

На правах рукописи

Веру

Веретельникова Ирина Викторовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ
КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОТСУТСТВИИ ТРЕНДА
И КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ**

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новосибирск – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель: **Лемешко Борис Юрьевич**,
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Кошкин Геннадий Михайлович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет»,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор кафедры, г. Томск;

Рябко Борис Яковлевич,
доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория информационных систем и защиты информации, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией, г. Новосибирск.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», г. Красноярск.

Защита диссертации состоится «12» декабря 2019 г. в 14 часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета по защите Д 212.173.06 при Федеральном государственном учреждении высшего образования бюджетном образовательном «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте <http://www.nstu.ru>.

Автореферат разослан « » октября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.173.06



Андрей Владимирович
Фаддеенков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В аппарате прикладной математической статистики значительное место занимает множество критериев проверки статистических гипотез, цель которых заключается в желании убедиться в том, что данные в наблюдаемом ряду измерений некоторой случайной величины не связаны какими-то случайными или неслучайными закономерностями. Под временным рядом понимается последовательность $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ результатов измерений значений некоторой переменной, произведенных, например, через равные промежутки времени.

В такого рода критериях проверяется гипотеза о том, что анализируемая выборка представляет собой выборку независимых одинаково распределённых случайных величин. Если проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, то можно считать, что мы имеем дело со случайной величиной, полностью описываемой некоторым (неизвестным) законом распределения.

Если гипотеза H_0 отклоняется, то между измерениями могут существовать случайные и неслучайные связи. Временные ряды могут отражать наличие тренда, наличие систематической составляющей, сезонной составляющей, а также случайной составляющей (шума). При этом под трендом понимается основная тенденция изменения временного ряда, направление преимущественного движения исследуемой переменной. С анализом временных рядов сталкиваются при обработке измерений в технических областях, в экономике, сельском хозяйстве, метеорологии. Методы анализа и построения моделей для временных рядов или определения характера тренда лежат за рамками настоящей диссертации.

Таким образом, признаком наличия в наблюдаемой случайной последовательности измерений некоторой неслучайной закономерности может являться отклонение проверяемой гипотезы об отсутствии тренда. Для проверки такого рода гипотезы в разное время предложено множество параметрических и непараметрических критериев. Однако имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев, не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев.

Достаточно полный перечень критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда, представлен в работе Кобзаря А.И., которую можно

рассматривать как справочное пособие, охватывающее самое широкое (в отечественных источниках по прикладной статистике) множество критериев проверки статистических гипотез. Естественно, что данная книга не дает ответа на сформулированные выше вопросы. Более того, пользоваться ею надо осторожно из-за большого числа опечаток и ошибок, допущенных в описаниях критериев и в примерах их применения.

Основной предпосылкой, обеспечивающей корректное применение параметрических критериев, как правило, является предположение о нормальном законе распределения шума, что далеко не всегда выполняется на практике. Возникает вопрос, что произойдет с распределением статистики параметрического критерия в случае нарушения предположения о нормальности? Насколько будут оставаться корректными выводы, осуществляемые на основании классических результатов? И как поступать, если очевидно, что нельзя использовать классические результаты?

Использование непараметрических критериев зачастую опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных или асимптотических распределений статистик, используемых в процедуре проверки гипотезы. В случае непараметрических критериев проблема зачастую усугубляется из-за ярко выраженной дискретности статистик. В таких ситуациях использование при проверке гипотезы предельного (асимптотического) распределения статистики вместо имеющего место реального распределения этой статистики может приводить к неверному выводу.

За последние 80-90 лет предложено и рассмотрено множество критериев, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда. В их развитие большой вклад внесли Cox D.R., Stuart A., Fisher R.A, Fligner M.A., Killeen T.J., Dufor J. M., Roy R., Foster F.G., Moran P. A., Hollin M., Hsu D.A., Hsieh H.K., Wald A., Wolfowitz J. и др.

Помимо вопроса о наличии неслучайной закономерности в наблюдаемой случайной последовательности измерений часто встает вопрос о неизменности или, наоборот, об изменении статистических свойств некоторого объекта, процесса и т.п. после целенаправленного изменения фактора или факторов (методики, технологии и т.д.), неявным образом влияющих на исследуемый объект. Подобные задачи естественно возникают при сличении результатов лабораторных изме-

рений или аттестации средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. Такие задачи решают с использованием критериев проверки гипотез об однородности (об однородности законов, математических ожиданий, дисперсий).

Очевидно, что критерии однородности можно использовать для проверки гипотез об отсутствии тренда, разбивая анализируемый ряд наблюдений на части и проверяя гипотезу об однородности этих частей. Однако автору не известно об упоминаниях в литературе о таком подходе, что связано, по-видимому, с наличием проблем, затрудняющих применение на практике, в частности, k -выборочных критериев однородности законов.

