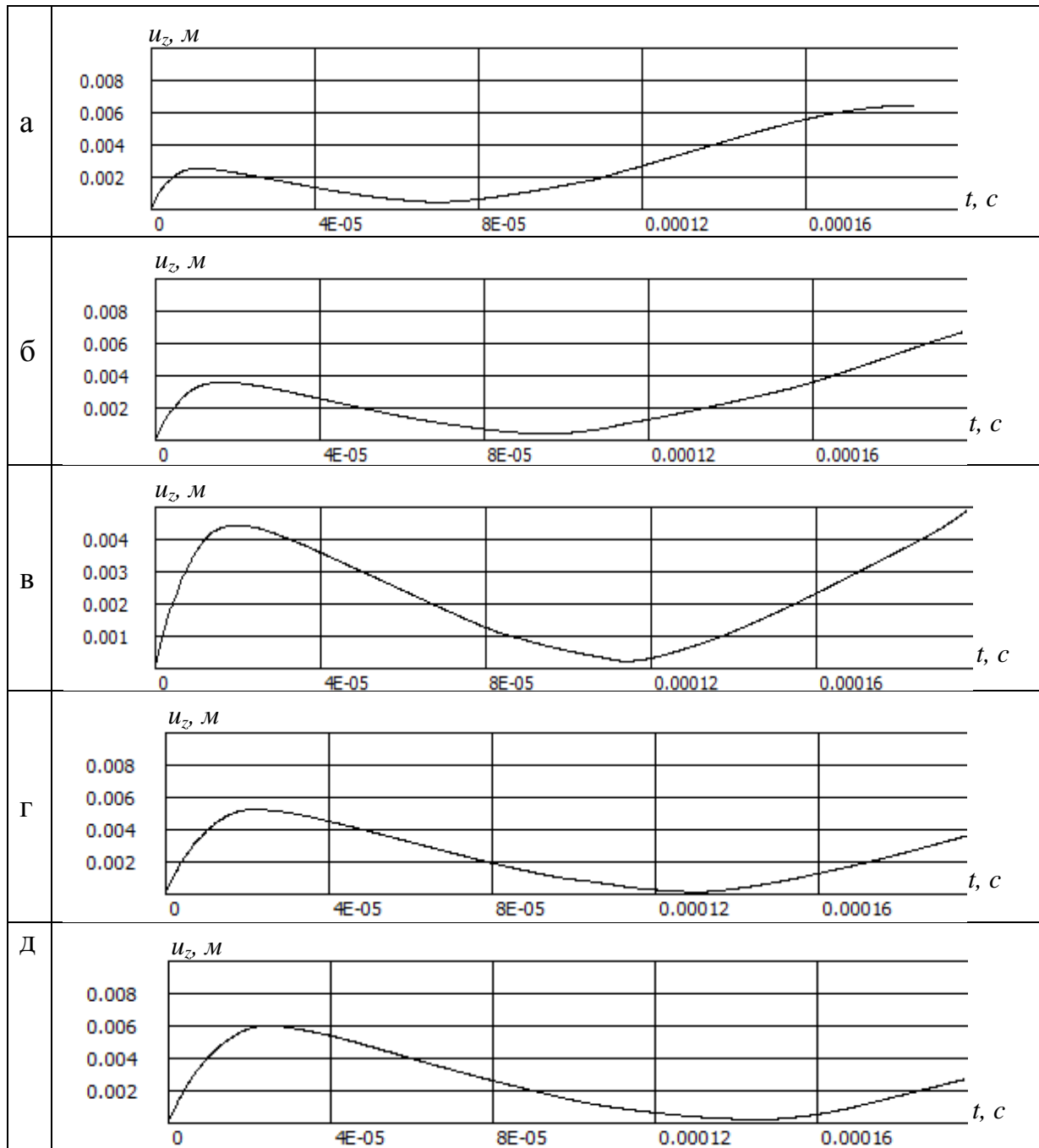


Рисунок 4.20 – Зависимость нормальных перемещений от времени в точке соударения при начальной скорости ударника: а – 100 м/с, б – 200 м/с, в – 300 м/с, г – 400 м/с, д – 500 м/с

На рисунке 4.20 при всех рассмотренных скоростях наблюдается волновой характер изменения перемещений, однако, при скоростях 100 м/с и 200 м/с величина перемещений со временем может увеличиваться. Такое поведение может свидетельствовать о раскачивании ткани при небольших скоростях ударника, чего на больших скоростях не возникает.

Только лишь результаты с перемещениями не могут служить мерой, определяющей, произошел ли разрыв нитей. Для этого требуются результаты с действующими напряжениями и их сравнение с заданными пределами прочности нитей.

Исследование сходимости численной схемы на оболочечной стадии деформирования рассматривалось при уменьшении шага по времени и при сгущении сетки конечных элементов. В обоих случаях погрешность оценивалась по правилу Рунге, а порядок сходимости находился по наклону аппроксимирующей прямой в логарифмических координатах.

При исследовании сходимости по времени было проведено 5 вычислительных экспериментов при продолжительности шага 10 мкс, 5 мкс, 2,5 мкс, 1,25 мкс и 0,625 мкс. Далее были вычислены разницы значений при шаге τ и $\tau/2$ для всех компонент перемещений. Найденные максимальные разницы величин приведены на рисунке 4.21 в зависимости от продолжительности шага (в логарифмических координатах). Порядок сходимости, определенный по наклону аппроксимирующей прямой, составил 0,58.

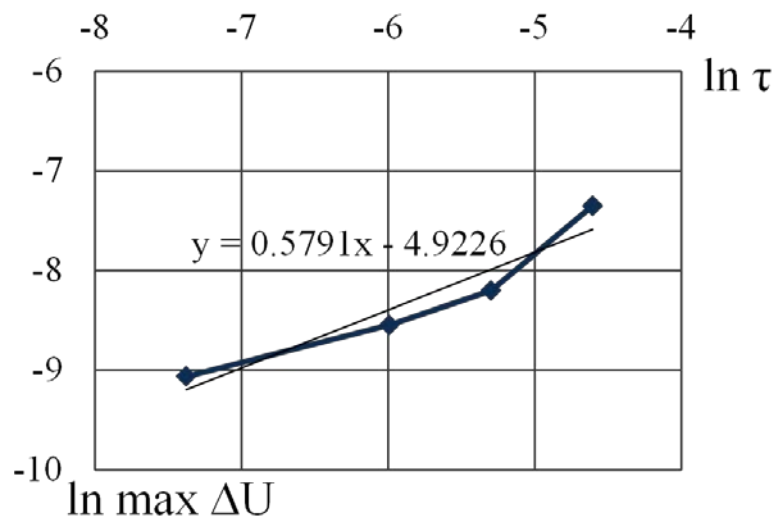


Рисунок 4.21 – Логарифмическая зависимость изменения максимального перемещения от продолжительности шага

Для исследования сеточной сходимости было проведено пять вычислительных экспериментов с удвоением числа элементов по стороне

слоистого образца. Найденные максимальные разницы значения перемещений были построены в логарифмической зависимости от параметра сгущения сетки K (рисунок 4.22), пропорционального числу конечных элементов вдоль одной из сторон ($K=1$ соответствует сетке 4×4 элемента, $K=2^3$ – сетке 32×32 элемента).

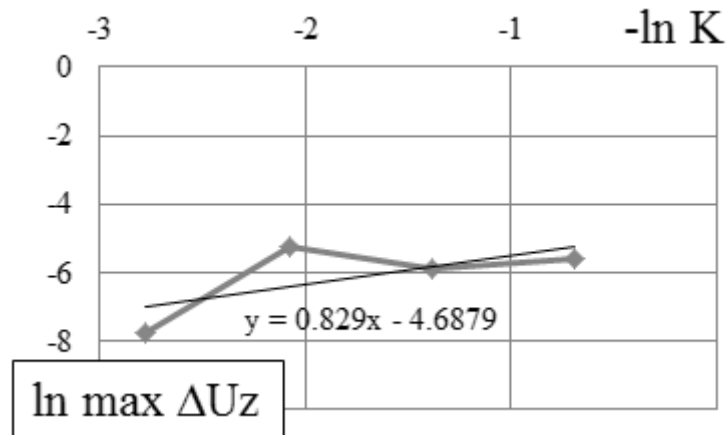


Рисунок 4.22 – Логарифмическая зависимость максимального прогиба от параметра сетки

Порядок сходимости, определенный по углу наклона аппроксимирующей кривой, составил 0,83. Такое уменьшение порядка сходимости по сравнению с асимптотическим порядком, равным 1, объясняется нелинейностью уравнений движения, конечностью шагов сетки и разрывностью коэффициентов уравнений.

Таким образом, контрольные примеры подтверждают сходимость, хотя и с невысоким порядком.

4.3 Исследование влияния скорости поражающего элемента и характеристик тканого материала на параметры динамических температурных полей

Влияние начальной скорости поражающего элемента было проанализировано на 24-слойной модели тканой преграды. Нити основы и утка имели нулевой угол армирования относительно кромок. Для двух семейств нитей принята различная величина начального и конечного модуля упругости: 12,7 ГПа и 14,2 ГПа соответственно.

На рис. 4.23 приведены результаты расчета адиабатической температуры для лицевого слоя ткани при различных начальных скоростях ударника.

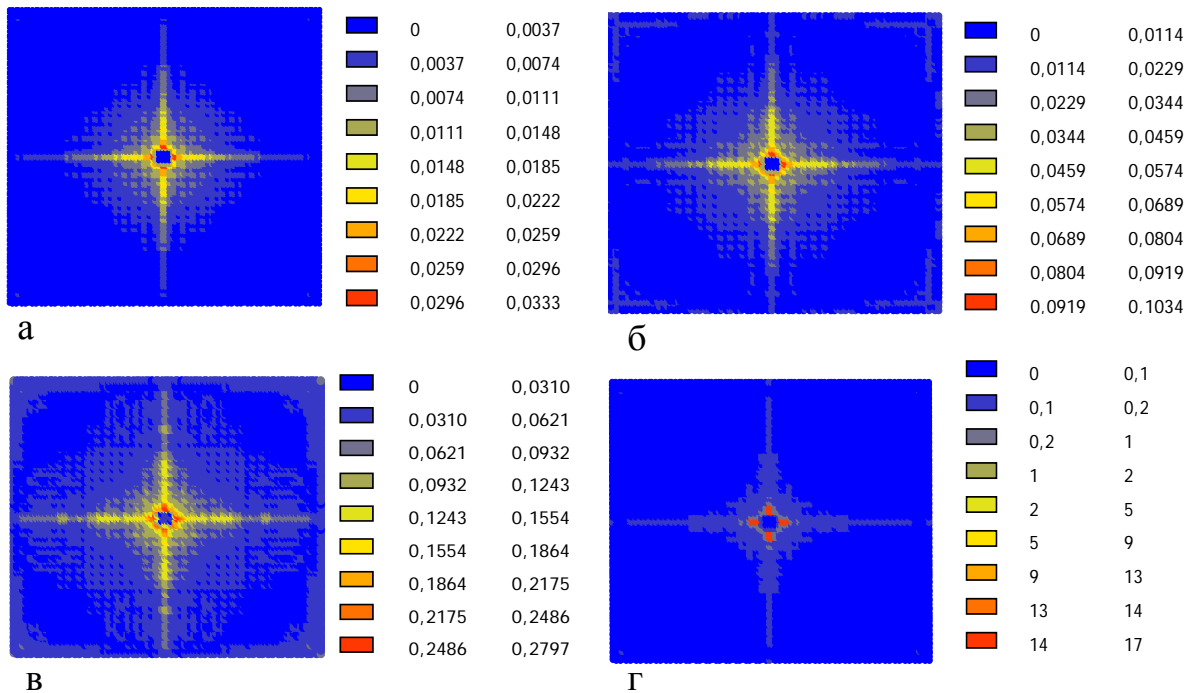


Рисунок 4.23 – Изменение температуры на поверхности пакета при начальной скорости ударника: а – 100 м/с, б – 200 м/с, в – 400 м/с, г – 500 м/с

На рисунках 4.23а-4.23в при скоростях менее 500 м/с максимальные действующие напряжения не превышают предельных, и можно сделать вывод, что крестообразные зоны с повышенной температурой образованы вследствие поглощения энергии за счет трения нитей. На рисунке 4.23г при скорости ударника 500 м/с максимальные действующие напряжения превышают предельные значения, тогда зоны с наибольшим повышением температуры свидетельствуют о поглощении энергии за счет энергии разрушения нитей.

Покажем на рисунке 4.24 распределение работы растягивающих напряжений. Рост начальной скорости вызывает повышение максимальной плотности рассеянной энергии.

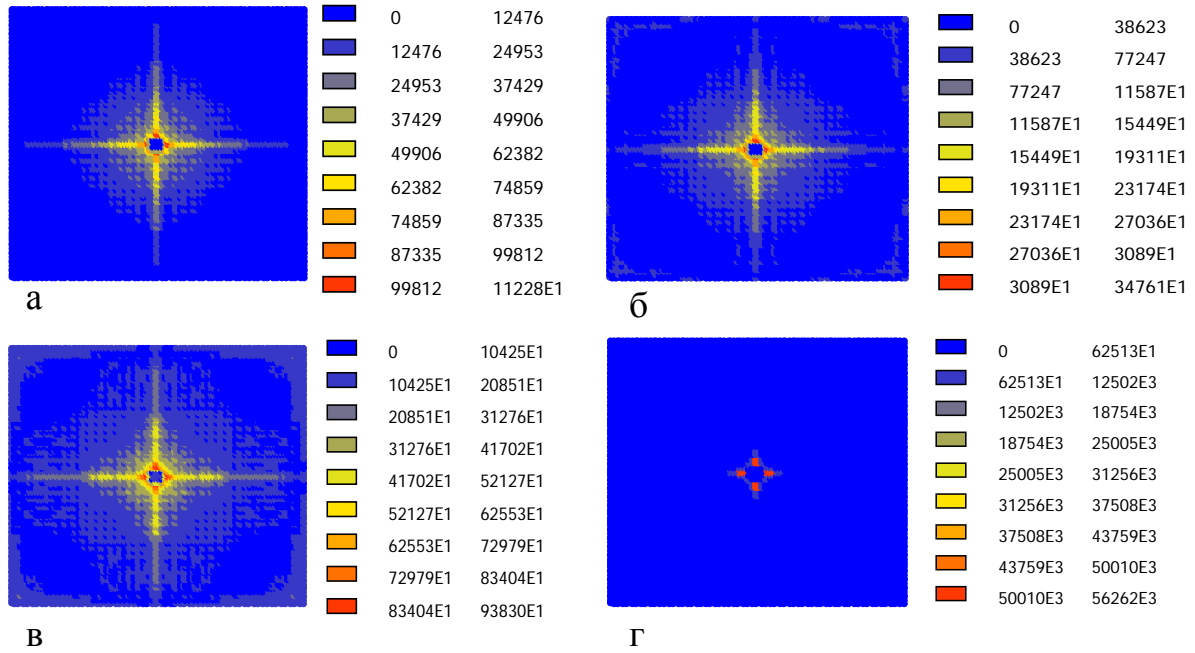


Рисунок 4.24 – Работа растяжения на необратимых деформациях (Дж/м³), при начальной скорости ударника: а – 100 м/с, б – 200 м/с, в – 400 м/с, г – 500 м/с

Покажем распределение работы сил трения на перемещениях нитей (рисунок 4.25).

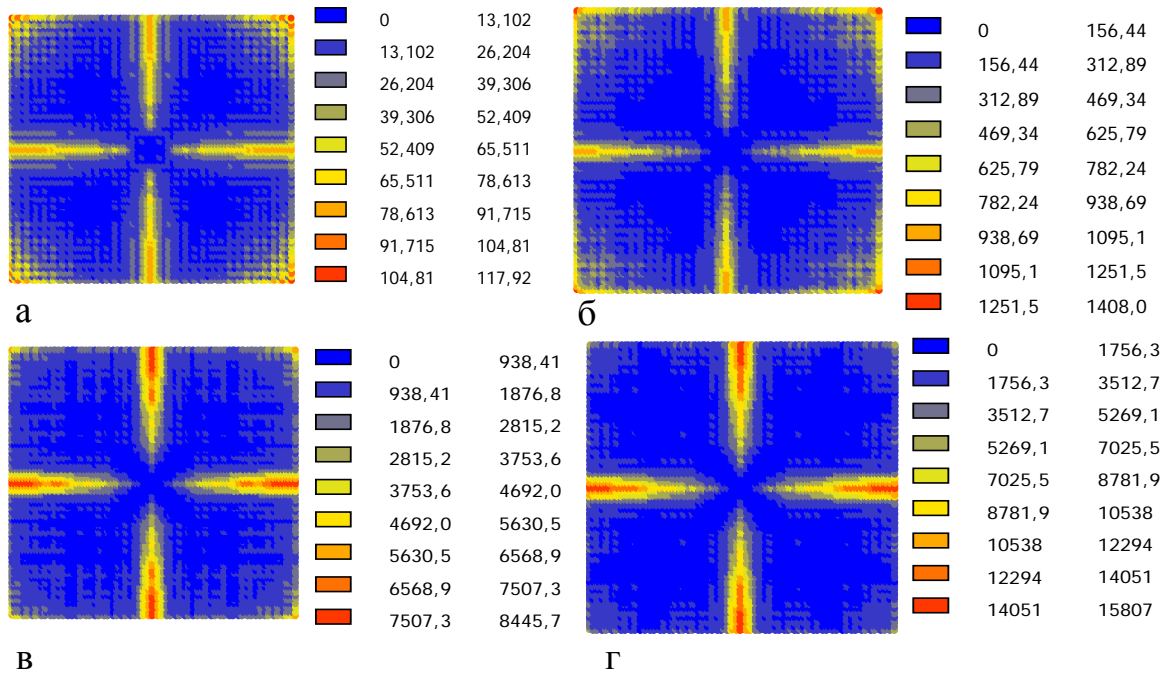


Рисунок 4.25 – Работа сил трения нитей (Дж/м³) при начальной скорости ударника: а – 100 м/с, б – 200 м/с, в – 400 м/с, г – 500 м/с

При различных начальных скоростях поражающего элемента зоны с повышенным значением работы сил трения имеют схожий характер. При этом с ростом начальной скорости зоны с наибольшими значениями становятся более локальными, а сами значения увеличиваются. Такое поведение объясняется тем, что при малых скоростях в процесс движения вовлечены большие площади ткани, тогда как при больших скоростях зоны протергивания выглядят более отчетливо.