В прикладной математической статистике накопился достаточно обширный арсенал критериев (параметрических и непараметрических), предназначенных для проверки гипотез однородности распределений двух выборок. На практике для проверки гипотезы однородности законов, как правило, используются либо двухвыборочный критерий Смирнова, либо двухвыборочный критерий Лемана–Розенблатта. В русскоязычной литературе практически не упоминается о применении двухвыборочного критерия Андерсона–Дарлинга (Андерсона–Дарлинга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга.

Среди множества публикаций, направленных на проверку гипотез об однородности, следует отметить работы таких авторов как Lehmann E.L., Rosenblatt M., Pettitt A.N., Scholz F.W., Stephens M.A., Лемешко Б.Ю., Лемешко С. Б., Большев Л.Н., Смирнов Н.В., Орлов А.И., Макаров А.А., Симонова Г.И. и др.

Кроме упомянутых выше критериев однородности можно указать также непараметрические критерии, предложенные в работах Жанга (Zhang J.), которые дают возможность сравнивать k выборок.

Следует заметить, что применение k -выборочных критериев однородности на практике сдерживается тем, что, в лучшем случае, известны лишь критические значения статистик для соответствующих k , как, например, для критерия Андерсона–Дарлинга. Распределения статистик критериев Жанга зависят от объёмов выборок, поэтому их применение невозможно без использования методов статистического моделирования.

Любого исследователя в связи с необходимостью решения задачи статистического анализа всегда интересует критерий, обладающий большей мощностью, хотя в зависимости от конкурирующих гипотез предпочтительными по мощности могут быть различные критерии. Любого исследователя интересуют «действительные» свойства критериев и то, когда и при каких условиях (при выполнении каких стандартных предположений) он может получить корректные выводы, используя классические результаты. С другой стороны, он заинтересован в возможности осуществления корректных выводов и в ситуациях, когда стандартные предположения нарушаются.

Следует констатировать, что в настоящий момент имеющиеся знания о реальных свойствах множества критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда, или множества критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности законов, не позволяют ответить на вопрос о том, какой или какие критерии предпочтительнее для применения. А имеющийся арсенал программных средств не гарантирует с применением соответствующих критериев корректных и информативных выводов с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} .

Цель и задачи исследований. Основная цель диссертационной работы заключалась в расширении знаний о свойствах, распределениях статистик и мощности групп критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математических ожиданиях, об отсутствии тренда в дисперсиях, об однородности законов, а также в обеспечении корректности применения соответствующих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений.

В соответствии с поставленной целью для рассматриваемых групп критериев на базе разрабатываемого программного обеспечения и методов статистического моделирования решались следующие задачи:

- исследование влияния объемов выборок n на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0 , построение моделей предельных распределений для статистик некоторых критериев;
- для критериев с известными предельными распределениями статистик уточнение значений n , начиная с которых можно использовать асимптотическое (предельное) распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения статистики, имеющего место при данном n ;

- для параметрических критериев определение характера влияния на распределения статистик (при справедливости H_0) нарушения стандартного предположения о нормальности;
- оценивание мощностей критериев относительно близких конкурирующих гипотез и проведение сравнительного анализа критериев;
- исследование влияния ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев;
- реализация возможности корректного применения множества рассмотренных критериев в условиях нарушения стандартных предположений и/или ограниченной точности измерений с вычислением достигнутого уровня значимости P_{value} .

Методы исследования. Исследования опирались на развиваемые компьютерные технологии исследования статистических закономерностей, в основе которых лежит методика статистического моделирования и развиваемое программное обеспечение.

Научная новизна диссертационной работы заключается:

- в результатах исследования свойств и распределений статистик рассмотренных критериев при ограниченных объемах выборок, при ограниченной точности измерений, в выявленных достоинствах и недостатках отдельных критериев;
- в предложенной модификации рангового критерия Вальда-Вольфовица, для которой ликвидировано существенное смещение распределения статистики относительно стандартного нормального закона;
- в построенной на основании результатов статистического моделирования приближенной модели предельного распределения G-статистики критерия Хсу;
- в результатах сравнительного анализа мощностей рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании;
- в результатах сравнительного анализа мощностей рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии;
- в построенных на основе результатов статистического моделирования моделях предельных распределений для предложенных k -выборочных вариантов критериев, опирающихся на применение к каждой паре анализируемых выборок двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита;
- в результатах сравнительного анализа мощностей рассмотренных k -выборочных критериев проверки однородности законов;

– в возможности корректного применения множества всех рассмотренных критериев в условиях нарушения стандартных предположений и/или ограниченной точности измерений с вычислением достигнутого уровня значимости P_{value} .

К основным результатам, выносимым на защиту, относятся:

- результаты исследования свойств и распределений статистик рассмотренных критериев при ограниченных объемах выборок;
- модификация рангового критерия Вальда-Вольфовица, ликвидирующая смещение распределения статистики относительно стандартного нормального закона;
- построенная приближенная модель для предельного распределения G-статистики критерия Хсу;
- результаты сравнительного анализа мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании и мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии;
- построенные модели предельных распределений для предложенных k -выборочных вариантов критериев, опирающихся на применение двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлингга–Петита;
- результаты сравнительного анализа мощности рассмотренных k -выборочных критериев проверки однородности законов.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования при исследовании свойств и распределений статистик рассмотренных критериев;
- совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

Личный творческий вклад автора в совместных публикациях заключается в разработке программного обеспечения для исследования методами статистического моделирования распределений статистик рассматриваемых множеств критериев проверки статистических гипотез и применения этих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений с использованием интерактивного режима моделирования распределений статистик; в оценке мощности рассматриваемых множеств критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании и критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии, в проведении сравнительного анализа мощности этих групп критериев

риев; в разработке модификации рангового критерия Вальда-Вольфовица; в разработке новых многовыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита для проверки однородности распределений; в построении моделей предельных распределений для новых многовыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита; в проведении сравнительного анализа мощности рассмотренного множества k -выборочных критериев проверки однородности законов.

Практическая ценность и реализация результатов. Разработанные алгоритмы моделирования распределений статистик и применения критериев для проверки гипотезы отсутствия тренда и k -выборочных критериев проверки однородности законов реализованы в трех последовательно зарегистрированных версиях (5.2, 5.3 и 5.4) программы для ЭВМ – «Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика» (свидетельства о государственной регистрации № 2014661513, № 2015663326, № 2018666213). Результаты диссертационных исследований и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе, в научных исследованиях и при решении задач статистического анализа в различных приложениях. Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (проекты № 2.541.2014/К и № 1.1009.2017/4.6).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Содержание диссертации соответствует п.5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечения, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались на международном семинаре “Applied Methods of Statistical Analysis”, Новосибирск, 2015 г. и 2017 г.; международном форуме по стратегическим технологиям “International Forum on Strategic Technology, IFOST-2016”, Новосибирск, 2016 г.; республиканской научно-практической конференции “СТАТИСТИКА и её применения-2017”, Ташкент, Узбекистан, 2017 г.; международной научно-технической конференции “Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (АСМРТ-2017)”, Москва, 2017 г.; международной научно-технической

конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”, Новосибирск, 2014 г., 2016 г., 2018 г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013 г., 2014 г., 2015 г., 2016 г., 2018 г., 2019 г.; международном семинаре “Mathematics, statistics and computation to support measurement quality”, Санкт-Петербург, 2018 г.; международной научно-практической конференции “Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике”, Санкт-Петербург, 2013 г., 2014 г.; международной конференции “Вычислительная математика и математическая геофизика”, Новосибирск, 2018 г.; Всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технология. Инновации”, Новосибирск, 2012 г., 2013 г. и 2017 г.

Публикации. По результатам исследований опубликованы 27 печатных работ, в том числе: 3 статьи в научных журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК РФ, 6 статей в рецензируемых трудах международных конференций, индексируемых в Web of Sciences и/или Scopus, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, 15 публикаций в материалах международных и российских конференций.

Структура работы. Общий объем диссертационной работы составляет 203 страницы. Работа состоит из введения, 5-и глав основного содержания, включая 62 таблицы и 81 рисунок, заключения, списка литературы из 120 наименований и 3-х приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении аргументирована актуальность исследований, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, показана научная новизна полученных результатов и область их практического применения, приведены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе даются некоторые общие сведения, связанные с проверкой статистических гипотез, говорится о наличии проблем, связанных с применением параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда, а также с применением критериев однородности. Формулируются общие цели исследований, обосновывается выбор конкурирующих гипотез, используемых при уточнении свойств критериев и позволяющих выявить определенные не-

достатки исследуемых критериев и проранжировать относительно них рассматриваемые критерии по мощности.