Для оценки влияния физико-механических свойств нитей на энергопоглощение было проведено две серии вычислительных экспериментов. В обоих экспериментах рассматривался тканый 24-слойный пакет с нулевым углом армирования. В первой серии экспериментов свойства двух семейств были приняты одинаковыми. Во второй серии экспериментов предельное удлинение нити основы было увеличено в два раза, а начальный модуль растяжения основы был уменьшен в десять раз. Приведем сравнительный анализ полученных результатов. На рисунках 4.26-4.29 буквами а и б обозначены результаты первого и второго эксперимента соответственно.

Рассчитанные поля адиабатической температуры на поверхности тканого пакета приведены на рисунке 4.26.

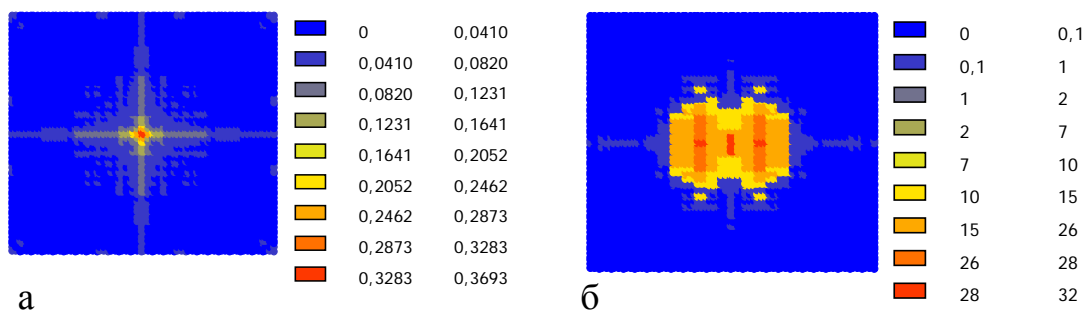


Рисунок 4.26 – Адиабатическая температура: а – при одинаковых характеристиках основы и утка, б – при уменьшении модуля упругости основы в 10 раз

Уменьшение начального модуля упругости нити основы влечет за собой повышение адиабатической температуры. Такое распределение температуры согласуется с результатами расчета, приведенными на рисунке 4.27. Наибольшие значения деформаций (рис.4.27б) превышают предельные значения.

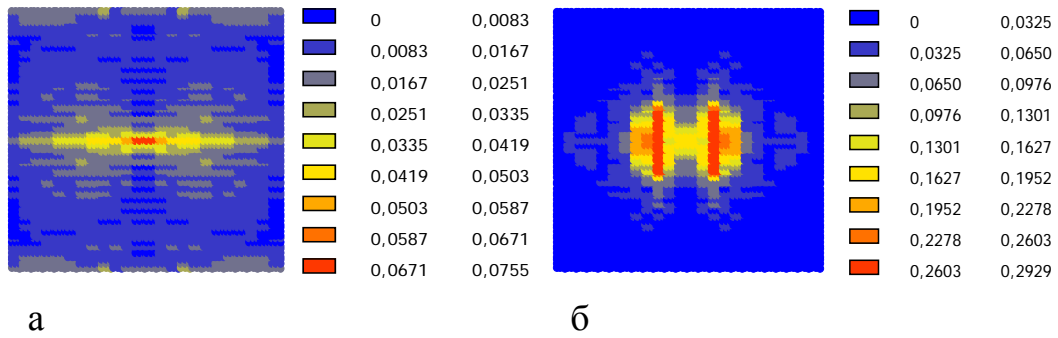


Рисунок 4.27 – Наибольшие деформации вдоль нитей основы: а – при одинаковых характеристиках основы и утка, б – при уменьшении модуля упругости основы в 10 раз

На рисунке 4.28 и 4.29 показано распределение работы сил трения и работы растягивающих напряжений. Результаты показывают, что неравномерность продергивания нитей связано с уменьшением начального модуля упругости.

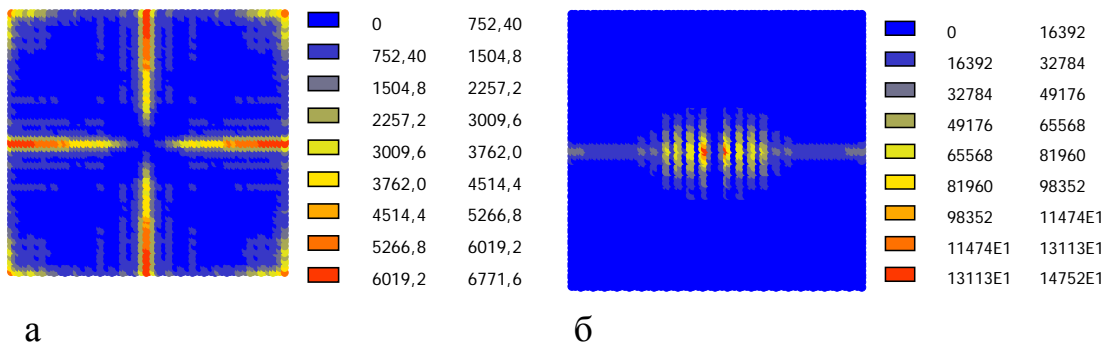


Рисунок 4.28 – Работа сил трения (Дж/м³) на перемещениях нитей слое: а – при одинаковых характеристиках основы и утка, б – при уменьшении модуля упругости основы в 10 раз

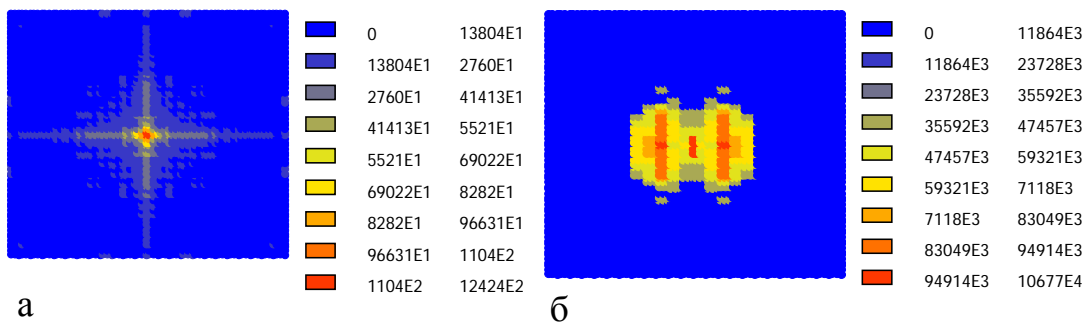


Рисунок 4.29 – Работа растягивающих напряжений в нитях (Дж/м³): а – при одинаковых характеристиках основы и утка, б – при уменьшении модуля упругости основы в 10 раз

Влияние параметров, определяющих силы трения нитей, было исследовано путем изменения параметра вязкости от $5 \cdot 10^3 \text{Па} \cdot \text{с/м}$ до $5 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot \text{с/м}$, при варьировании изменялись параметры обоих семейств нитей.

На рис. 4.30 приведены распределения рассчитанной адиабатической температуры по поверхности ткани.

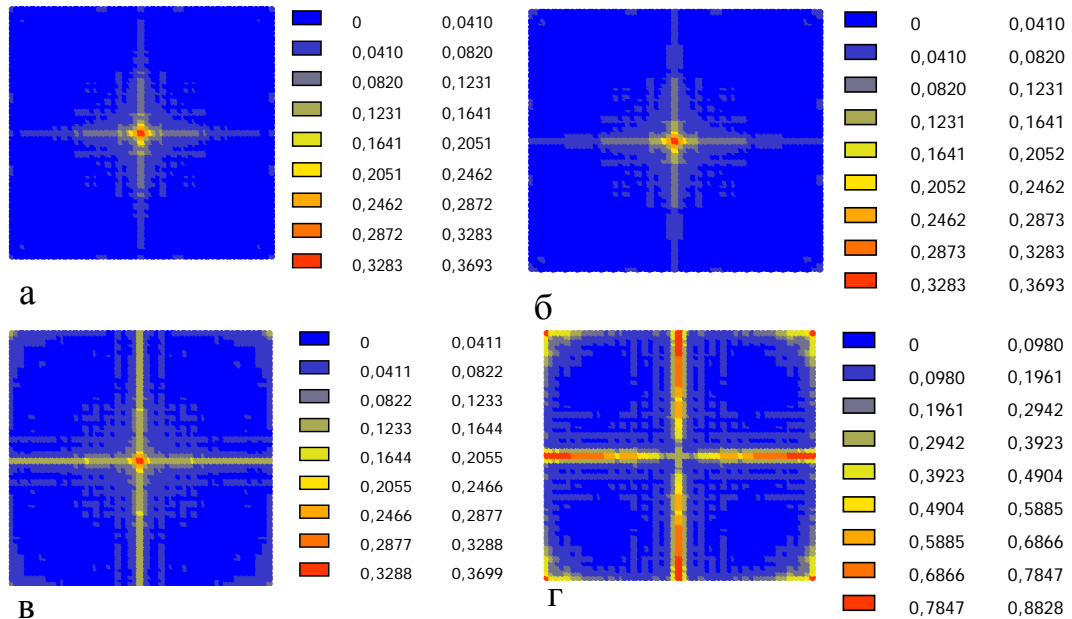


Рисунок 4.30 – Температура на поверхности пакета при коэффициенте вязкости трения нитей: а - $5 \cdot 10^3 \text{Па} \cdot \text{с/м}$, б - $5 \cdot 10^4 \text{Па} \cdot \text{с/м}$, в - $5 \cdot 10^5 \text{Па} \cdot \text{с/м}$, г - $5 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot \text{с/м}$

Рисунки показывают, что увеличение коэффициента вязкости приводит к монотонному повышению наибольшей температуры, при этом характер распределения меняется: от локального распределения в центре до более протяженных крестообразных зон, где максимальные температуры распределены вблизи кромок. Это связано с тем, что при большем коэффициенте вязкости трения требуется большее усилие на продергивание нити, что вызывает повышение температуры на поверхности образца.

Влияние параметров конечно-элементной сетки на относительные перемещения и температуру. Приведенные вычислительные эксперименты требуют значительного времени выполнения. Время выполнения напрямую связано с количеством конечных элементов в модели. Рассмотрим результаты, полученные при различных параметрах густоты конечно-элементной сетки.

Коэффициент сгущения показывает на сколько дополнительно будет разбит конечный элемент:

- коэффициент сгущения 8, сетка 16x16 элементов;
- коэффициент сгущения 12, сетка 24x24 элемента;
- коэффициент сгущения 16, сетка 32x32 элемента;
- коэффициент сгущения, сетка 48x48 элементов.

Для всех экспериментов физико-механические характеристики материала и параметры поражающего элемента принимались одинаковыми.

Покажем на рисунке 4.31 зависимости перемещений вдоль нити основы от времени соударения.

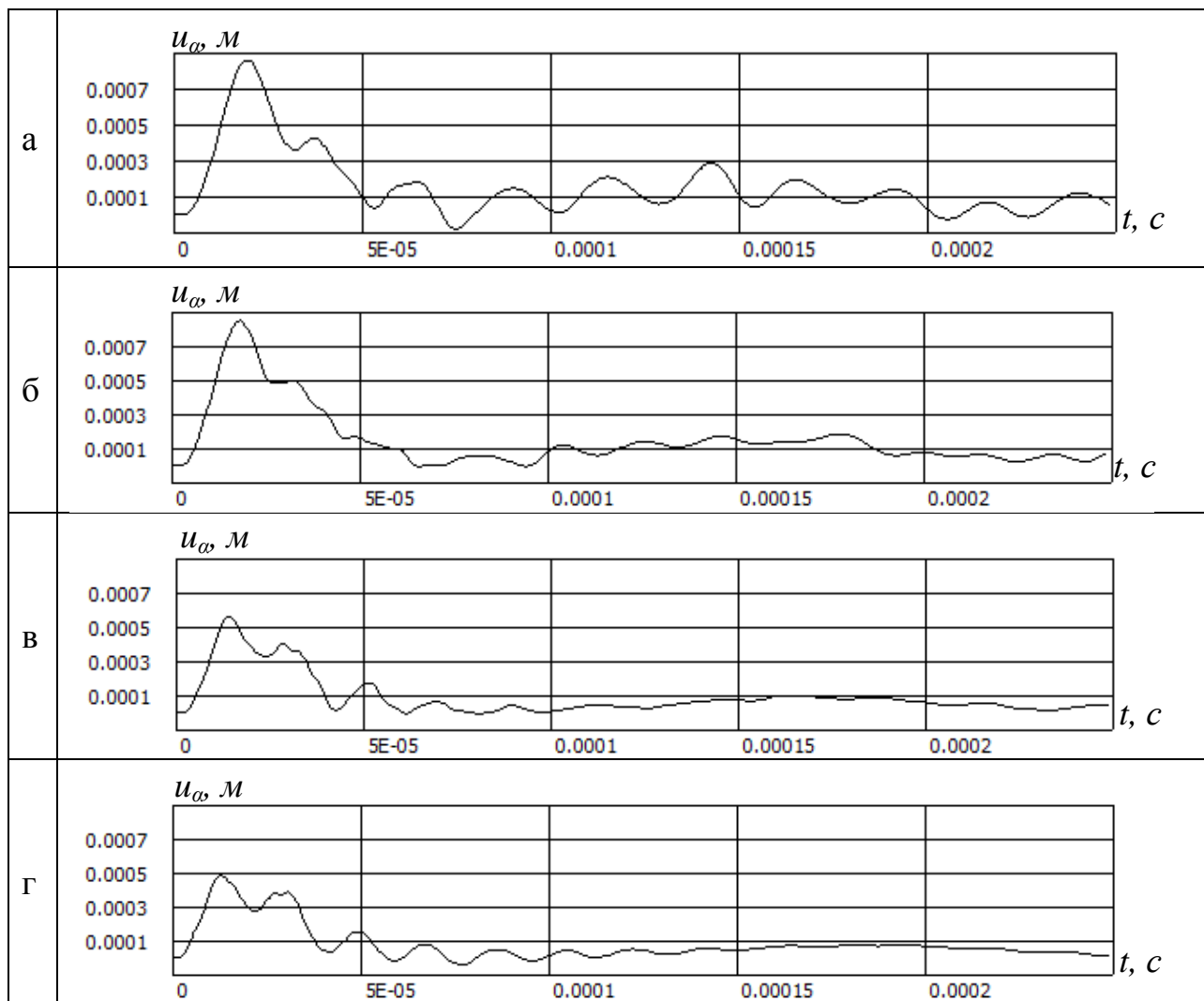


Рисунок 4.31 – Относительные перемещения нити основы при размере сетки: а – 16x16 элементов, б – 24x24 элемента, в – 32x32 элемента, г – 48x48 элементов

Графики на рисунке 4.31 показывают, что перемещения вдоль нити основы имеют меньший разброс значений после временной отметки $5 \cdot 10^{-5}$ сек, а также уменьшение наибольшего значения при сгущении сетки.

Покажем, как изменяется распределение адиабатической температуры при сгущении конечно-элементной сетки (рисунок 4.32).

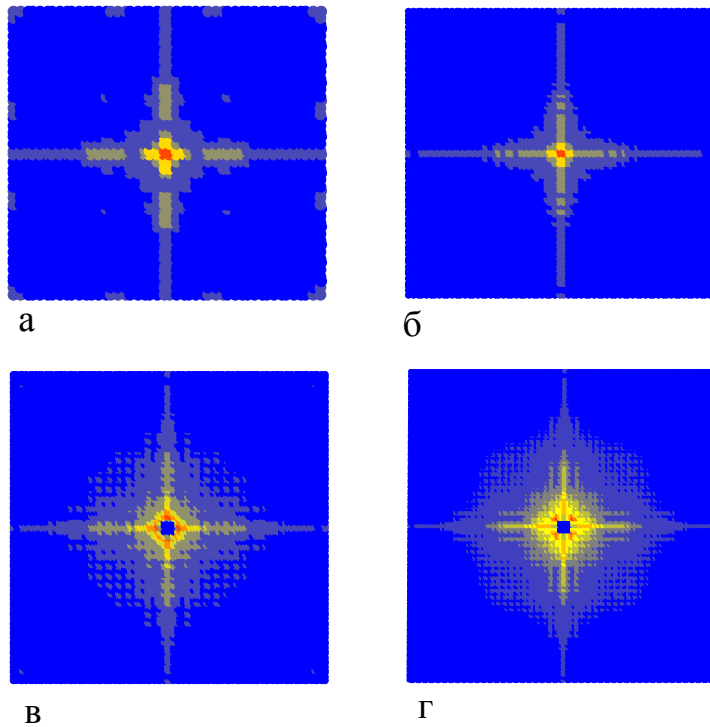


Рисунок 4.32 – Температура на поверхности пакета при густоте сетки: а – 16x16 элементов, б – 24x24 элемента, в – 32x32 элемента, г – 48x48 элементов

Результаты четырех вычислительных экспериментов показывают несущественное изменение наибольшего значения адиабатической температуры, однако наблюдается изменение характера ее распределения из-за большей протяженности зоны с повышенной температурой.

Влияние вязкости основания. В п.2.4 было сказано, что наличие подложки не является обязательным элементом при проведении физических экспериментов. Параметром этого элемента является коэффициент вязкости; при отсутствии основания этот коэффициент принимается равным нулю.

Вычисления были проведены при различном значении коэффициента вязкости основания от $10^5 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ до $10^8 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ (рисунок 4.33).