Анализ мощности критериев (в основном) проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых одинаково распределенных случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез при проверке гипотез об отсутствии тренда в средних рассматриваются модели с заданием линейного и периодического тренда следующего вида

$$x_i = a \cdot t_i + b \cdot \sin(2k\pi t_i) + \xi_i.$$

Здесь ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые по заданному закону (например, по стандартному нормальному закону), $t \in [0,1]$. Мощность критериев исследовалась относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_3$ с линейным трендом и относительно гипотез $H_4 - H_7$ с периодическим трендом в математическом ожидании:

$$H_1: X_i = 0.5t_i + \xi_i;$$

$$H_2: X_i = 1.5t_i + \xi_i;$$

$$H_3: X_i = 4t_i + \xi_i;$$

$$H_4: X_i = 0.5 \sin(2\pi t_i) + \xi_i;$$

$$H_5: X_i = 0.25 \sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i;$$

$$H_6: X_i = 0.5 \sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i;$$

$$H_7: X_i = \sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i.$$

Для критериев обнаружения изменения дисперсии в неизвестной точке в качестве конкурирующих гипотез (при нормальном распределении случайных величин) рассматривались близкие к H_0 гипотезы $H_8 - H_{10}$, когда в некоторый момент стандартное отклонение увеличивалось на 5, 10, 15%:

$$H_8: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 1.1025,$$

$$H_9: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 1.21,$$

$$H_{10}: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 1.3225,$$

где $k = n/2$. Это очень близкие конкурирующие гипотезы, которые трудно отличить от H_0 при малых объёмах выборок. В качестве более далеких рассматривались конкурирующие гипотезы

$$H_{11}: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 2,$$

$$H_{12}: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 4.$$

При анализе мощности относительно линейного, периодического и смешанного тренда в характеристиках рассеяния (в дисперсии) случайной величины рассматривались конкурирующие гипотезы:

$$H_{13}: x_i = \xi_i(1 + ct_i), \quad c = 1;$$

$$H_{14}: x_i = \xi_i(1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i)), \quad d = 0.8, \quad k = 2;$$

$$H_{15}: x_i = \xi_i(1 + ct_i + d \sin(2k\pi t_i)), \quad c = 1, \quad d = 0.8, \quad k = 2.$$

Мощность рассматриваемых k -выборочных критериев однородности законов предлагается исследовать методами статистического моделирования относительно трех выбранных альтернатив, соответствующих изменению параметра сдвига, изменению параметра масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежит близким, но различным законам (нормальному и логистическому).

Обосновывается важность развития программного обеспечения, реализующего технологии компьютерного моделирования и используемого в качестве инструмента исследований, и необходимая точность моделирования, применяемого в исследованиях.

Во второй главе методами статистического моделирования исследуются свойства множества параметрические критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в средних: автокорреляции, его модификация (нормированная сумма коэффициентов корреляции первого и второго порядков), Люнга-Бокса, Морана, Дюффа-Роя, Вальда-Вольфовица, Хсу и знаково-ранговый критерий Холлина. Аналогичным образом рассматривается ряд непараметрических критериев: ранговый и сериальный критерии Вальда-Вольфовица, критерии инверсий, Бартелса, Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта, кумулятивной суммы, Рамачандрана-Ранганатана.

В частности, исследуется влияние объема выборок на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0 . Для критериев с известными предельными распределениями статистик получены оценки объемов выборок n , начиная с которых можно использовать предельное (асимптотическое) распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения этой статистики, имеющего место при конкретном n . Для параметрических критериев исследовано поведение распределений статистик при

справедливости H_0 в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Отмечены достоинства и недостатки отдельных критериев.

Получены оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам, на основании которых критерии могут быть упорядочены по предпочтительности (см. табл. 1).

В программном обеспечении реализована возможность корректного применения параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в средних с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} (в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений и в отсутствие знаний о реальных распределениях статистик критериев).

Таблица 1 – Оценки мощности критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_3$

№ п/ п	Критерий	Оценки мощности $1-\beta$ относительно гипотез наличия линейного тренда		
		H_1	H_2	H_3
1	Критерий обратных инверсий	0.403	0.994	1.000
2	Критерий К-инверсий	0.403	0.994	1.000
3	Критерий инверсий	0.401	0.994	1.000
4	Кокса–Стюарта	0.308	0.957	1.000
5	Рамачандрана–Ранганатана	0.139	0.291	0.984
6	Модификация критерия автокорреляции	0.125	0.651	1.000
7	Кумулятивной суммы	0.124	0.535	1.000
8	Фостера–Стюарта	0.117	0.310	0.798
9	Холлина	0.116	0.462	1.000
10	Критерий автокорреляции	0.113	0.455	1.000
11	Морана	0.113	0.455	1.000
12	Людга–Бокса	0.113	0.455	1.000
13	Дюффа–Роя	0.113	0.455	1.000
14	Вальда–Вольфовица	0.113	0.455	1.000
15	Ранговый критерий Вальда–Вольфовица	0.112	0.461	1.000
16	Ранговый критерий Дюффа–Роя	0.112	0.455	1.000
17	Баргелса	0.112	0.461	1.000
18	Сериальный критерий Вальда–Вольфовица	0.109	0.291	0.997
19	Критерий числа серий знаков первых разностей	0.100	0.042	0.100

Исследовано влияние ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев. Показано, что при существенной степени округления Δ регистрируемых данных и появлении в выборках повторяющихся значений распределения статистик рассматриваемых критериев (при справедливости H_0)

ности H_0) могут заметно изменяться. В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях изменения распределений статистик, вызванного ограниченной точностью регистрации анализируемых данных (из-за существенной степени округления Δ).

Проведенные исследования подчеркивают, что корректное применение множества рассмотренных критериев требует знания реальных распределений статистик $G(S | H_0)$, соответствующих реальным условиям применения критериев, и специального программного обеспечения.

В третьей главе исследованы непараметрические критерии (Кокса-Стюарта, Фостера-Стюарта, критерии с метками Клотца и Сэвиджа) и параметрический критерий Хсу с H - и G -статистиками, предназначенные для обнаружения тренда в характеристиках рассеяния. Исследовано влияние объема выборок на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0 .

Для критериев с известными предельными распределениями статистик получены оценки n , начиная с которых можно использовать асимптотическое распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения, имеющего место при конкретном n . Для параметрических критериев исследовано поведение распределений статистик при справедливости H_0 в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Отмечены достоинства и недостатки отдельных критериев.

На основе результатов статистического моделирования показано, что хорошей приближенной моделью предельного распределения статистики G -критерия Хсу является бета-распределение 1-го рода с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_1 - 1}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 2.7663$, $\theta_1 = 2.7663$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 0$. Опираясь на этот закон можно находить процентные точки $G_{\alpha/2}$ и $G_{1-\alpha/2}$ или значения p_{value} .

По полученным оценкам мощности (см. табл. 2) по отношению к близким конкурирующим гипотезам $H_8 - H_{15}$ рассмотренные критерии можно расположить в порядке убывания мощности следующим образом:

Н-критерий Хсу \succ Клотц \succ G -критерий Хсу \succ Кокса-Стюарта \succ
 \succ Фостера-Стюарта \succ Сэвиджа.

В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} , предусматривающая интерактивное моделирование неизвестных распределений статистик.

Исследовано влияние ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев. В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях изменившихся распределений статистик, связанных со степенью округления Δ .

Таблица 2 – Сравнительный анализ мощности критериев проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях ($n = 100, \alpha = 0.1$)

№ п/п	Относительно H_8	$1 - \beta$	Относительно H_9	$1 - \beta$	Относительно H_{10}	$1 - \beta$
1	Хсу Н	0.156	Хсу Н	0.304	Хсу Н	0.500
2	Клотца	0.151	Клотца	0.287	Клотца	0.469
3	Хсу G	0.147	Хсу G	0.269	Хсу G	0.430
4	Кокса–Стюарта	0.123	Кокса–Стюарта	0.188	Кокса–Стюарта	0.284
5	Сэвиджа	0.110	Фостера–Стюарта	0.130	Фостера–Стюарта	0.165
6	Фостера–Стюарта	0.106	Сэвиджа	0.129	Сэвиджа	0.159

№ п/п	Относительно H_{11}	$1 - \beta$	Относительно H_{12}	$1 - \beta$	Относительно H_{13}	$1 - \beta$
1	Хсу Н	0.991	Хсу Н	1.000	Хсу Н	0.836
2	Клотца	0.982	Клотца	1.000	Хсу G	0.818
3	Хсу G	0.933	Кокса–Стюарта	0.997	Клотца	0.807
4	Кокса–Стюарта	0.808	Хсу G	0.993	Кокса–Стюарта	0.489
5	Фостера–Стюарта	0.394	Фостера–Стюарта	0.625	Фостера–Стюарта	0.346
6	Сэвиджа	0.364	Сэвиджа	0.610	Сэвиджа	0.246

№ п/п	Относительно H_{14}	$1 - \beta$	Относительно H_{15}	$1 - \beta$
1	Хсу Н	0.711	Хсу Н	0.162
2	Клотца	0.678	Сэвиджа	0.095
3	Хсу G	0.545	Фостера–Стюарта	0.082
4	Сэвиджа	0.196	Хсу G	0.057
5	Кокса–Стюарта	0.143	Кокса–Стюарта	0.052
6	Фостера–Стюарта	0.048	Клотца	0.104

Отмечено, что вычисление статистики критерия Сэвиджа возможно лишь при целых значениях рангов выборочных значений, а, следовательно, данный критерий некорректно применять для анализа выборок, включающих повторяющиеся значения (например, данных с ограниченной точностью).

В четвертой главе рассмотрено применение k -выборочных критериев Жанга, Андерсона–Дарлинга и χ^2 Пирсона проверки гипотез об однородности законов.