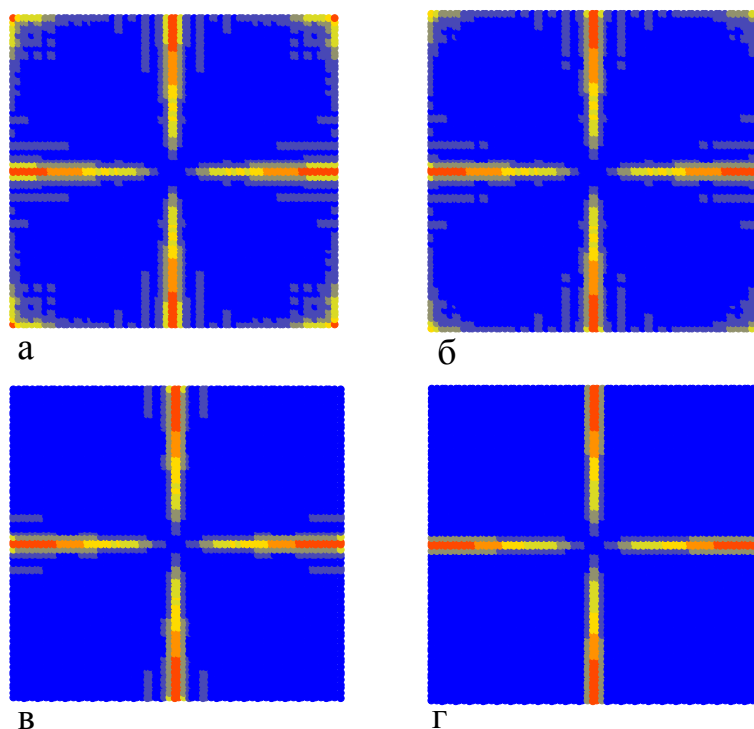


Рисунок 4.33 - Работа сил трения ($\text{Дж}/\text{м}^3$) при проскальзывании нитей: а – коэффициент вязкости основания $10^5 \text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}$, б – $10^6 \text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}$, в – $10^7 \text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}$, г – $10^8 \text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}$

Повышение коэффициента вязкости основания приводит к снижению величины работы сил трения нитей (рис. 4.33), при этом зоны наибольших значений температуры становятся менее протяжёнными.

Исследование влияния теплопроводности на температурное поле. Температурные поля, полученные при вычислительных экспериментах, были получены без рассмотрения процессов теплопереноса в нитях. Рассмотрим эти процессы и оценим их вклад в общий характер распределения температуры.

Полномасштабное моделирование процессов теплопроводности требует значительных вычислительных затрат, поэтому для упрощения примем следующие допущения:

- тканый материал имеет ортотропную структуру;
- внутри тела имеются внутренние источники теплоты, выделяющейся вследствие поглощения кинетической энергии;
- процессы теплообмена с окружающей средой не рассматриваются.

Теплопроводный процесс будем рассматривать в двумерной постановке, не учитывая теплоперенос по толщине слоя.

Согласно закону теплопроводности Фурье плотность теплового потока пропорциональна градиенту и направлена в противоположную сторону [62, 76]:

$$q = -\lambda \cdot \text{grad}T, \quad (4.8)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Характеристики каждого семейства нитей в разных направлениях различаются. Так, коэффициент теплопроводности вдоль укладки каждого из семейства нитей будет ненулевым, а в направлении поперек волокон будет иметь значение близкое к нулевому (рисунок 4.34). Тогда получаем следующее выражение для тепловых потоков:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где λ_x и λ_y – коэффициент теплопроводности вдоль каждого семейства нитей.

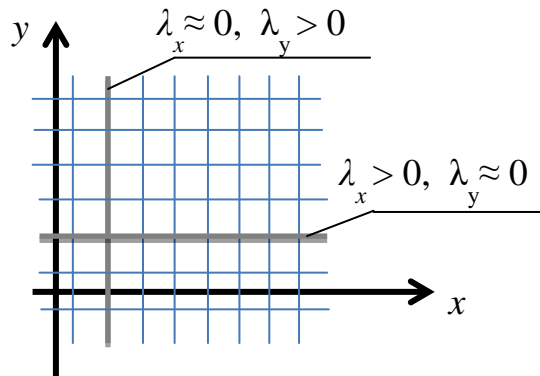


Рисунок 4.34 – Схема нитей с коэффициентами теплопроводности

Исходный тканый материал содержит неодинаковое количество нитей по двум направлениям, при этом в модели сделано допущение, что тканый материал представлен как набор сплошных слоёв с усреднёнными по пространству физико-

механические и термодинамические параметры. Тогда получаем плотности тепловых потоков для двух направлений:

$$q_x^* = \frac{q_{xосн} \sum_i^n F_i}{F_{сеч}}, q_y^* = \frac{q_{yутк} \sum_i^n F_i}{F_{сеч}}, \quad (4.10)$$

где $\sum_i^n F_{осн_i}$ и $\sum_i^n F_{утк_i}$ - сумма площадей сечение нитей основы и утка,

$F_{сеч}$ - общая площадь сечения.

С учетом допущения, что тепловой поток распределяется по двум направлениям x и y , получаем двумерное дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f, \quad (4.11)$$

где f – тепловые источники, присутствующие в среде,

c - удельная теплоемкость,

ρ – плотность.

Решением данного уравнения является тепловое поле в тканом образце в фиксированные моменты времени.

Согласно экспериментальным и расчетным данным [43, 105] максимальные значения температур наблюдаются в месте контакта ударника с тканой преградой и в крестообразных зонах с наибольшим перемещением нитей. В силу кратковременного взаимодействия поражающего элемента и слоистой тканой преграды, процессы распределения температур будем наблюдать в течение некоторого времени после этого взаимодействия.

Для упрощения задачи рассмотрим процесс в одномерной постановке, соответствующей распространению тепла в нити. Запишем одномерную задачу теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + c\rho \frac{\partial T_{ад}}{\partial t}, \quad (4.12)$$

здесь в качестве тепловых источников принимается известное поле распределения адиабатической температуры T_{ad} . Запишем условия симметрии распределения температуры:

$$T_{ad}(x, t) = T_{ad}(-x, t), \quad (4.13)$$

начальные условия, соответствующие распределению адиабатической температуры:

$$T_{ad} = f(x) \cdot t, \quad (4.14)$$

и граничные условия:

$$\Delta T(x, 0) = 0 \leq x \leq L, \quad \Delta T(\infty) = 0, \quad (4.15)$$

где L – длина нити.

Примем в качестве неизвестной величины в уравнении (4.12) величину изменения температуры за счет теплопроводности:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} - a \nabla^2 \Delta T = a \nabla^2 T_{ad}, \quad (4.16)$$

где a – коэффициент температуропроводности, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$.

Применяя аппроксимацию для шага времени τ , запишем (4.16) в виде неявной разностной схемы:

$$\frac{u_n^{t+1} - u_n^t}{\tau} - a \frac{u_{n-1}^{t+1} - 2u_n^{t+1} + u_{n+1}^{t+1}}{h^2} = a \frac{f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}}{h^2} \cdot \tau, \quad (4.17)$$

где u_i^j – изменение температуры в i – узле в j – момент времени,

h – шаг сетки разбиения.

Решением системы (4.17) будут изменения температуры в точках нити в дискретные моменты времени.

В качестве примера рассмотрим нить длиной 0,05 м с заданной плотностью $\rho = 1400 \text{ кг/м}^3$, удельной теплоемкостью $c = 2000 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0.04 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$. Начальную температуру зададим равную 100°C .

На рисунке 4.35 приведена зависимость изменения температуры от расстояния до точки нагрева в разные моменты времени.

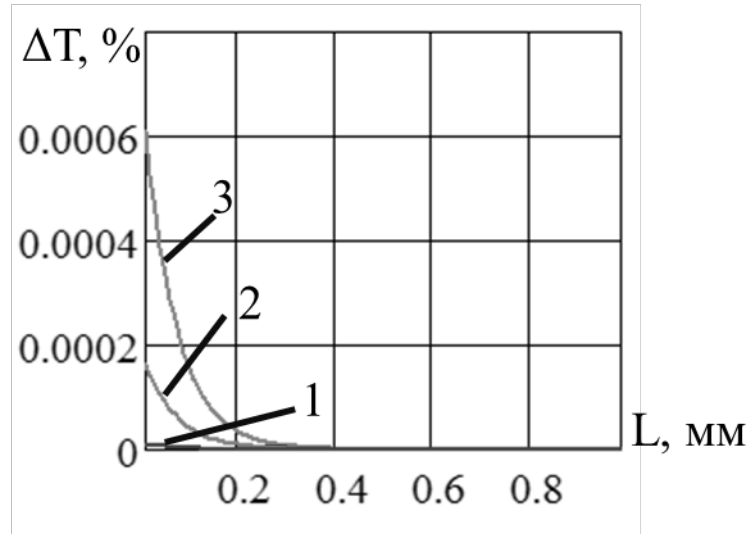


Рисунок 4.35 –Изменение температуры за времена: 1–0,1 мс, 2–1 мс, 3–10 мс

Из графика видно, что изменение температуры на 0,0006 % наблюдается только в зоне нагрева и по прошествии 10 мс. Таким образом, в течение времени соударения температура остаётся близкой к адиабатической.

Для сопоставления результатов приведем зависимости изменения температуры в зоне нагрева и на расстоянии 5 мм от нее (рис. 4.36).

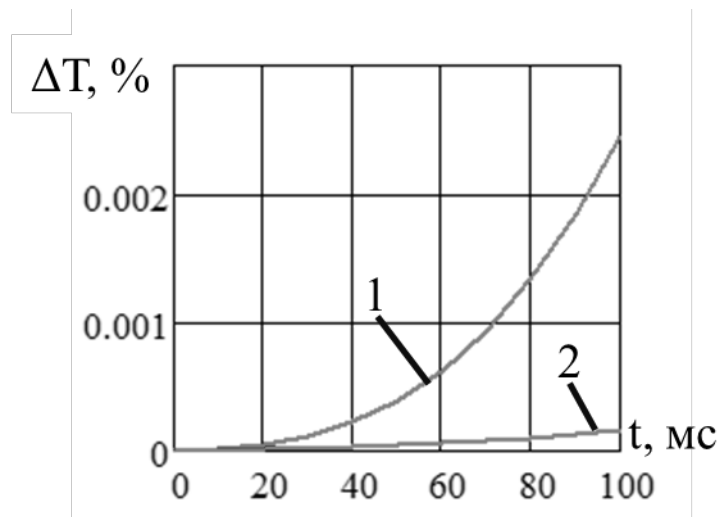


Рисунок 4.36 – Изменение температуры в зависимости от времени: 1 – в зоне нагрева, 2 – на расстоянии 5 мм от нагретой зоны

Анализ графиков позволяет сделать вывод, что даже спустя 100 мс после соударения наибольшее изменение температуры составляет 0,0025% от начальной величины нагрева.

Оценка влияния теплоотдачи в воздух может быть получена по известной формуле изменения температуры нагретого тела при двусторонней свободной конвекции в воздух [62]:

$$T(t) = T(0) \cdot e^{-\frac{ht}{2c\rho_s}}, \quad (4.18)$$

где h – коэффициент теплоотдачи,

ρ_s – поверхностная плотность ткани.

Оценка также показывает незначительное изменение температуры. За время порядка 100 мкс при коэффициенте теплоотдачи в воздух 10 Вт/м²/К температура однослойной ткани поверхностной плотностью 2 кг/м² уменьшается не более чем на 0,05% от разности температур её поверхности и окружающей среды.

Тем самым можно сделать вывод о незначительном вкладе процессов теплопроводности в распределение температуры в тканом образце.

4.4 Сопоставление динамических температурных полей с данными эксперимента

Натурные эксперименты производились в АО ЦНИИСМ путём удара стального шарика в многослойную текстильную преграду при варьировании начальной скорости ударника. При соударении поверхность соударения регистрировалась тепловизором. На рисунке 4.37 приведена схема эксперимента. Эксперименты проводились О.Н. Будадиным и С.О. Козельской, интерпретация данных измерений выполнена автором. Отметим, что выбор стального шарика в качестве поражающего элемента обоснован в [22, 74].

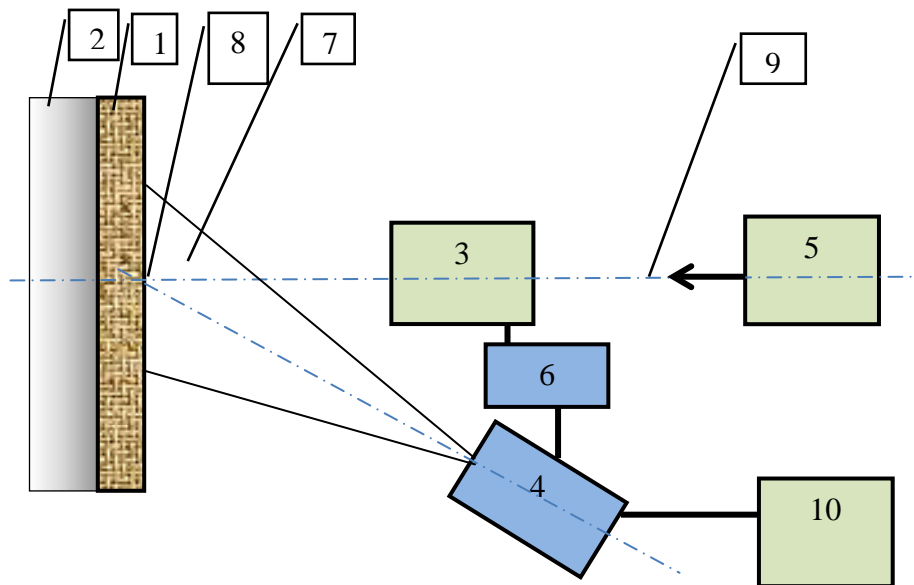


Рисунок 4.37 - Схема экспериментальной установки: 1 – исследуемый многослойный пакет ткани, 2 – пластилиновый блок (при наличии), 3 – устройство для регистрации скорости ударника, 4 – тепловизионная система ИРТИС-2000, 5 – устройство для стрельбы, 6 – датчик начала движения поражающего элемента, 7 – поле обзора тепловизора, 8 – место удара, 9 - вектор скорости поражающего элемента, 10 – система обработки данных

Экспериментальная установка включает многослойный тканый образец, расположенный между подложкой и стреляющим устройством; устройство для регистрации скорости ударника 3, тепловизионную систему 4, систему обработки данных 10 и датчик начала движения 6. Тепловизор 4 расположен так, чтобы его поле обзора охватывало место соударения. Вход устройства 6 подключено к выходу устройства 3, а выход устройства 6 подключен ко входу тепловизионной системы 4. Выход системы 4 подключен к входу системы 10.

Исследовался многослойный тканый пакет на основе арамидных волокон РУСАР с различными типами переплетения и суммарная поверхностной плотностью пакета. Эксперимент заключался в обстреливании слоистого пакета стальными шариками диаметром 6,3 мм и массой 1,05 г. Регистрация температурного поля производилась тепловизором ИРТИС-2000.

Всего было проведено 3 серии экспериментов с различной начальной скоростью ударника: при скорости 300 м/с проведено 48 испытаний, при скорости 400 м/с – 33 испытания и при скорости 500 м/с 29 испытаний. При условиях, подобным при выполнении натуральных испытаний, были проведены вычислительные эксперименты с варьированием начальной скорости поражающего элемента (рис. 4.36).

На рисунке 4.38 приведены зафиксированные термограммы тканого материала после взаимодействия с ударником и рассчитанные температуры.

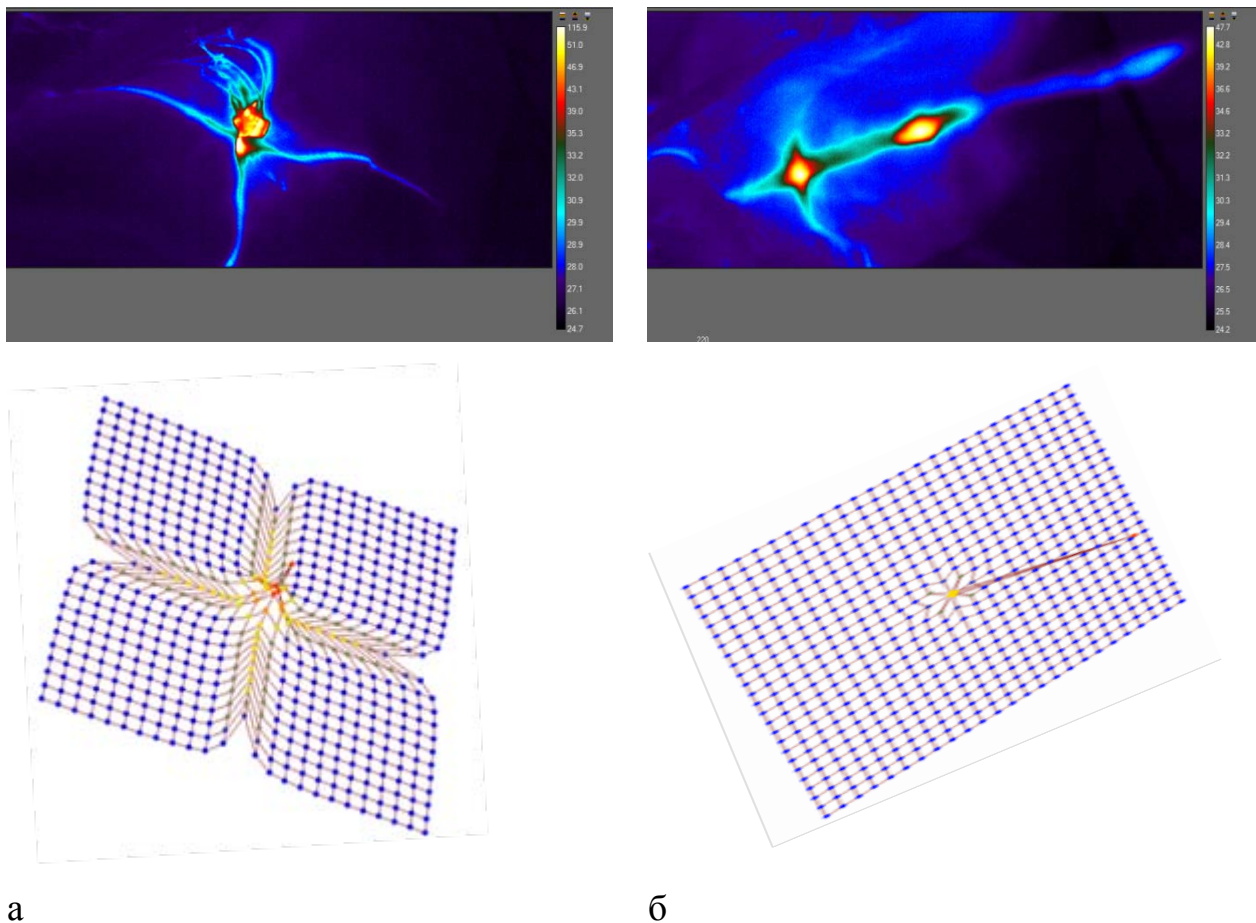


Рисунок 4.38 – Термограммы образца (вверху) и результаты вычислительного эксперимента (внизу) при скорости ПЭ: а – 300 м/с, б – 500 м/с

На термограммах рисунка 4.38 (вверху) зарегистрирована температура в зоне контакта ПЭ и тканой преграды, значительно повышенная по сравнению с начальной. Однако характер распределения температуры на термограммах

различен. Это связано с тем, что в первом случае ткань не пробила, тогда как во втором эксперименте произошел пробой.

На рисунке 4.38 внизу показаны деформированные формы слоистой тканой оболочки при соударении с поражающего элемента, цветом указаны температуры в узлах конечно-элементной модели. На рисунке 4.35а наибольшие перемещения наблюдаются в крестообразных зонах от центра к кромкам по направлению укладки нитей, как следствие в этих же зонах видно повышение температуры. Другой результат наблюдается на рисунке 4.35б, здесь зона с наибольшими перемещениями и повышенной температурой на поверхности тканого образца локализована в месте соударения с поражающим элементом. Неограниченный рост перемещений в месте соударения (рисунок 4.35б) свидетельствует о возможности пробития. Для подтверждения этого предположения требуются результаты по действующим деформациям и напряжениям. В рассматриваемом случае превышено значение предельной деформации.

Таким образом, результаты математического моделирования могут быть согласованы с данными эксперимента путём выбора настроечных параметров модели.

4.5 Анализ распределения поглощенной энергии по слоям ткани

Кинетическая энергия поражающего элемента в процессе взаимодействия с многослойным пакетом затрачивается на работу сил трения при продёргивании нитей и проскальзывании слоев, работу растяжения нитей, передача энергии нитям ткани, которая рассеивается в виде тепла.

Исследовалось поглощение кинетической энергии тканого 15-слойного образца. Объемная плотность материала принята равной 1450 кг/м^3 , а поверхностная плотность 2 кг/м^2 . Поражающим элементом выступал стальной шарик массой 1,05 г.

Построим распределение суммарной поглощенной энергии по слоям тканого пакета (рис. 4.39).

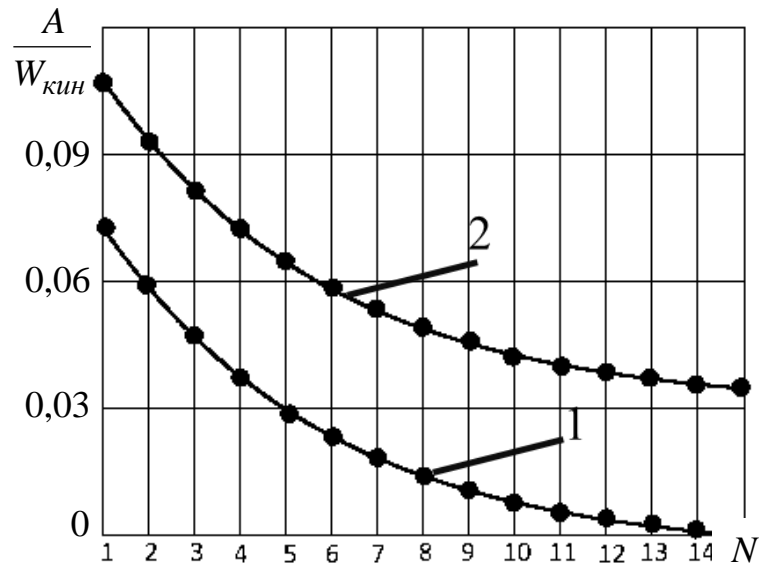


Рисунок 4.39 – Зависимость суммарной поглощенной энергии от номера слоя: 1 – в начале оболочечной стадии, 2 – в момент 10 мс от её начала

На рисунке 4.39 график 1 показывает распределение суммарной поглощенной энергии в начале оболочечной стадии и имеет вид убывающей кривой. Суммарная поглощенная энергия максимальное значение имеет в лицевом слое, и далее убывает до достижения обратного слоя. Кривой 2 обозначена кривая зависимости поглощенной энергии по истечении 10 мс от начала оболочечной стадии. Кривая 2 повторяет форму кривой 1 с увеличением величины поглощенной энергии.

Покажем распределение поглощенной суммарной тканым пакетом в процессе соударения при начальной скорости поражающего элемента 200 м/с и 400 м/с, кинетическая энергия ударника равна 20 Дж и 80 Дж соответственно.

Необратимая работа растяжения (рисунок 4.40) при начальной скорости ударника 400 м/с составляет 14% от кинетической энергии ударника, а при скорости в 200 м/с – менее 2%.

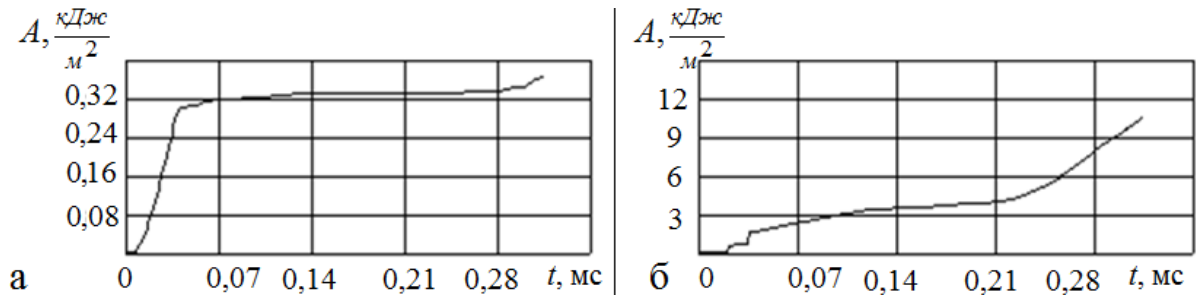


Рисунок 4.40 – Изменение необратимой работы деформаций при начальной скорости ударника: а – 200 м/с, б – 400 м/с

На рисунке 4.41 наблюдаются противоположный результат. Работа внутреннего трения при скорости 200 м/с составляет 50%, а при начальной скорости 400 м/с всего 10-7%. Эти результаты не противоречат известным представлениям.

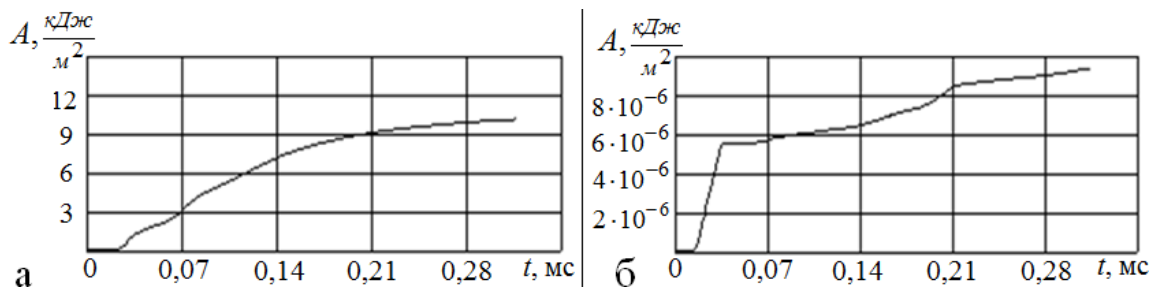


Рисунок 4.41 – Изменение работы сил трения при начальной скорости ударника: а – 200 м/с, б – 400 м/с

Выводы по главе 4

1. Разработана компьютерная программа, реализующая решение дискретных уравнений движения многослойного тканого пакета при ударе жестким поражающим элементом, полученных в главе 3, и динамических температурных полей. Программа отличается использованием усовершенствованной математической модели, экономичной схемы расщепления по процессам переносного и относительного движения и позволяет оценивать поглощение энергии удара за счёт необратимого растяжения нитей и трения в ткани.

2. Модифицирован базовый код среды функционально-объектного программирования «Алгозит» путём изменения алгоритма передачи неявного параметра объектам, образующим сеть с побочными эффектами, что сокращает время вычислений и упрощает программирование функциональных классов.

3. Адаптирована к расчёту многослойных тканых пакетов программа подготовки исходных данных о конечно-элементной модели путём написания специализированных типовых скриптов, позволяющих генерировать таблицы разделов данных о модели и выгружать их в и выгружать в требуемом формате, требуемом вычислительной программой. Разработана программа визуализации результатов расчёта динамического деформирования и температурных полей в многослойных тканых пакетах при ударе, позволяющая представлять результаты расчёта в виде, необходимом для сопоставления с данными эксперимента.

4. Тем самым разработан комплекс программ для расчёта динамического деформирования многослойного тканого материала при ударе жестким поражающим элементом и вызванных им динамических температурных полей, реализованный в среде функционально-объектного программирования «Алгозит».

5. Исследованы свойства математической модели деформирования на волновой и на оболочечной стадии. Показана чувствительность модели к варьированию скорости поражающего элемента и физико-механических свойств материала ткани. Найдено, что рассчитанные температуры согласуются с измеренными в физическом эксперименте.

6. Проведено исследование энергопоглощения при ударе жесткого поражающего элемента в многослойный пакет из полимерной ткани, позволившее получить оценки поглощения энергии каждым слоем ткани при различных скоростях удара.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты.

1. Разработана математическая модель деформирования тканого многослойного образца при соударении с жестким воздействующим объектом и тепловыделения в материале, в которой слои ткани рассматриваются как сплошная среда с включёнными в неё нитями, отличающаяся отдельным описанием процессов на стадии начального уплотнения и оболочечного деформирования, учетом различия деформаций слоёв пакета и их взаимного проскальзывания, позволяющая определить деформацию, напряжение, поглощённую энергию и температуру нитей ткани в каждый момент времени.

2. Усовершенствован алгоритм расчета деформаций, напряжений и температурных полей на оболочечной стадии деформирования при начальных условиях, найденных расчётом начальной стадии уплотнения материала, отличающийся расщеплением неявной разностной схемы по процессам в переносном и относительном движении, что позволяет сократить время вычислений.

3. Разработан комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм вычисления динамических напряжений, деформаций, поглощённой энергии и температур, отличающийся представлением программного кода в виде ориентированной сети конечных автоматов с побочными эффектами и наличием программ интерактивной подготовки исходных данных для моделей многослойных тканых пакетов, расчета динамических температурных полей в слоях ткани, а также визуализации результатов расчёта.

4. Установлено, что сходимость численного решения имеет первый порядок относительно шага по времени. Погрешность расчета при начальной скорости поражающего элемента 200 м/с составляет 3,5%, а при начальной скорости 500 м/с – 4,5%. Показана чувствительность к варьированию структурных параметров материала тканой преграды и скорости поражающего элемента.

5. Выполнено комплексное исследование динамических температурных полей в многослойных образцах из полимерной ткани при ударе жестким сферическим элементом. Найдено, что температуры, измеренные в эксперименте, качественно и количественно согласуются с результатами математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баженов, С.Л. О роли трения в диссипации энергии при поперечном баллистическом ударе по ткани / С.Л. Баженов // Высокомолекулярные соединения. Т. 48. – 2006. – № 10. – С. 1916–1920.
2. Барынин, В.А. Современные технологии неразрушающего контроля конструкций из полимерных композиционных материалов / В.А. Барынин, О.Н. Будадин, А.А. Кульков. – М.: Спектр, 2013. – 243 с.
3. Белкин, А.Е. Расчет пластин методом конечных элементов: учеб.пособие / А.Е. Белкин, С.С. Гаврюшин. – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2008. – 232 с.
4. Беляев, А.П. Исследование влияния способа укладки слоев различных типов плетения на защитные свойства многослойной тканевой преграды / А.П. Беляев // Вестник московского университета. Серия 1: математика. Механика. – 2019. – № 1. – С. 61–64.
5. Берендеев, Н. Н. Структурная модель гибкого тканого композита / Н. Н. Берендеев, Д. А. Кожанов, А. К. Любимов // Проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород: ННГУ. – 2015. – С. 162–171.
6. Берендеев, Н. Н. Экспериментальное исследование деформационных свойств тканых композитов / Н.Н. Берендеев // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 68. – С. 213–220.
7. Беспалов, И.А. Новый подход к оценке качества показателя V50 / И.А. Беспалов, П.П. Тимофеев. – Текст: электронный // Научно-исследовательский институт стали. – Раздел сайта «Статьи». – URL: <http://www.niistali.ru/about-company/articles/stati-nashikh-avtorov/> (дата обращения: 28.10.2019).
8. Беспалов, И.А. Особенности взаимодействия имитатора осколка с текстильными бронепакетами под углом от нормали / И.А. Беспалов // Актуальные проблемы защиты и безопасности: труды 14-й Всерос. научн.-практ.

конф. Т. 1: Технические средства противодействия терроризму. – СПб.: Изд-во НПО СМ. – 2011. – С. 102–106.

9. Бова, В.Г. Взаимодействие групп нитей с тканями разных текстильных переплетений / В.Г. Бова, А.И. Тихонова, Ю.И. Ржавцева // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2005. – Вып. (3)140 – 4(141).

10. Богомоллов, А.И. Модели сопротивления деформированию и разрушению дискретно-тканевых преград при ударном нагружении / А. И. Богомоллов, А. Ю. Муйземнек, Е. Д. Карташова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2018. – №2(46). – С. 154–167.

11. Будадин, О. Н. Приближенная модель термомеханических процессов в броневой защите из ткани при взаимодействии с поражающим элементом / О.Н. Будадин, В.О. Каледин, С.О. Козельская, А.Е. Гилёва, Е.А. Вячкина // Контроль. Диагностика. – 2017. – №5. С. 28–33.

12. Будадин, О. Н. Тепловой неразрушающий контроль изделий / О.Н. Будадин, А.И. Потапов, В.И. Колганов [и др]. – М.: Наука, 2002. – 476 с.

13. Будадин, О.Н. Идентификация модели теплового эффекта при разрушении органопластика / О.Н. Будадин, В.О. Каледин, Н.В. Нагайцева, А.Н. Пичугин // Academic science – problems and achievements II: сборник научных трудов. – NorthCharleston, SC, USA 29406. – 2013. – С.175–177.

14. Будадин, О.Н. Исследование возможности повышения информативности теплового контроля полимерных композиционных материалов путем идентификации модели теплового эффекта при их разрушении / О.Н. Будадин, В.О. Каледин, А.Н. Пичугин, Н.В. Нагайцева // Контроль. Диагностика. – 2014. – №6. – С. 35–41.

15. Будадин, О.Н. Теоретические и экспериментальные исследования возможности теплового контроля пространственной конструкции из полимерного композиционного материала в процессе одноосного силового нагружения / О.Н. Будадин, В.О. Каледин, А.А. Кульков, А.Н. Пичугин, Н.В. Нагайцева // Контроль. Диагностика. – 2014. – №5. – С. 72–80.

16. Будадин, О.Н. Исследование влияния волновых процессов, возникающих в слоистом тканом композиционном материале при соударении с поражающим элементом, на энергопоглощение и выделение тепла / О.Н. Будадин, С.О. Козельская, В.О. Каледин, А.Е. Гилёва // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. – № 3. – С. 74-81.
17. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
18. Геронимус, Я. Л. Теоретическая механика. Очерки об основных положениях / Я. Л Геронимус. – М.: Наука, 1973. – 511 с.
19. Годунов, С.К. Разностные схемы. Введение в теорию. / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – изд.2, перераб. и доп. – М., 1977. – 440 с
20. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
21. ГОСТ Р 50744-95. Бронеодежда. Классификация и общие технические требования (с Изменениями N 1, 2, 3, 4): национальный стандарт Российской Федерации : дата введения 1995-07-01. – М.: Госстандарт, 2003. – 9 с.
22. ГОСТ Р 55623-2013 Бронеодежда. Методы испытаний: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2015-01-01. –М.: Стандартиформ, 2014. – 10 с.
23. Гребенюк, И.И. Моделирование параметров пробития композита высокоскоростным поражающим элементом / И.И. Гребенюк, В.А. Лукомец, А.В. Наговицын // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.- Н.Новгород: Нижегородский военный институт инженерных войск. – 2011. – С. 125–126.
24. Григорян, В.А. Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования / В.А. Григорян, И.Ф. Кобылкин, В.М. Маринин, Е.Н. Чистяков; под ред. В.А. Григоряна. – М.: Изд. РадиоСофт, 2008. – 406 с.
25. Григорян, В.А. Расчетная оценка противоосколочной стойкости тканевых защитных структур на основе характеристик энергоемкости / В.А. Григорян, В.М. Маринин, В.А. Хромушин // Вопросы оборонной техники. Сер.15

Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2006. – Вып. 1(142)-2(143) – С.41–44.

26. Гузь, А.Н. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Том 2: Механика элементов конструкций / А.Н. Гузь, Я.М. Григоренко, И.Ю. Бабич [и др]. – Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.

27. Дмитриенко, Ю. И. Численное моделирование ударно-волнового деформирования гибких броневых композитных материалов / Ю.И. Дмитриенко, Ю.В. Беленовская, В.А. Анискович // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – №12. – С. 471–490.

28. Дмитриенко, Ю.И. Анизотропная теория конечных упруго-пластических деформаций / Ю.И. Дмитриенко // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2003. – № 2. – С. 47–61

29. Дмитриенко, Ю.И. Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов / Ю.И. Дмитриенко, И.Д. Дмитриенко // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – № 5. – С. 6

30. Дмитриенко, Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды / Ю.И. Дмитриенко. – М.: Физматлит, 2009. – 610 с.

31. Дмитриенко, Ю.И. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов / Ю.И. Дмитриенко, С.В. Сборщиков, А.П. Соколов, Ю.В. Шпакова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 389–402.

32. Долганина, Н.Ю. Деформирование и разрушение слоистых тканевых пластин при локальном ударе: автореф. дисс. ...канд.тех.наук: 01.02.06 / Долганина Наталья Юрьевна ; Челябинск, 2010. – 22 с.