Предложены новые k -выборочные критерии однородности законов, опирающиеся на применение к каждой паре анализируемых выборок двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита. В качестве статистики такого k -выборочного критерия предложены статистики вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i < j \leq k}} \{S_{i,j}\},$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i -й и j -й выборок. Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при больших значениях статистики S_{\max} . Некоторым преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми оказывается наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия. В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга.

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик предложенных критериев и построены приближенные модели предельных распределений статистик (см. табл. 3) для числа сравниваемых выборок $k = \overline{3, 11}$, используемые при вычислении достигнутого уровня значимости p_{value} . Наилучшими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1} / \left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right]^{\theta_0 + \theta_1},$$

представленные в таблице 3 в виде $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ при конкретных значениях параметров этого закона, а также распределения Sb–Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 3 как $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. При $k = 2$ статистики S_{\max} подчиняются соответственно распределениям Колмогорова, $a1(S)$ и $a2(S)$.

В развиваемую программную систему ISW встроен модуль, реализующий моделирование распределений статистик всех рассмотренных в работе k -выборочных критериев однородности.

Реализован интерактивный режим моделирования распределений статистик k -выборочных критериев Жанга, позволяющий вычислять оценку p_{value} по результатам проверки гипотезы.

Проведен сравнительный анализ мощности множества k -выборочных критериев проверки однородности законов относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

Таблица 3 – Модели предельных распределений статистик S_{max} критериев

k	Смирнова	Лемана–Розенблатта	Андерсона–Дарлинга
2	$K(S)$	$a1(S)$	$a2(S)$
3	$B_{III} (6.33,6.62,2.82,2.41,0.41)$	$Sb(3.285,1.204,3.0,0.0215)$	$B_{III} (4.43,2.74,12.11,8.5,0.185)$
4	$B_{III} (7.27,7.21,2.62,2.38,0.47)$	$Sb(2.58,1.217,2.237,0.0356)$	$B_{III} (5.20,3.22,10.78,10.,0.232)$
5	$B_{III} (7.13,7.34,2.48,2.34,0.56)$	$Sb(3.172,1.41,3.15,0.032)$	$B_{III} (5.75,3.30,9.74,10.,0.30)$
6	$B_{III} (7.08,8.04,2.32,2.38,0.63)$	$Sb(3.00,1.477,2.985,0.038)$	$B_{III} (5.57,3.49,7.77,10.,0.375)$
7	$B_{III} (7.73,8.68,2.35,2.45,0.67)$	$Sb(3.203,1.553,3.405,0.045)$	$B_{III} (6.49,3.67,8.05,10.5,0.39)$
8	$B_{III} (7.82,8.91,2.27,2.42,0.71)$	$Sb(3.267,1.63,3.55,0.047)$	$B_{III} (6.39,3.81,7.36,10.8,0.48)$
9	$B_{III} (7.84,8.88,2.17,2.33,0.75)$	$Sb(3.455,1.71,3.88,0.040)$	$B_{III} (6.79,3.99,7.13,11.1,0.515)$
10	$B_{III} (7.88,8.91,2.20,2.33,0.79)$	$Sb(3.497,1.77,3.90,0.051)$	$B_{III} (6.75,4.28,6.65,11.7,0.58)$
11	$B_{III} (7.91,9.01,2.12,2.29,0.82)$	$Sb(3.463,1.82,3.97,0.0544)$	$B_{III} (7.17,4.35,6.62,11.8,0.61)$

Далее на примере критериев однородности законов демонстрируется проблемы, связанные с ограниченной точностью представления данных в больших выборках и с большим числом повторяющихся значений в выборках ограниченного объёма (из-за существенной степени округления Δ меняется распределение статистики при справедливости H_0). Показывается, что в многовыборочных критериях на распределения статистик влияет неравноточность исходных данных в сравниваемых выборках.

В пятой главе кратко описано назначение и возможности программных модулей (с примерами применения), разработанных в рамках развиваемой программной системы «Интервальная статистика для Windows», позволяющих:

- моделировать и исследовать распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез

об отсутствии тренда в математическом ожидании или в дисперсии, а также применять это множество критериев;

– моделировать и исследовать распределения статистик множества k -выборочных критериев, предназначенных для проверки гипотез об однородности законов (критериев Жанга со статистиками Z_A , Z_C и Z_K , k -выборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга, критерия однородности χ^2 , предложенных критериев максимума Смирнова, максимума Лемана–Розенблатта, максимума Андерсона–Дарлинга–Петита), а также применять эту совокупность критериев;

– использовать интерактивный режим моделирования распределений статистик применяемых критериев (в условиях отсутствия информации о предельном распределении статистики или неправомерности его использования при ограниченных объёмах выборок, либо в случае применения критерия в условиях нарушения стандартных предположений), с последующим вычислением оценки p_{value} по полученному в результате моделирования распределению.