33. Долганина, Н.Ю. Исследование ударного взаимодействия индентора с тканевыми бронепластинами, расположенными на пластилиновом основании / Н.Ю. Долганина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика – 2012. – №47 (306). – С. 37–45.

34. Долганина, Н.Ю. Моделирование ударных процессов в тканевых бронезиловых и теле человека на вычислительном кластере «СКИФ Урал» / Н.Ю. Долганина, С.Б. Сапожников, А.А. Маричева // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии – 2010. – Т. 11 – №1. – С. 117–126.
35. Долганина, Н.Ю. Оценка баллистического предела и прогиба многослойных тканевых пластин при ударе индентором / Н.Ю. Долганина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Машиностроение – 2010.– №10 (186). – С. 17–23.
36. Зарубин, В.С. Математические модели термомеханики / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – Москва: Физматлит, 2002. –168 с.
37. Зенкевич, О.Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – пер.с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
38. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – Москва: Мир, 1975. – 541 с.
39. Ибатуллина, А.Р. Свойства материалов на основе арамидных волокон и области их применения / А.Р. Ибатуллина // Вестник технологического университета – 2015. – № 2. – С. 270–272.
40. Игнатова, А.М. Принципы и методы оценки баллистических характеристик неметаллических материалов и изделий / А.М. Игнатова, Н.М. Сильников // Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение – Пермский национальный исследовательский политехнический университет. – 2015. – Том 17. – №1. – С. 61–72.
41. Идентификация теплового эффекта деформации: а. с. 2014610191 Рос. Федерация / О.Н. Будадин, В.О. Каледин. Н.В. Нагайцева, А.Н. Пичугин; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет». – № 2013660250; заявл. 07.11.2013; опубл. 20.02.2014, Бюл. №2. – 1 с.

42. Каледин, В. О. Алгоритмизация математических моделей: учеб. пособие для магистрантов / В. О. Каледин, Е. И. Васильева; НФИ КемГУ. – Новокузнецк. – Изд-во НФИ КемГУ, 2014. – 78 с.

43. Каледин, В. О. Исследование возможности контроля качества броневое композиционного материала на основе ткани по анализу динамических температурных полей при взаимодействии с поражающим элементом / В.О. Каледин, А.Е. Гилёва, О.Н. Будадин, С.О. Козельская // Конструкции из композиционных материалов. – 2017. – № 3. – С. 70–82.

44. Каледин, В. О. Функционально-объектное программирование алгоритмов математического моделирования / В.О. Каледин, А.Е. Гилёва // Решетневские чтения: материалы XXI Междунар. науч-практ. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М.Ф. Решетнева (08-11 нояб. 2017, . Красноярск): в 2 ч. – Сиб. гос. ун-т науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева (Красноярск). – 2017. – Ч.2. – С. 323–333.

45. Каледин, В.О. Методика и программная реализация аппроксимации диаграммы деформирования органопластика при одноосном растяжении / В.О. Каледин, Н.В. Нагайцева // IX международная научно-практическая конференция «Научный потенциал мира». – Бял ГРАД-БГ, г. София, Болгария. – Т. 18. Математика. – 2013 – С. 19–24.

46. Каледин, В.О. Открытая архитектура программ для математического моделирования в механике конструкций / В.О.Каледин, Д.И. Глечиков, В.Д. Лактионов // Вестник Московского энергетического института – 2008. – № 4. – С. 14–20.

47. Каледин, В.О. Применение объектной декомпозиции математических моделей при разработке программного комплекса / В.О. Каледин, Е.В. Решетникова, Н.В. Нагайцева, Е.В. Равковская // В мире научных открытий. – 2013. – № 10(46) – С. 121–141.

48. Каледин, В.О. Программная система для алгоритмизации численного решения задач механики сплошной среды / В.О. Каледин, Я.С. Крюкова, Н.В.

Нагайцева [и др] // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – № 1-1 (81). – С. 161–164.

49. Каледин, В.О. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 марта 2017 г., № 2017612895.

50. Каледин, В.О. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Интерпретатор «Ядро»» // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 2 марта 2017 г., № 2017612706.

51. Клебанов, Я. М. Метод обобщенных моделей в задачах нелинейного деформирования тканых материалов / Я. М. Клебанов, Е.Н. Ерохина // Матем. моделирование и краевые задачи. – 2007. – ч. 1. – С. 128–131.

52. Кобылкин, И.Ф. Предельные возможности текстильной и органопластиковой брони / И.Ф. Кобылкин // Вопросы оборонной техники. Сер.16. Технические средства противодействия терроризму. – 2012. – Вып. 9–10. – С. 53–62.

53. Кобылкин, И.Ф. Материалы и структуры легкой бронезащиты / И.Ф. Кобылкин, В.В. Селиванов. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 191 с.

54. Кобылкин, И.Ф. Энергетический подход к определению предельной скорости пробития текстильных бронепакетов / И.Ф. Кобылкин, В.А. Григорян, В.М. Маринин. – Текст: электронный // Научно-исследовательский институт стали. – Раздел сайта «Статьи». – URL: <http://www.niistali.ru/about-company/articles/stati-nashikh-avtorov/> (дата обращения: 28.10.2019).

55. Кожанов, Д. А. Особенности конечно-элементного моделирования вида структурного элемента гибких тканых композитов / Д.А. Кожанов // Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки. – Вып. 1 (237). – Санкт-Петербург; СПбПУ. – 2016. – С. 7–15.

56. Кожанов, Д.А. Моделирование структуры гибких тканых композитов методом конечных элементов для получения диаграммы деформирования / Д.А.

Кожанов // Материалы 4-й Всероссийской интернет конференции «Грани науки – 2015». – 2015. – С. 188–189.

57. Кройтор, О.К. Моделирование пробивания плоских преград в Ansys autodyn / О.К. Кройтор // Аллея науки. – 2017. – Т. 2. – №10. – С. 241–245.

58. Куканов, С.А. Математическое моделирование взаимодействия поражающего элемента с тканевой противоосколочной защитной композицией / С.А. Куканов, И.А.Спивак // Вопросы оборонной техники. Серия 16. – Научно-производственное объединение специальных материалов (Санкт-Петербург). – 2011. – № 7-8. – С. 48–53.

59. Куперман, А.М. Исследование структурных характеристик арамидных нитей / А.М. Куперман, А.Я.Геренберг, В.Г. Иванова-Мумжиева [и др] // Вопросы оборонной техники. Сер.15 Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2014. – Вып. 4 (167) – С. 24–32.

60. Ландовская, И.Е. Соединение деталей при компьютерном моделировании сборки изделий из тканых материалов с учетом их деформационных свойств / И.Е. Ландовская, В.Д. Фроловский, В.В. Ландовский // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 3(28). – С. 61–74.

61. Легкие баллистические материалы / пер. с англ. под общ. ред. С. Л. Баженова. – Москва: Техносфера, 2011.– 392 с.

62. Лыков, А. В. Теория теплопроводности: учеб.пособие / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

63. Любимов А.К. Моделирование вида структурного элемента гибких тканых композитов при статическом растяжении с применением метода конечных элементов в ANSYS / А.К. Любимов, Д.А. Кожанов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 113–120.

64. Методы исследования прочностных характеристик высокомодульных нитей и тканых материалов: учеб. пособие / С.Б. Сапожников, О.С. Буслаева, А.В. Понькин, С.И. Шульженко. – Челябинск: изд-во ЮУрГУ, 2001. – 23 с.

65. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Е.М. Морозов, А.Ю. Муйземнек, А.С. Шадский. – Москва: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
66. Мортон, В.Е. Механические свойства текстильных волокон / В.Е. Мортон, Д. Хёрл. – М.: Легкая индустрия, 1971. – 194 с.
67. Моссаковский, П. А. Исследование процесса пробивания многослойной преграды из тканого композита с нанокompозитной пропиткой / П. А. Моссаковский, М. Е. Колотников, Ф. К. Антонов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2009. – № 10. – С. 151–155.
68. Моссаковский, П.А. Экспериментальное исследование и конечно-элементный анализ тканых композитов в условиях ударного нагружения / П.А. Моссаковский, Ф.К. Антонов, Т.А. Белякова [и др] // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2014. – № 76 (1). – С. 39–45.
69. Моссаковский, П.А. Исследование диссипативных факторов при пробивании многослойных тканых преград / П.А. Моссаковский, В.В. Баландин, А.П. Беляев, Т.А. Белякова [и др] // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2015. – Т. 77. – №4. – С. 385–392.
70. Муйземнек, А.Ю. Модели сопротивления деформированию и разрушения тканей из арамидных нитей при ударном нагружении / А. Ю. Муйземнек, В. Я. Савицкий // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. – 2016. – № 3 (19). – С. 168–179.
71. Муйземнек, А.Ю. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS-DYNA: учебное пособие / А.Ю. Муйземнек, А.А. Богач. – Пенза: Информационно-издательский центр ПТУ, 2005. – 106 с.
72. Нехорошкина, М.С. Методика определения доли энергии удара, поглощенной тканью или пакетом тканей / М.С. Нехорошкина, П.Н. Рудовский // *Известия ВУЗов. Технология текстильной промышленности*. – 2015. – №1. – С. 53–56.
73. Норден, А.П. Теория поверхностей / А.П. Норден. – М.: ГИТТЛ, 1956.

74. Обоснование формы индентора при экспериментальном исследовании способности ткани предохранять от удара / М. С. Нехорошкина, П. Н. Рудовский, Г. К. Букалов, Е. В. Кривошеина // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – 2014. – №5. – С. 40–42.
75. Образцов, И.Ф. Метод конечный элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учеб. пособие для студентов авиац. спец. / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
76. Охотин, А.С. Теплопроводность твердых тел: Справочник / А.С. Охотин, Р.П. Боровикова, Т.В.Нечаева, А.С. Пушкарский; под ред. А.С. Охотина. – М. Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.
77. Перепелкин, К.Е. Армирующие волокна и волокнистые полимерные композиты / К.Е. Перепелкин. – СПб.: Научные основы и технологии, 2009.
78. Программа расчета динамических температурных полей в многослойном композиционном материале при ударе: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2017615345, Рос. Федерация / заявитель и правообладатель Каледин В.О., Будадин О.Н., Гилева А.Е, Козельская С.О. – №2017612112; заявл. 15.03.2017; зарегистр. 12.05.2017; опубл. 12.05.2017, бюл. №5. — 1 с.
79. Псахье, С.Г. Метод подвижных клеточных автоматов как инструмент физической мезомеханики материалов / С.Г. Псахье, С.Ю. Коростелев, А.Ю. Смолин [и др] // Физическая мезомеханика. – 1998. – №1. – С. 95–108.
80. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб.пособие для вузов / Ю.Н. Работнов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
81. Рахматулин, Х. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. – Москва: Физматиз, 1961. – 399 с.
82. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – Издательство: Наука, 1983. – 616 с.

83. Солдатенков, И. А. Нелинейная износоконтактная задача для основания Винклера (постоянная область контакта) / И.А. Солдатенков // Трение и износ. – 2006 – №3(27). – С. 245–256.
84. Тазетдинов, Р.Г. Баллистическая стойкость тканевого бронепакета для авиационного бронежилета / Р.Г. Тазетдинов, В.А. Твердохлеб, Г.С. Тибрин // Труды МАИ. – 2013. – № 70. – С. 20.
85. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел / Под ред. А.В. Герасимова. – Томск: Изд-во Томского университета, 2007. – 572 с.
86. Тихонов, И.В. Арамидные нити Русар-НТ и сферы их применения / И.В. Тихонов, Т.Е. Черных, Л.Б. Шиянова [и др] // Полимерные композиционные материалы нового поколения для гражданских отраслей промышленности: сб. докл. науч. конф. – М.: ВИАМ. – 2015. – Ст. 02.
87. Ткачук, Н.А. К вопросу создания интегрированных специализированных систем для моделирования процессов пробивания преград / Н.А. Ткачук, Г.Д. Гриценко, Я.Н. Бараников, А.В. Литвиненко // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»: сб. науч. тр. Темат. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – № 3. – С. 165-173.
88. Харченко, Е.Ф. Неметаллические броневые материалы / Е.Ф. Харченко // Вопросы оборонной техники. Сер.15 Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2013. – Вып. 1(168) – С.46–53.
89. Харченко, Е.Ф. Композитные, текстильные и комбинированные бронематериалы. Т. 1. Механизмы взаимодействия с баллистическими поражающими элементами / Е.Ф. Харченко, А.Ф. Ермоленко. – Москва: ОАО «ЦНИИСМ», 2013. – 294 с.
90. Харченко, Е.Ф. Некоторые тенденции развития и пути совершенствования средств защиты из новых материалов / Е.Ф. Харченко. // Вопросы оборонной техники. Серия 15. – 1996. – Вып. 1-2. – С. 5–8.
91. Харченко, Е.Ф. Новые представления о механизме взаимодействия текстильных материалов с пулями и осколками при проектировании

высокоэффективных бронематериалов / Е.Ф. Харченко // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2004. Вып. 3(136) – 4(137).

92. Шманёв, А.Н. Разработка методик оценки качества баллистических тканей с учетом условий эксплуатации / А.Н. Шманёв, Ю.С. Шустов, А.В. Курденкова, Я.И. Буланов // Инновационное развитие легкой и текстильной промышленности: сборник материалов Всероссийской научной студенческой конференции ИНТЕКС. – 2015. - Часть 1. – 2015. – С. 99–101.

93. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Яблонский А.А., Никифорова В.М. – изд.12-е, исправленное. – М.: Интеграл-Пресс, 2006.

94. Янковский, А.П. Моделирование динамического поведения армированных цилиндрических оболочек при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции / А.П. Янковский // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – №2. – С. 133–146.

95. Batoz, J.L Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element / J.L. Batoz, Ben Tahar M. // International J. for Numerical Methods in Engineering. – 1982. – Vol. 18. – P. 1655–1677.

96. Bazhenov, S.L. Dissipation of energy by bulletproof aramid fabric / S.L. Bazhenov // Journal of Material Science. – 1997. – Vol. 32. – P. 4167–4173.

97. Blankenhorn, G. Improved Numerical Investigations of a Projectile Impact on a Textile Structure / G. Blankenhorn // 4th European LS-DYNA Users Conference: Proceedings of the European Users Conference. – 2003. – P. G-I-07– G-I-14.

98. Daihua, Z. Numerical Modeling of Friction Effects on the Ballistic Impact Response of Single-Ply Tri-Axial Braided Fabric / Daihua Zheng, Jingyun Cheng, Wieslaw K. Binienda // 9-th International LsDyna Users Conference. – Detroit MI. – 2006.

99. Gu, B. Analytical modeling for the ballistic perforation of planar plain-woven fabric target by projectile / B.Gu // Compos Part B. – 2003(34). – P. 361–371.

100. Guiberteau, F. Effect of Grain Size on Hertzian Contact Damage in Alumina / Guiberteau F., Padture N.P., Lawn B.R. // *J. Am. Ceram. Soc.* – 1994. – №. 77. – P. 1825–1831.
101. Hallquist, J. O. LS-DYNA Theoretical Manual / J. O. Hallquist; Livermore Software Technology Corporation. – Livermore, CA. – 1998.
102. Ha-Minh C. On analytical modelling to predict of the ballistic impact behaviour of textile multi-layer woven fabric / Ha-Minh C, Imad A, Boussu F, Kanit T. // *Compos Struct.* – 2013(99). – P. 462–476.
103. Ha-Minh C. Numerical analysis of a ballistic impact on textile fabric / C. Ha-Minh, A. Imad, T. Kanit, F. Boussu // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2013. – №. 69. – P. 32–39.
104. Jacobs M.J.N. Ballistic protection mechanisms in personal armor / Jacobs M.J.N., Van Dingenen J.L.J. // *Journal of Materials Science.* – 2001. – №.36. – P. 3137–3142.
105. Kaledin, V.O. Modeling of thermomechanical processes in woven composite material at blow by the striking element / V.O. Kaledin, O.N. Budadin, A.Ye. Gilyova, S.O. Kozelskaya // *Journal of Physics: Conf. Series.* – 2017. – Vol. 894 (012019).
106. Kaledin, V.O. Quality control of armor fabric by modeling thermomechanical processes under projectile impact / V.O. Kaledin V.O., A.E. Gileva, O.N. Budadin, S.O.Kozel'skaya // *Russian journal of nondestructive testing.* – 2018. – №5. – P. 363–371.
107. LS-DYNA. Keyword User's Manual .Vol. II. August 2012. Version 971 R6.1.0 / Livermore Software Technology Corporation. – Livermore, CA, 2012.
108. Mamivand, M. A model for ballistic impact on multilayer fabric targets / M. Mamivand, G.H. Liaghat // *International Journal of Impact Engineering.* – 2010. – 37(7). – P. 1056–1071.
109. Microhardness and High-Velocity Impact Resistance of SiC and ZrB₂ / J. Marschall, D.C. Erlich, H. Manning, W. Duppler, D. Ellerby, M. Gasch // *SiC Composites.* – *J. Mater. Sci.* – 2004. – №.39. – P. 5959–5968.

110. Mossakovsky P.A. Experimental investigation and FE analysis of fiber woven layered composites under dynamic loading / Mossakovsky P.A., Antonov F.K., Kolotnikov M.E., Kostyreva L.A. [et.all]// Proceedings of the 12th International LS-Dyna Users Conference. – 2012.
111. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J.N. Reddy; 2nd Ed. Boca Raton: CRC Press, 2003. – 854 p.
112. Setoodeh. Sh. Optimal Design of Variable-Stiffness Fiber-Reinforced Composites Using Cellular Automata; Blacksburg, Virginia, 2005.
113. Sevost'yanov P.A. Modeling fabric sample elongation and breaking dynamics, taking account of random variations and changes in fabric structure and interaction of yarns / Sevost'yanov P.A., Monakhov V.I., Samoilova T.A., Dasyuk P.E. // Fibre Chemistry. – March 2016. – Volume 47, Issue 6. – P 501–504.
114. Smolin, A. Modeling mechanical behaviors of composites with various ratios of matrix–inclusion properties using movable cellular automaton method / A. Smolin, E.V. Shilko, S.P. Buyakova, S. Psakhie et al // Defence Technology. – 2015. – № 11. – P. 18–34.
115. Sueki, S. Pullout–slip response of fabrics embedded in a cement paste matrix / S. Sueki, C. Soranakom, B. Mobasher, A. Peled // J Mater Civil Eng. – 2007. – № 19(9). – P. 718–727.
116. Tabiei, A. Computational micro-mechanical model of flexible woven fabric for finite element impact simulation / A. Tabiei, I. Ivanov // 7-th International LS-DYNA Users Conference. – Dearborn, Michigan. – 2002. – P. 1259–1276.
117. Wang, Y. Digital element simulation of textile processes. / Y. Wang, X. Sun // Composite Science and Technology. – 2001. – № 61. – P. 311–319.
118. Zhou, G. Multi-chain digital element analysis in textile mechanics. / G. Zhou, X. Sun, Y. Wang // Composites Science and Technology. – 2004. – № 62. – P. 239–244.
119. Zhu, D. Experimental study and modeling of single yarn pull-out behavior of Kevlar 49 / D. Zhu, C. Soranakom, B. Mobasher, S.D. Rajan // Composites Part A. – 2011. – №42. – P. 868–879.

120. Zhu, D. Finite element modeling of ballistic impact on multi-layer Kevlar 49 fabrics / Zhu, D., Vaidya, A., Mobasher, B., Rajan, S.D. // Compos. Part B Eng. – 2014(56). – P. 254-262.

121. Shahkarami, A. An Efficient Shell Element Based Approach to Modeling the Impact Response of Fabrics / A. Shahkarami, R. Vaziri // 9th International LSDYNA Users Conference: Proceedings of the International Users Conference (4-6 June 2006, Dearborn). – 2006. – P. 4-1– 4-12.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Функционально-объектные схемы программного комплекса

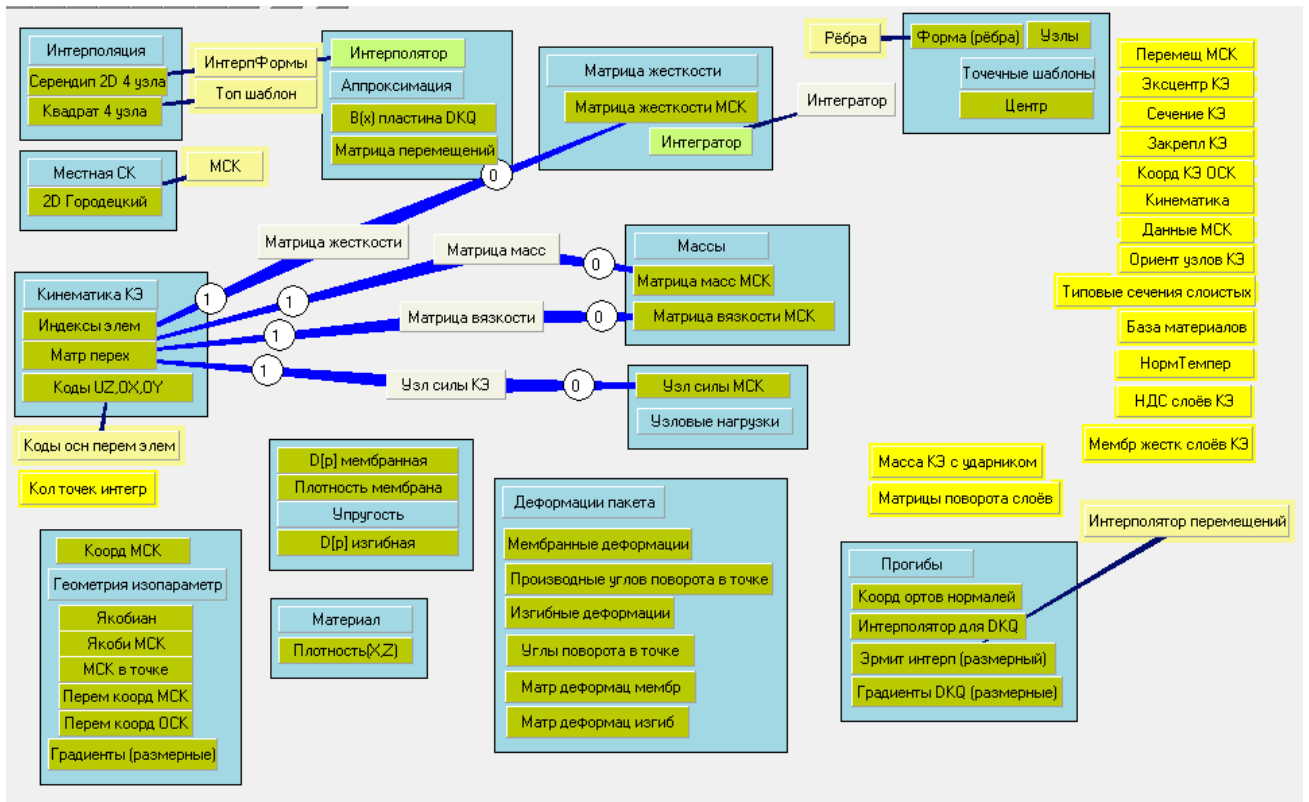


Рисунок А.1 – Страница редактирования функционально-объектной схемы для вычисления локальных матриц элементов многослойного пакета

На страницу помещены агрегаты, включающие ссылки на объекты, вычисление которых реализовано на других страницах функциональных схем. Далее будут приведены функционально-объектные схемы страниц, которые представлены на рисунке 1 в виде агрегатов и которые были специально разработаны для рассматриваемой задачи – формирования локальных матриц многослойного пакета. На странице (рис. 1) в агрегаты включены только те ссылки вниз, которые требуются для вычисления на этой или вышестоящей странице.

Часть включенных на страницу агрегатов были настроены на реализацию рассматриваемого алгоритма путем установки топологического шаблона для

конечного элемента, шаблона точек интегрирования, задание кодов перемещений узлов и других опций, характерных для конечного элемента.

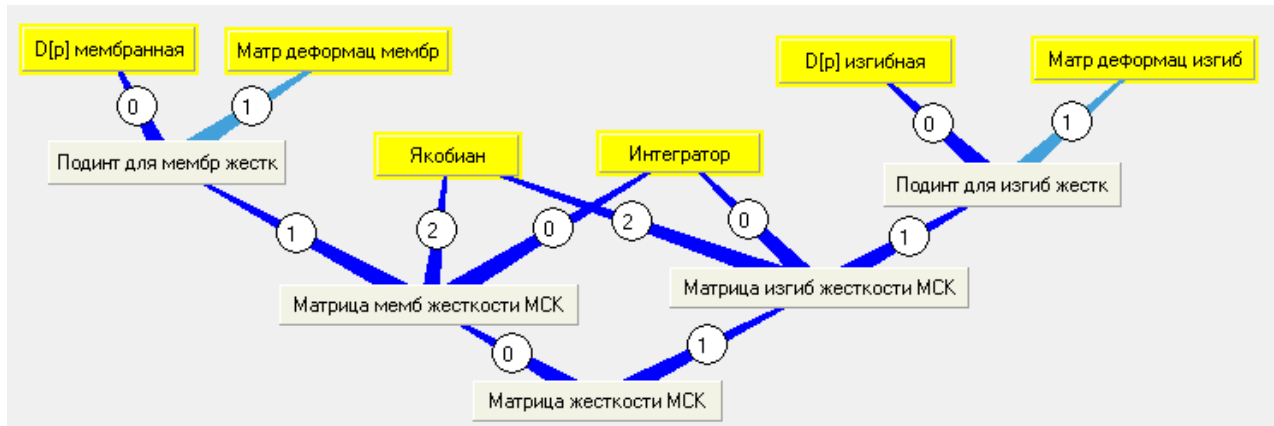


Рисунок А.2 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Матрица жесткости») для вычисления локальной матрицы жесткости элементов многослойного пакета



Рисунок А.3 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Массы») для вычисления локальных матриц масс и вязкости элементов многослойного пакета

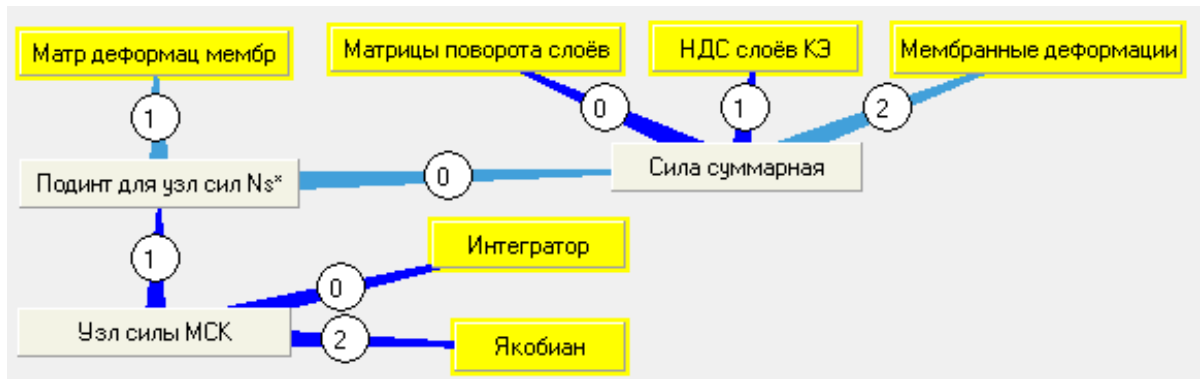


Рисунок А.4 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Узловые нагрузки») для вычисления узловых нагрузок элементов многослойного пакета

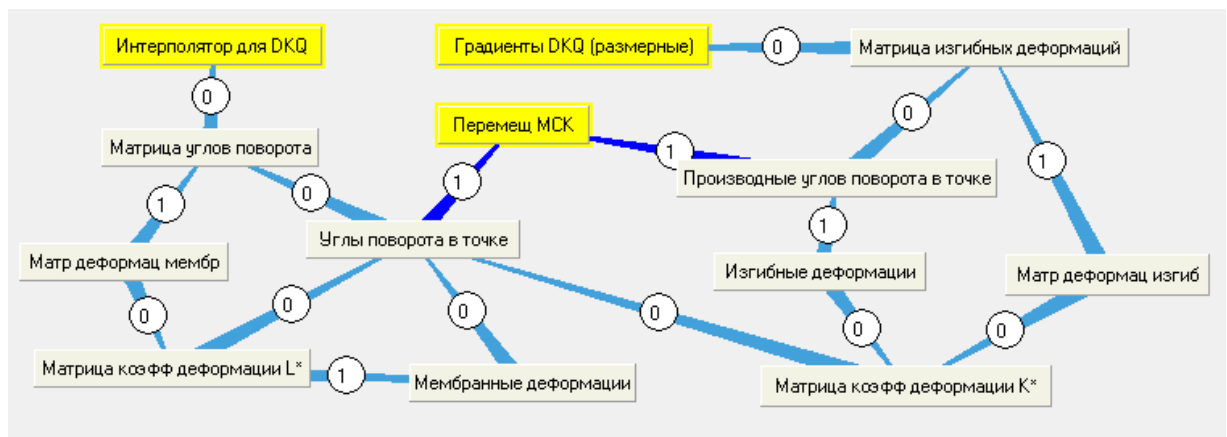


Рисунок А.5 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Деформации пакета») для вычисления деформаций элементов многослойного пакета

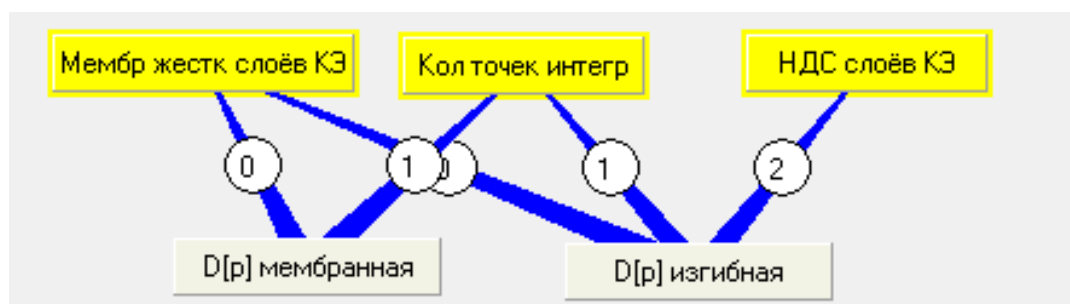


Рисунок А.6 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Упругость») для вычисления матриц упругих характеристик элементов многослойного пакета

Рассмотренные выше страницы (рис. 2-6) являются по отношению к странице на рис. 1 вложенными или нижестоящими, поэтому включенные в них ссылки вверх (объекты желтого цвета) должны быть доступны на вышестоящей странице в виде алгомотов или ссылок с других страниц.

Далее приведена страница для формирования локальных матриц для элемента слоя ткани. Эта страница, также как страница для локальных матриц пакета, включает ссылки с верхней страницы (объекты желтого цвета), агрегаты и алгомоты.

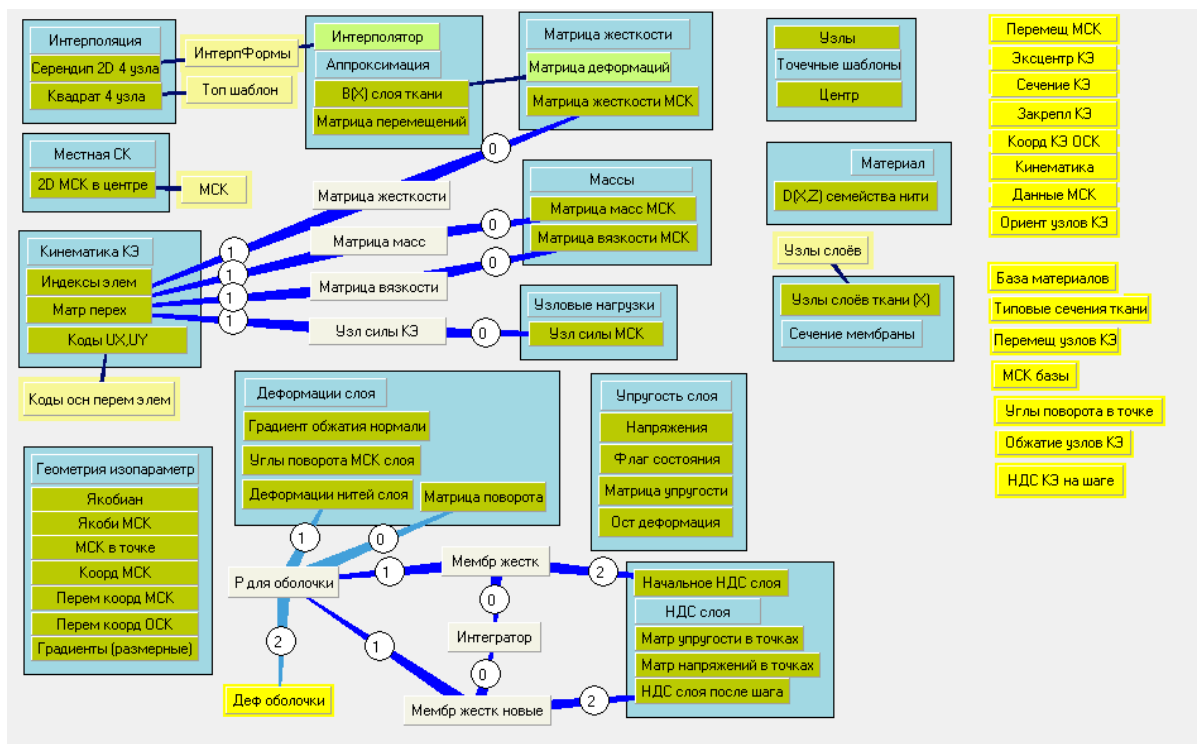


Рисунок А.7 – Страница редактирования функционально-объектной схемы для вычисления локальных матриц элементов слоев ткани

Ниже приведены разработанные страницы, ссылки на которые включены на странице рисунка 7 в виде агрегатов.