Здесь же показано применение рассмотренных в работе множеств критериев проверки однородности законов и критериев проверки гипотез об отсутствии тренда (в нестандартных условиях) при анализе рядов измерений скорости ветра (в м/сек) и инсоляции (потока солнечной радиации на поверхность) в (вт/м²), снятых за период январь-декабрь 2016 года в одном из районов Казахстана.

В приложениях приведены таблицы полученных оценок мощности критериев об отсутствии тренда относительно рассмотренных в работе конкурирующих гипотез, акты об использовании результатов исследований и свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании или в дисперсии. Оценены объёмы выборок, начиная с которых можно пользоваться предельными (асимптотическими) распределениями статистик критериев вместо действительных (дискретных) распределений этих статистик.

На основе результатов статистического моделирования показано, что наилучшей приближенной моделью предельного распределения G-статистики критерия Хсу является бета-распределение 1-го рода с полученными оценками параметров.

Предложена модификация статистики рангового критерия Вальда-Вольфовица, распределение которой (в отличие от оригинальной статистики) хорошо согласуется со стандартным нормальным законом уже при $n > 10$.

2. Проведен сравнительный анализ мощности критериев, ориентированных на проверку отсутствия тренда в математическом ожидании, и критериев, ориентированных на проверку отсутствия тренда в дисперсии, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или иных критериев. Отмечены недостатки отдельных критериев.

3. Предложены новые k -выборочные критерии проверки однородности законов, опирающиеся на применение к каждой паре анализируемых выборок двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлингга–Петита. Для предложенных критериев методами статистического моделирования исследованы распределения статистик и построены модели предельных распределений статистик для числа сравниваемых выборок $k = \overline{3,11}$, на основании которых могут находиться оценки достигнутого уровня значимости p_{value} .

4. Проведен сравнительный анализ мощности рассмотренного множества k -выборочных критериев однородности законов относительно близких конкурирующих гипотез.

5. Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать и исследовать распределения статистик множества рассмотренных в диссертации параметрических и непараметрических критериев, а также применять эти критерии. В случае отсутствия предельного распределения статистики применяемого критерия или неправомерности его использования при малых n , а также в случае применения критерия в условиях нарушения стандартных предположений предусмотрено использование интерактивного режима моделирования распределений статистик применяемых критериев, с последующим вычислением оценки p_{value} по полученному в результате моделирования распределению.

Полученные результаты и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе факультета прикладной математики и информатики в

рамках курса «Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010400 — прикладная математика и информатика.

Результаты и программное обеспечение используются при проведении научных исследований, используются метрологическими НИИ при статистическом анализе измерений, связанных с различными задачами метрологического обеспечения, что подтверждается соответствующими актами.

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661513, №2015663326, №2018666213).

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях перечня ВАК РФ

1. Лемешко Б. Ю. Веретельникова И.В. Мощность k-выборочных критериев проверки однородности законов // Измерительная техника. 2018.№7. – С.3-7. [Lemeshko B.Yu., Veretel'nikova I.V. Power of k-sample tests aimed at checking the homogeneity of laws // Measurement Techniques, Vol. 61, No. 7, October, 2018. – P. 647-654.]
2. Веретельникова И. В., Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Новикова А. Ю. О применении критериев проверки однородности средних // Вестник СибГУТИ. 2018. – № 1. – С. 41-55.
3. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. О применении критериев проверки однородности законов распределения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. – № 41. – С. 24-31.

Публикации в рецензируемых международных изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus

4. Lemeshko B.Yu. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, I.V. Veretel'nikova, A.Yu. Novikova // Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017). Proceedings of the International Scientific Conference, 23-27 October 2017, Moscow, Russia. - P. 395-399.
5. Lemeshko B.Yu. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B.Y. Lemeshko, I.V. Veretelnikova, S.B. Lemeshko, A.Y. Novikova // In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science.: monograph. - Cham: Springer, 2017. - 10684. - P. 461-475.

6. Lemeshko B.Yu. On the Application of Homogeneity Tests / B.Yu. Lemeshko, I.V. Veretelnikova, S.B. Lemeshko, A.Yu. Novikova // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric methods in Cybernetics and system Analysis". 18-22 September 2017, Krasnoyarsk. P. 181-195.
7. Veretelnikova I.V. Criteria of Test against Absence of Trend in Dispersion Characteristics /I.V. Veretelnikova , B.Yu. Lemeshko//Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST), June 1-3, 2016, Novosibirsk, Russia. Part 1. – P. 333-337.
8. Lemeshko B.Yu. On power of randomness and absence of trend tests in dispersion characteristics /B.Yu. Lemeshko, I.V.Veretelnikova // 2016 13TH INTERNATIONAL SCIENTIFIC TECHNICAL CONFERENCE ON ACTUAL PROBLEMS OF ELECTRONIC INSTRUMENT ENGINEERING (APEIE) – 39281 PROCEEDINGS. Vol.1, Part 2, Novosibirsk, 2016. – P.281-286.
9. Veretelnikova I.V. The analytical review of tests for randomness and the absence of a trend / I.V. Veretelnikova , B.Yu. Lemeshko // 2014 12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACTUAL PROBLEMS OF ELECTRONICS INSTRUMENT ENGINEERING (APEIE) 34006 PROCEEDINGS. Vol. 1. Novosibirsk, 2014. – P.532-539.