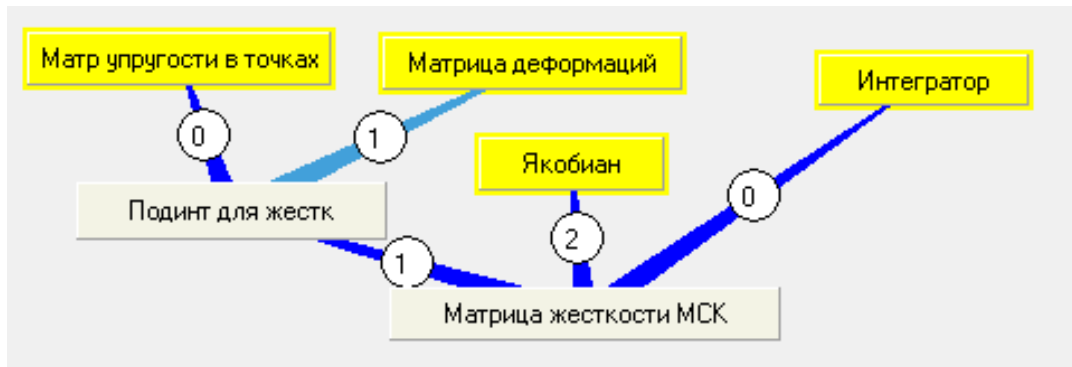


Рисунок А.8 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Матрица жесткости») для вычисления локальной матрицы жесткости элементов слоев ткани



Рисунок А.9 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Массы») для вычисления локальной матрицы масс и вязкости элементов слоев ткани

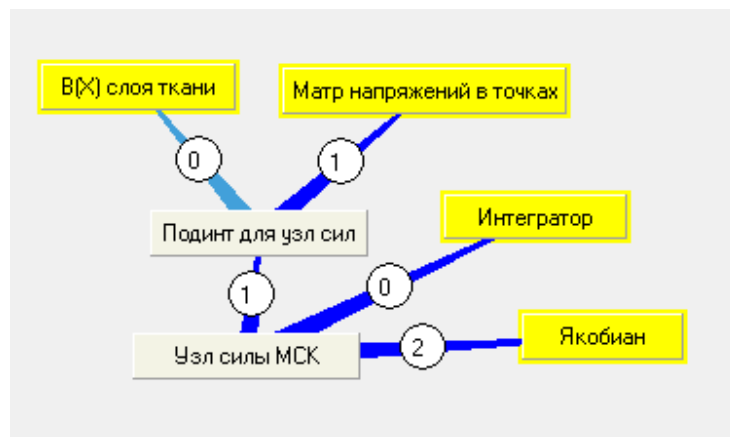


Рисунок А.10 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Узловые нагрузки») для вычисления узловых нагрузок элементов слоев ткани

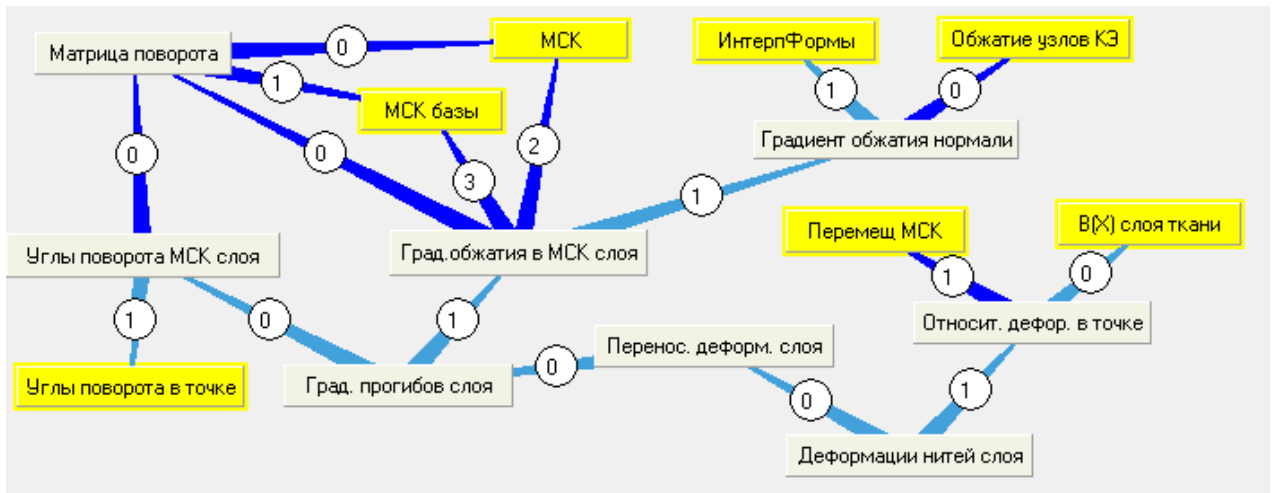


Рисунок А.11 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Деформации слоя») для вычисления деформаций нитей слоя ткани

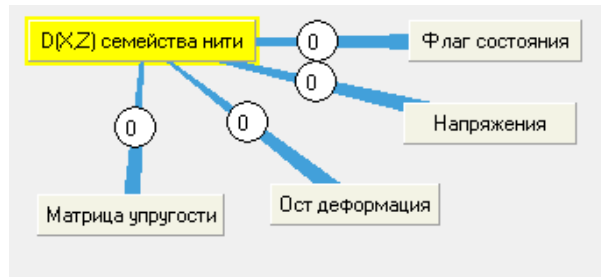


Рисунок А.12 – Страница редактирования функционально-объектной схемы (агрегат «Упругость слоя») для вычисления матрицы упругих характеристик нитей слоя ткани

ПРИЛОЖЕНИЕ Б Интерфейсы разработанных функциональных классов на языке C++

При программной реализации алгоритма расчёта были разработаны и добавлены в динамически загружаемую библиотеку функциональных классов классы на языке C++, интерфейсы которых приведены ниже.

// 1. Матрица направлений укладки нитей для элемента пластины DKQ

```
class TPlastDKQAngleStrainMatrix: public TConstElemMatr
{
protected:
    TConstElemMatr* Approx; // указатель на аргумент – интерполятор
    формы элемента
public:
    TPlastDKQAngleStrainMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
    virtual ~TPlastDKQAngleStrainMatrix();
    virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
```

// 2. Матрица изгибных деформаций для элемента пластины DKQ

```
class TPlastDKQIzgibStrainMatrix: public TConstElemMatr
{
protected:
    TConstElemMatr* Approx; // указатель на аргумент – интерполятор
    формы элемента
public:
    TPlastDKQIzgibStrainMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
    virtual ~TPlastDKQIzgibStrainMatrix();
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 3. Интегрирующая матрица

```
class TTestIntegratedMatrix: public TConstElemMatr
```

```
{ protected:
```

```
TBasicIntegrator* Integr; // указатель на объект – интегратор
```

```
TConstElemMatr* Podint; // указатель на подынтегральную матрицу
```

```
int Mode; // 0 - нужны все аргументы,
```

```
// 1 - если нет подынтегральной матрицы, то длина результата нулевая
```

```
public:
```

```
TTestIntegratedMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 4. Матрица мембранных жесткостей элемента

```
class TTkanTabMembrStiffMatrix: public TConstElemMatr
```

```
{ protected:
```

```
TBasicIntegrator* Integr; // указатель на объект – интегратор
```

```
TConstElemMatr* Povорот; // указатель на матрицу направлений укладки
```

нитей

```
TDoubleTable* Points; // указатель на таблицу квадратурных точек
```

```
// с вычисленными атрибутами НДС
```

```
public:
```



```
TTkanTabMembrStiffMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 5. Таблица физико-механических характеристик материала ткани

```
class TElastFibreMatrixTab: public TMaterMatrixTab
```

```
{ // Указатели на аргументы наследуются от родительского класса
```

```
public:
```

```
TElastFibreMatrixTab(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
```

```
Sender);
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
int FormAsIsotropic(); // вспомогательный метод формирования
```

```
матрицы из данных
```

```
};
```

// 6. Таблица начального напряжённого состояния ткани

```
class TTkanInitStressStrain: public TDoubleTable
```

```
{ protected:
```

```
// Указатели на объекты с данными для формирования таблицы
```

```
TAnyDataTable* Plane; // шаблон точек плана элемента
```

```
TDoubleTable* VarCoord; // переменные координаты
```

```
TDoubleTable* Strain; // таблица деформаций в точках
```

```
TConstElemMatr* SecantNodes; // узлы сечения в точке
```

```
TDoubleTable* FlagElastData; // флаги состояния (перевычисляются по
```

```
неявному
```

```
// аргументу)
```

```
TDoubleTable* StressData; // таблица напряжений
```

```

TDoubleTable* ElastData; // объект матрицы упругости
TDoubleTable* OstDefData; // таблица остаточных деформаций
    // (перевычисляются по неявному аргументу)
public:
    TTKanInitStressStrain(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);
    virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 7. Таблица напряжённого состояния ткани после шага
class TTKanStressStrainOnStep: public TTKanInitStressStrain
{
protected:
    // Указатели на объекты с данными для формирования таблицы
наследуются
    /*    TAnyDataTable* Plane; // шаблон точек плана
    TDoubleTable* VarCoord; // переменные координаты
    TDoubleTable* Strain; // таблица деформаций в точках
    TConstElemMatr* SecantNodes; // узлы сечения в точке
    TDoubleTable* FlagElastData; // флаги состояния (перевычисление)
    TDoubleTable* StressData; // напряжения
    TDoubleTable* ElastData; // матрица упругости
    TDoubleTable* OstDefData; // остаточные деформации
    */
    // Дополнительный указатель на объект с данными
    TDoubleTable* OldNDS; // НДС элемента в начале шага
public:
    TTKanStressStrainOnStep(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);

```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 8. Таблица флагов состояния ткани после шага в квадратурных точках

```
// (перевычисление по неявному аргументу)
```

```
class TTkanFlagsRecalc: public TDoubleTable
```

```
{ protected:
```

```
    TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических
```

```
    // характеристик материала
```

```
public:
```

```
TTkanFlagsRecalc(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 9. Таблица модулей упругости ткани

```
// (перевычисление по неявному аргументу)
```

```
class TTkanElastMatrix: public TDoubleTable
```

```
{ protected:
```

```
    TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических
```

```
    // характеристик материала
```

```
public:
```

```
TTkanElastMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 10. Таблица НДС слоя ткани

```
// (перевычисление по неявному аргументу)
```

```
class TTkanStressLamin: public TDoubleTable
```

```
{ protected:
```

```
    TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических
```

```
    // характеристик материала
```

```
public:
```

```
TTkanStressLamin(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```
protected:
```

```
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
```

```
};
```

// 11. Таблица остаточных деформаций

```
// (перевычисление по неявному аргументу)
```

```
class TTkanOstStrain: public TDoubleTable
```

```
{ protected:
```

```
    TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических
```

```
    // характеристик материала
```

```
public:
```

```
TTkanOstStrain(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);
```

```
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
```

```

protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 12. Подынтегральная матрица  $V(X)^T D_p V(X)$ 
//      (X, p – неявные аргументы)
class TTkanBTDpBMatrixProduct: public TDoubleTable
{
    // PointIndex - номер матрицы упругости в таблице её значений
    // в квадратурных точках (неявный аргумент)
protected:
    TConstElemMatr* MatrB; // указатель на матрицу деформаций
    TDoubleTable* MatrDp; // указатель на таблицу матриц упругости во
всех точках
public:
    TTkanBTDpBMatrixProduct(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
    virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 13. Матрица эквивалентных сил в точке интегрирования
class TTkanForceInPoint: public TConstElemMatr
{
public:
    TDoubleTable* MatrPovor2x2; // указатель на матрицы направлений
укладки нитей
    TDoubleTable* MembrDef; // указатель на таблицу мембранных
деформаций оболочки
    TDoubleTable* NDS; // указатель на таблицу НДС слоёв

    TTkanForceInPoint(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);

```

virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы

protected:

virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта

};

//14. Матрица вязкости ткани

// (перевычисление по неявному аргументу)

class TTkanViscMatrix: public TDoubleTable

{ protected:

TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических

// характеристик материала

TDoubleTable* CoordMCK; // указатель на таблицу координат узлов

TConstElemMatr* SecantNodes; // указатель на таблицу точек сечения

TAnyDataTable* Plane; // шаблон точек плана

public:

TTkanViscMatrix(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015* Sender);

virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы

protected:

virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта

};

// 15. Матрица масс слоя ткани

// (перевычисление по неявному аргументу)

class TTkanMassMatrixLam: public TDoubleTable

{ protected:

TConstElemMatr* MatMatrix; // указатель на таблицу физико-
механических

// характеристик материала

TDoubleTable* CoordMCK; // указатель на таблицу координат узлов

```

TConstElemMatr* SecantNodes; // указатель на таблицу точек сечения
TAnyDataTable* Plane; // шаблон точек плана
public:
    TTKanMassMatrixLam(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
    virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 16. Таблица матриц упругости слоя во всех точках интегрирования
class TTKanElastMatrixLam: public TDoubleTable
{
protected:
    TDoubleTable* DataNDS; // таблица НДС элемента в квадратурных
точках
public:
    TTKanElastMatrixLam(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
    virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
    virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 17. Напряжения слоя ткани во всех точках интегрирования
class TTKanStressLamInPoints: public TDoubleTable
{
protected:
    TDoubleTable* DataNDS; // таблица НДС элемента в квадратурных
точках
public:

```

```

TTkanStressLamInPoints(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};
// 18. Подынтегральная матрица для эквивалентных узловых сил
// Матричное произведение  $B(X)^T \Sigma_p$ :
// первый аргумент в точке X, второй выбирается по номеру точки p
class TTkanBTSigmaMatrixProduct: public TDoubleTable
{ // PointIndex - номер точки интегрирования
protected:
TConstElemMatr* MatrB; // указатель на матрицу деформаций B
TDoubleTable* MatrSig; // таблица матриц напряжений для всех точек
public:
TTkanBTSigmaMatrixProduct(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);
virtual PointersInit(); // виртуальный метод получения указателей на
аргументы
protected:
virtual calculation(); // виртуальный метод вычисления значения объекта
};

```


ПРИЛОЖЕНИЕ В Модифицированные методы базового класса

В этом приложении приведен интерфейс изменённого базового класса TAutomatWithImplicitArg, обеспечивающего обработку неявных аргументов для объектов сети с побочными эффектами, и модифицированных методов этого класса.

1. Интерфейс класса

```
class TAutomatWithImplicitArg: public TAutomatWithMemory
{
protected:
    InterfaceString RequestedCols; // заголовки требуемых столбцов
неявного аргумента
    double* DefaultValueForImplicit; // массив значений по умолчанию
    double* LastLoc; // последние использованные значения
    vector<short int>Notwendig; // массив флагов обязательных полей
    int ImplicitCount; // число требуемых столбцов неявного аргумента
    double* Loc; // указатель на строку неявного аргумента
    int PointIndex; // индекс неявного аргумента
    int ImplicitShapeIndex; // индекс текущего шаблона в реестре
    vector<short int>ImplicitPos; // вектор используемых столбцов неявного
аргумента
    vector<InterfaceString>RegisteredTables; // заголовки
зарегистрированных шаблонов
    vector<short int>TransitArgs; // номера аргументов - получателей
транзита шаблона
    // Статическая инициализация (для вызова в конструкторе)
    int SetTransitArgs(char* transit); // установка транзита неявного
аргумента
    // Установка требуемых заголовков, обязательных атрибутов и
умолчаний:
    // первый параметр - строка заголовков через пробел
```

```

// второй параметр - строка обязательных номеров используемых полей
через пробел
// третий параметр - строка умолчаний через пробел
int SetRequestedCols(char* mytitle, char* required, char* deflt);
int SetIterFileAndImplicitBehavior(); // модификация поведения
// Инициализация используемых атрибутов из визуального
представления
int InitialImplicitAttributes(); // инициализация атрибутов неявного
аргумента
// по визуальному представлению объекта на схеме
// Выборка данных из неявного аргумента с использованием умолчаний
int ExtractImplicitData(double* Dest); // возвращает нуль, если
отсутствуют
// обязательные компоненты
// Регистрация шаблона и формирование для него номеров столбцов
// с заданными подписями
// int RegisterShape(InterfaceString ShapeColTitle);
int RegisterShape(char* shapetitle);
// Варианты обработчиков установки неявного аргумента
int SetImplicitArgForVar(double* row, int N, char* title); // проверяет
совпадение
// новых и предыдущих используемых значений
int SetImplicitArgForVarNoTransit(double* row, int N, char* title);
// Специальный обработчик вычисления
int SpecialThrownToFinalization();
// Функция - запрос условия на выполнение скриптов без Loc
int HasImplicitArg(); // 1, если Loc установлен
public:
TAutomatWithImplicitArg(TBasicAutomat* owner, TBasicObject2015*
Sender);

```

```

virtual ~TAutomatWithImplicitArg();
// Доступ к текущей строке заголовка
char* GetCurrentImplicitTitle();
// Установка переключаемых вариантов
void SetAsNoImplicitArg(); // алгомот не получает неявного аргумента
void SetAsAcceptImplicitArgOnly(); // конечный получатель неявного
аргумента
void SetAsTransiteImplicitArg(); // получатель и передатчик неявного
аргумента
int SetAsMatrForPoint3D(); // функция топологических координат (без
транзита)
// Виртуальный метод представления
virtual InterfaceString  AttribToString(); // строковое представление
атрибутов
// (для пользовательского интерфейса)
};

```

Заголовки используемых полей неявного аргумента (строка символов RequestedCols) и подразумеваемые значения по умолчанию DefaultValueForImplicit в конкретных классах могут задаваться в конструкторе программистом либо в визуальном представлении при формировании функционально-объектной схемы алгоритма. Целочисленный вектор Notwendig содержит метки в позициях тех полей, которые должны передаваться обязательно (не определены по умолчанию). Указатель на матрицу (строку) вещественных значений неявного аргумента и целочисленный индекс PointIndex передаются объекту как неявный аргумент. Вектор TransitArgs содержит номера явных аргументов, которым неявный аргумент передаётся транзитом.

Объект может настраиваться на одну из моделей работы с неявным аргументом посредством вызова одного из методов: SetAsNoImplicitArg, SetAsAcceptImplicitArgOnly, SetAsTransiteImplicitArg или SetAsMatrForPoint3D.

Метод `SetAsNoImplicitArg` используется, если алгомот не получает и не использует неявного аргумента.

Метод `SetAsAcceptImplicitArgOnly` устанавливает модель поведения, в которой объект получает и использует неявный аргумент, но не передаёт его своим явным аргументам.

Метод `SetAsTransitImplicitArg` используется, если объект получает неявный аргумент и передаёт его транзитом.

Метод `SetAsMatrForPoint3D` используется для объектов – функций топологических координат (без транзита).

В зависимости от установленной модели поведения, при передаче объекту неявного аргумента вызывается один из обработчиков: `SetImplicitArgForVar` или `SetImplicitArgForVarNoTransit`. Его адрес запоминается в переменной `SetLoc`, имеющей тип указателя на метод. Стандартный (предопределённый) обработчик вычисления для объектов, использующих неявный аргумент, заменяется на `SpecialThrowedToFinalization`.

2. Метод вычисления для объектов – получателей неявного аргумента

Получатель неявного аргумента вычисляется только в том случае, когда неявный аргумент установлен (если указатель `Loc` имеет ненулевое значение). В противном случае основной метод вычисления `calculation` не вызывается.

Код обработчика `SpecialThrowedToFinalization` на языке C++ представлен далее.

```
int   TAutomatWithImplicitArg::SpecialThrowedToFinalization()    // собственно
вычисление
// (специальное и обычное)
{   // Специальное вычисление алгомота с неявным аргументом
    if (!Loc)
    {   FStatus = osFinalization; // calculation возвращает 1
        return FStatus;
    }
    // Остальные обработчики перед вычислением
```

```

    if (OnEachCalculation) if (!(this->*OnEachCalculation)()) { FStatus = osFailed;
return 0; }
    FStatus = calculation(); // основной виртуальный метод вычисления
    if (FStatus == osNotInitialized) FStatus = osFinalization; // если calculation
вернула 1
    return FStatus;
}

```

3. Метод получения неявного аргумента без транзитной передачи

При выполнении метода `SetImplicitArgForVarNoTransit` выполняются проверки совпадения используемых полей нового неявного аргумента и предыдущих значений. Если совпали не все значения, состояние объекта сбрасывается (в этом случае будет вызван основной метод вычисления `calculation`).

Далее приведен код метода на языке C++.

```

int TAutomatWithImplicitArg::SetImplicitArgForVarNoTransit(double* row, int N,
char* title)
{
    if (!FStatus) return 0;
    if (!row) // сброс неявного аргумента
    {
        Loc = 0;
        this->ThrowIfCompleted();
        return 1;
    } // иначе проверяем изменение данных
    int Res = 0; // пока не выявлена необходимость перевычисления
    if (!Loc) Res = 1;
    Loc = row;
    this->PointIndex = N;
    int iShape = RegisterShape(title);
    ImplicitShapeIndex = iShape;
    int indx = ImplicitCount*ImplicitShapeIndex;
    if (LastLoc)

```

```

{   for (int i=0; i<ImplicitCount; i++)
    {   int pos = ImplicitPos[indx + i];
        double &V = (pos<0? DefaultValueForImplicit[i]: Loc[pos]);
        if (V != LastLoc[i]) // данные изменились
            {   LastLoc[i] = V;
                Res = 1;
            }
    }
} else
{   // Формируем LastLoc
    if (ImplicitCount) LastLoc = new double[ImplicitCount];
    else LastLoc = new double[1];
    if (!ExtractImplicitData(LastLoc))
        {   InterfaceString Mess = "Нет обязательного поля ";
            Mess += FResume; Mess += "в неявном аргументе ";
            Mess += GetCurrentImplicitTitle();
            Message(Mess.c_str());
            FStatus = osFailed;
        }
    Res = 1;
}
if (Res)
{   this->ThrowIfCompleted();
    this->Calculation();
}
return Res;
}

```

4. Метод получения неявного аргумента с транзитной передачей

При выполнении метода `SetImplicitArgForVar` выполняются все проверки, предусмотренные в методе `SetImplicitArgForVarNoTransit`, но дополнительно

выполняется рекурсивный вызов метода SetLoc объектов – явных аргументов, указанных в списке транзитной передачи TransitArgs. Если хотя бы один такой аргумент изменил значение, состояние текущего объекта сбрасывается (он будет заново вычислен с новым неявным аргументом).

Код метода на языке C++ приведен ниже.

```
int TAutomatWithImplicitArg::SetImplicitArgForVar(double* row, int N, char* title)
{
    if (!FStatus) return 0;
    if (!row) // сброс неявного аргумента
    {
        Loc = 0;
        this->ThrowIfCompleted();
        return 1;
    } // иначе проверяем изменение данных
    int Res = 0; // пока не выявлена необходимость перевычисления
    if (!Loc) Res = 1;
    Loc = row;
    this->PointIndex = N;
    int iShape = RegisterShape(title);
    ImplicitShapeIndex = iShape;
    int indx = ImplicitCount*ImplicitShapeIndex;
    if (LastLoc)
    {
        for (int i=0; i<ImplicitCount; i++)
        {
            int pos = ImplicitPos[indx + i];
            double V = (pos<0? DefaultValueForImplicit[i]: Loc[pos]);
            if (V != LastLoc[i]) // данные изменились
            {
                LastLoc[i] = V;
                Res = 1;
            }
        }
    }
    else
    { // Формируем LastLoc
```

```

if (ImplicitCount)
{
    LastLoc = new double[ImplicitCount];
    if (!ExtractImplicitData(LastLoc))
    {
        InterfaceString Mess = "Нет обязательного поля ";
        Mess += FResume; Mess += "в неявном аргументе ";
        Mess += GetCurrentImplicitTitle();
        Message(Mess.c_str());
        FStatus = osFailed;
    }
    Res = 1;
} // пока не выяснилась необходимость перевычисления
else LastLoc = new double[1];
}

if (FStatus) // ошибки не было, Res равно 0 или 1
{
    // Транзит неявного аргумента
    int ArgCount = this->GetArgCount();
    int TranCount = TransitArgs.size();
    if (ArgCount > TranCount) ArgCount = TranCount;
    for (int i=0; i<ArgCount; i++)
    {
        if (!TransitArgs[i]) continue;
        TAutomatWithImplicitArg* Arg = (TAutomatWithImplicitArg*)
            GetArg(i, "TAutomatWithImplicitArg", osNotInitialized);
        if (!Arg) continue;
        if (!Arg->SetLoc(row, N, title)) continue;
        if (Arg->GetStatus() < osComplete)
        {
            InterfaceString Mess = "Не вычислен аргумент ";
            Mess += Arg->Caption;
            Message(Mess.c_str());
            FStatus = osFailed;
        }
    }
}

```



```
        Res = 1;
    }
    if (Res)
    {    this->ThrowIfCompleted();
        this->Calculation();
    }
}
return Res;
}
```

Разработка и программная реализация описанного базового класса `TAutomatWithImplicitArg` составляет модификацию комплекса «Алгозит» путём усовершенствования базовой модели поведения функциональных классов в сети с побочными эффектами.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Г Свидетельство о государственной регистрации
программ для ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017615345

**Программа расчета динамических температурных полей в
многослойном композиционном материале при ударе**

Правообладатели: *Каледин Валерий Олегович (RU), Будадин Олег Николаевич (RU), Гилёва Анна Евгеньевна (RU), Козельская Софья Олеговна (RU)*

Авторы: *Каледин Валерий Олегович (RU), Будадин Олег Николаевич (RU), Гилёва Анна Евгеньевна (RU), Козельская Софья Олеговна (RU)*

Заявка № **2017612112**

Дата поступления **15 марта 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **12 мая 2017 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев



ПРИЛОЖЕНИЕ Д Сведения об использовании результатов диссертации

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по стратегическому
развитию НФИ КемГУ

доктор социологических наук, доцент

С. А. Урбан
«28» ноябрь 2019 г.



СПРАВКА

об использовании результатов диссертации Паульзен А.Е.
«Математическое моделирование термомеханических
процессов в мягких оболочках из тканых полимерных
материалов» при выполнении НИР, проводимых
Новокузнецким институтом (филиалом) Федерального
государственного бюджетного учреждения высшего
образования «Кемеровский государственный университет»
(НФИ КемГУ)

При выполнении научно-исследовательских работ, проводимых в научно-исследовательской лаборатории математического моделирования и на кафедре математики, физики и математического моделирования НФИ КемГУ, использованы основные результаты диссертации Паульзен Анны Евгеньевны «Математическое моделирование термомеханических процессов в мягких оболочках из тканых полимерных материалов»: математическая модель динамического деформирования многослойных оболочек, методика и численная схема расчёта деформирования многослойных оболочек из полимерной ткани с выделением тепла, комплекс программ для ЭВМ, реализующий алгоритм численного решения задачи динамического деформирования при ударе и включающий вычислительные программы, программные средства генерации данных для конечно-элементного моделирования и программу экспорта и визуализации данных и результатов расчёта.

Указанные результаты использованы:

- в хоздоговорной научно-исследовательской работе «Разработка методики и проведение расчётной оценки напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочечных конструкций при динамическом нагружении» по договору от 01 февраля 2017 г. № 17-05/19-17 с АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (акт о внедрении работы прилагается), выполненной в 2017-2018 г.;

- в инициативной НИР «Разработка математической модели и компьютерной программы для расчёта тепловыделения в тканых образцах при ударе» по договору от 01 сентября 2016 г. № 17-05/72-16, выполненной в 2016-2017 г.;

- в инициативной НИР «Разработка инструментальных средств функционально-объектного программирования» по договору от 13 марта 2018 г. № 17-05/32-18, выполненной в 2018-2019 г.

Усовершенствованные А.Е. Паульзен инструментальные программы функционально-объектного программирования использованы при выполнении НИР «Разработка системы мониторинга теплового режима зданий» по грантовому соглашению с НФИ КемГУ от 18 октября 2018 г. № 3-05/1ГР-18 в 2018-2019 г.

Отдельные результаты диссертационной работы использованы в учебном процессе при проведении производственной практики студентов магистратуры направления «Прикладная математика и информатика» и в курсе научно-исследовательской работы магистрантов.

Результаты опубликованы в печатных работах, в том числе:

1. **Гилева, А.Е.** Волновая и оболочечная стадии деформирования многослойного тканого материала при соударении с поражающим элементом/ А.Е. Гилева // Научно-технический вестник Поволжья. №5 2019г. – Казань, С.97-99.

2. **Гилева, А.Е.** Численная схема волновой и оболочечной стадии деформирования при соударении многослойного тканого материала с

поражающим элементом/ А.Е. Гилева // Научно-технический вестник Поволжья. №5, 2019 г. – Казань, С.100-102.

3. Kaledin, V.O. Modeling of thermomechanical processes in woven composite material at blow by the striking element/ V.O. Kaledin, O.N. Budadin, **A.Ye. Gilyova**, S.O. Kozelskaya// Journal of Physics: Conf. Series 894 (2017) 012019, 2017.

4. Kaledin, V.O. Quality control of armor fabric by modeling thermomechanical processes under projectile impact/ V.O. Kaledin V.O., **A.E. Gileva** , O.N. Budadin, S.O.Kozel'skaya// Russian journal of nondestructive testing. . №5, 2018, P. 363-371.

5. **Гилева, А.Е.** Влияние теплопроводности на распределение температуры при ударе в тканый материал / А.Е. Гилёва // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. / Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк. – 2019. – С. 26-30.

6. **Гилева, А.Е.** Модель соударения тканого материала с поражающим элементом / А.Е. Гилева // Материалы 57-й Междунар. науч. студ. конф. /Новосиб. гос.ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. – С.102.

7. **Гилева, А.Е.** Моделирование температурных полей при взаимодействии тканого материала с поражающим элементом / А.Е. Гилева // Перспективы развития фундаментальных наук: сборник трудов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск: Изд. ТПУ, 2019. – С.19-21.

8. Программа расчета динамических температурных полей в многослойном композиционном материале при ударе: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2017615345, Рос. Федерация / заявитель и правообладатель Каледин В.О., Будадин О.Н., **Гилева А.Е**, Козельская С.О. – №2017612112; заявл. 15.03.2017; зарегистр. 12.05.2017; опубл. 12.05.2017, бюл. №5. — 1 с.

В этих работах А.Е. Паульзен принадлежат: математическая модель деформирования и тепловыделения в тканом многослойном образце при ударе поражающим элементом с отдельным описанием стадии уплотнения и оболочечного деформирования; модификация неявной разностной схемы путем расщепления по процессам в переносном и относительном движении; программной реализации расчета динамических температурных полей в среде программирования «Алгозит»; модернизация алгоритмов поведения функциональных объектов, образующих сеть с побочными эффектами, путем изменения механизма передачи неявного аргумента для исключения повторных вычислений при неизменных значениях неявного аргумента; исследование сеточной сходимости и точности численного решения; проведение вычислительных экспериментов, обработка полученных результатов и сравнении с данными физического эксперимента.

Зав. кафедрой математики, физики
и математического моделирования,
канд. технич. наук, доцент



Е.В. Решетникова

Зав. научно-исследовательской лабораторией
математического моделирования,
докт. технич. наук, профессор



В.О. Каледин

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по стратегическому
развитию НИИ КемГУ

О.А. Урбан

2019 г.



УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Генерального
директора АО «ЦНИИСМ»

А.А. Кульков

2019 г.



АКТ

ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

Паульзен Анны Евгеньевны

«Математическое моделирование термомеханических процессов в
мягких оболочках из тканых полимерных материалов»
в АО «ЦНИИ специального машиностроения»

Мы, нижеподписавшиеся, представитель акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (АО ЦНИИСМ): начальник отдела д.т.н., профессор Будадин О.Н. с одной стороны, и представитель Новокузнецкого института (филиала) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет» (НФИ КемГУ): заведующий кафедрой математики, физики и математического моделирования к.т.н., доцент Решетникова Е.В., составили настоящий акт об использовании результатов диссертации «Математическое моделирование термомеханических процессов в мягких оболочках из тканых полимерных материалов», выполненной младшим научным сотрудником НИИ математического моделирования Паульзен Анной Евгеньевной в 2015-2019 г.

Результаты диссертации использованы в АО «ЦНИИСМ» в следующем виде:

- усовершенствованная математическая модель неупругого деформирования мягких оболочек из полимерной ткани при действии на них удара жестким поражающим элементом, отличающаяся разделением волновой и оболочечной стадии деформирования, использованием расчётной схемы гладкой оболочки для описания многослойного пакета и кинематической гипотезы о нарушении сплошности оболочки для описания относительного движения нитей, позволяющая вычислить поглощение энергии удара и тепловыделение в каждом слое ткани вследствие необратимого растяжения нитей и сил трения нитей и слоёв ткани;

- численная схема расщепления для интегрирования уравнений движения и расчёта тепловыделения, позволяющая уменьшить время вычислений;

- комплекс компьютерных программ для расчёта термомеханических процессов в мягких оболочках из полимерной ткани при ударе, содержащий программу подготовки данных, программу расчёта динамических полей деформаций и температур и программу визуализации и обработки результатов расчёта;

- методика определения настроечных коэффициентов модели для оценки энергии, поглощённой за счёт необратимой деформации, разрыва нитей и трения.


При внедрении результатов диссертации получен следующий технический эффект:

- расширение возможностей теплового контроля свойств поглощения энергии полимерной тканью при ударе жестким поражающим элементом;

- сокращение календарной продолжительности оценки величины энергии, поглощённой каждым слоем ткани при ударе в многослойный пакет.


От НФИ КемГУ:

Зав. кафедрой, к.т.н., доцент

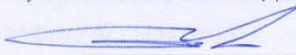
 Е.В. Решетникова

От АО «ЦНИИСМ»:

Начальник отделения 9

 Вл. О. Каледин

Начальник отдела 65

 О.Н. Будадин

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по
стратегическому развитию

НФИ КемГУ

О.А. Урбан

« 14 »

2019 г.



УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель генерального
директора АО «ЦНИИСМ»

А.А. Кульков

2019 г.

**АКТ ВНЕДРЕНИЯ ЗАКОНЧЕННОЙ НИР**

Мы, нижеподписавшиеся, представители акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (АО «ЦНИИСМ»): помощник генерального директора по науке, д.т.н., профессор В.Л. Страхов и заместитель начальника отдела В.В. Репинский, с одной стороны, и представители Новокузнецкого института (филиала) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет» (НФИ КемГУ): зав. кафедрой математики, физики и математического моделирования, к.т.н., доцент Е.В. Решетникова и зав. научно-исследовательской лабораторией математического моделирования, д.т.н., профессор В.О. Каледин, с другой стороны, составили настоящий акт о внедрении научно-исследовательской работы «Разработка методики и проведение расчётной оценки напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочечных конструкций при динамическом нагружении», выполненной научно-исследовательской лабораторией математического моделирования НФИ КемГУ в 2017-2018 г.

Результаты НИР внедрены в АО «ЦНИИСМ» в следующем виде:

Принято для использования в расчетах АО «ЦНИИСМ»:

- Методика оценки напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочечных конструкций при действии на них динамических механических нагрузок.

- Результаты расчётов напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочечных конструкций при динамическом нагружении с использованием данных физического эксперимента.

При внедрении результатов НИР получен следующий технический эффект:


1) сокращение календарной продолжительности и затрат машинного времени при расчётах динамического напряжённо-деформированного состояния многослойных композитных конструкций при динамических механических воздействиях;

2) сокращение объёма натурных испытаний при оценке прочности многослойных композитных конструкций, подверженных динамическому нагружению.

Подписи:

От НФИ КемГУ:

Зав. кафедрой, к.т.н., доцент

 Е.В. Решетникова

Зав. лабораторией, д.т.н., профессор

 В.О. Каледин

От АО «ЦНИИСМ»

Помощник генерального директора

по науке, д.т.н., профессор

 В. Л. Страхов

Заместитель начальника отдела

 В. В. Репинский

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по
стратегическому развитию

НФИ КемГУ

О.А. Урган

«14»

2019 г.

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель генерального
директора АО «ЦНИИСМ»

А.А. Кульков

2019 г.

АКТ №

о научно-техническом эффекте результатов совместной научно-
исследовательской работы в АО «ЦНИИСМ»

Мы, нижеподписавшиеся, представители акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (АО «ЦНИИСМ»): помощник генерального директора по науке, д.т.н., профессор Страхов В.Л. и начальник отдела, д.т.н., профессор О.Н. Будадин с одной стороны, и представители Новокузнецкого института (филиала) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет» (НФИ КемГУ): зав. кафедрой математики, физики и математического моделирования, к.т.н., доцент Е.В. Решетникова и зав. научно-исследовательской лабораторией математического моделирования, д.т.н., профессор В.О. Каледин, с другой стороны, составили настоящий акт об использовании результатов совместной научно-исследовательской работы «Разработка математической модели и компьютерной программы для расчёта тепловыделения в тканых образцах при ударе», выполненной научно-исследовательской лабораторией математического моделирования НФИ КемГУ совместно с АО «ЦНИИСМ» в 2017-2018 г.

Результаты НИР переданы для использования в АО «ЦНИИСМ» в следующем виде:

- Математическая модель неупругого деформирования в мягких оболочках из полимерной ткани при действии на них удара жестким поражающим элементом.

- Компьютерная программа для расчёта термомеханических процессов в мягких оболочках из полимерной ткани при ударе поражающим элементом.

По результатам НИР получен следующий научно-технический эффект:

1) показана принципиальная возможность оценки поглощения тканями преградами энергии удара поражающим элементом путем обработки по разработанной программой динамических температурных полей поверхности тканой преграды;

2) установлена возможность адекватного описания термомеханических процессов в тканых преградах при ударе с использованием континуальной математической модели;

3) определены задачи для дальнейших исследований, направленных на разработку промышленной методики оценки энергопоглощения путём анализа динамических температурных полей.

По результатам работы опубликовано 5 статей в рецензируемых журналах (РИНКЦ, scopus, web of science) и получено 4 патента РФ на изобретения.

От НФИ КемГУ:


Зав. кафедрой,

к.т.н., доцент



Е.В. Решетникова

Зав. лабораторией, д.т.н., профессор




В.О. Каледин

От АО «ЦНИИСМ»

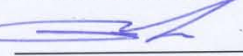
Помощник генерального директора

по науке, д.т.н., профессор



В. Л. Страхов

Начальник отдела, д.т.н., профессор



О.Н. Будадин