**Работы, опубликованные в международных и российских изданиях,
сборниках научных трудов конференций**

10. Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В. О применении и мощности k-выборочных критериев однородности законов // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. Новосибирск, СибГУТИ, 26–27 апр. 2018 г. – С. 48–59.
11. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В., Лемешко С.Б., Новикова А.Ю. Статистический анализ результатов измерений: методы, критерии проверки гипотез, проблемы применения и их решение // Материалы седьмой международной научно-технической конференции «Измерения и испытания в судостроении и смежных областях – СУДОМЕТРИКА-2018», 15-17 октября 2018 г., Санкт-Петербург. – С.158–167.
12. Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В. О k-выборочных критериях проверки однородности законов // Марчуковские научные чтения – 2018. Тезисы международной конференции “Вычислительная математика и математическая геофизика”, Новосибирск, 8–12 октября 2018 г. – С. 33-34.
13. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu. Tests for an Absence of Trend // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach” – AMSA’2015, Novosibirsk–Belokuricha, Russia, 14-19 September, 2015. – P. 80-91.

14. Веретельникова И. В., Лемешко Б. Ю. Статистическое моделирование как средство обеспечения корректности выводов при использовании критериев однородности дисперсий в нестандартных условиях // Труды Международной конференции по вычислительной и прикладной математике "ВПМ'17" в рамках "Марчуковских научных чтений", Новосибирск, 25 июня – 14 июля [Электрон. ресурс]. <http://conf.nsc.ru/cam17/ru/proceedings>. Стр. 536-541.
15. Лемешко Б.Ю. Проблемы применения критериев однородности и их решение / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, И. В. Веретельникова, А. Ю. Новикова // Материалы республиканской научно-практической конференции "СТАТИСТИКА и её применения-2017". 19-20 октября 2017. Под редакцией профессора А.А. Абдушукурова. Ташкент, НУУз. – С.49-56.
16. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О мощности критериев случайности и отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Труды XIII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2016. Т.8, Новосибирск, 2016. – С.113-118.
17. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. Аналитический обзор критериев проверки случайности и отсутствия тренда // Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.16-23.
18. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях отсутствия тренда в математическом ожидании // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. Новосибирск, СибГУТИ, 21–22 апр.2016 г. – С. 27-38.
19. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С. 42-53.
20. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. К вопросам применения критериев проверки случайности и отсутствия тренда// Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2014. – С.25-28.
21. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С. 42-53.
22. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О применении критериев проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда // Высокие технологии, фундаментальные исследования, инновации : сборник статей Семнадцатой международной научно-практической конференции “Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике”, 22-23 мая 2014 г., Санкт-Петербург, Россия / научные редакторы А.П. Кудинов, М.А. Кудинов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – С.33-37.

23. Веретельникова И.В., Новикова А.Ю. О применении критериев однородности // Наука. Технологии. Инновации: материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых, Новосибирск, 04–08 дек. 2017 г. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – Ч. 2. – С.37–40.

24. Lemeshko B.Yu., Blinov P.Yu., Veretelnikova I.V., Lemeshko S.B. Statistical Simulation as a Toll for Solving Problems and Expanding the Scope of Classical Criteria of Testing Statistical Hypotheses // Eighth International Workshop on Simulation. Book of Abstracts. / Editors: Dieter Rasch, Viatcheslav Melas, Jürgen Pilz, Karl Moder, Bernhard Spangl / Vienna, September 21-25, 2015. С Р. 124. (*тезисы НТК*).

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

25. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н., Лемешко С.Б., Веретельникова И.В. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин “Интервальная статистика 5.2” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2014661513 от 30.10.2014.

26. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин “Интервальная статистика 5.3” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2015663326 от 15.12.2015.

27. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В., Новикова А.Ю. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин “Интервальная статистика 5.4” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2018666213 от 13.12.2018.

Отпечатано в типографии Новосибирского
государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса 20
Тел./факс (383) 346-08-57

Формат 60x84 1/16. Объем 1,5 п.л. Тираж 100 экз.

Заказ № 1375. Подписано в печать 10.10.2019 г.