

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи

Шашкова Татьяна Геннадьевна

**КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ГЕОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ КРУГОВОГО  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ  
ТРЕХМЕРНЫХ СРЕДАХ**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
д.т.н., профессор Персова М.Г.

Новосибирск – 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОЛЯ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ.....	11
1.1. Моделирование нестационарного электромагнитного поля КЭД.....	11
1.1.1. Моделирование двумерного нестационарного электромагнитного поля КЭД	11
1.1.2. Моделирование трехмерного стационарного электромагнитного поля КЭД в изотропных средах.....	13
1.1.3. Моделирование трехмерного стационарного электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах.....	15
1.1.4. Моделирование трехмерного нестационарного электромагнитного поля КЭД в изотропных средах.....	16
1.1.5. Моделирование трехмерного нестационарного электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах.....	16
1.2. Моделирование полей вызванной поляризации для источника КЭД.....	17
1.3. Выводы .....	23
2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ И ИХ ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ПОЛЕЙ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....	25
2.1. Двумерное электромагнитное поля КЭД.....	25
2.1.1. Эквивалентные вариационные постановки .....	25
2.1.2. Построение дискретных аналогов .....	26
2.2. Трехмерное стационарное электромагнитное поля КЭД.....	28
2.2.1. Эквивалентные вариационные постановки .....	28
2.2.2. Построение дискретных аналогов .....	30
2.3. Трехмерное нестационарное электромагнитное поля КЭД.....	32
2.3.1. Эквивалентные вариационные постановки .....	32

2.3.2. Построение дискретных аналогов .....	33
2.4. Поле вызванной поляризации КЭД в изотропных и анизотропных средах	37
2.4.1. Эквивалентные вариационные постановки .....	37
2.4.2. Построение дискретных аналогов .....	39
2.5. Выводы .....	42
3. РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ПОЛЕЙ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ.....	43
3.1. Структура программного комплекса.....	43
3.2. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования нестационарных электромагнитных полей в анизотропных средах .....	48
3.3. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования полей вызванной поляризации в изотропных средах.....	66
3.4. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования полей вызванной поляризации в анизотропных средах.....	72
3.5. Выводы .....	78
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ .....	80
4.1. Применение программного комплекса для решения задач поиска нефтегазовых залежей в условиях глубоководной части арктического бассейна 80	
4.2. Применение программного комплекса для решения задач в условиях шельфовой зоны арктического бассейна.....	85
4.3. Мониторинг водонефтяного контакта на основе измерений электромагнитного поля КЭД .....	91
4.4. Оценка влияния анизотропии по коэффициенту начальной поляризации на получаемый сигнал ВП .....	99
4.5. Выводы .....	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	105

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	107
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	118

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие математического аппарата моделирования трехмерных нестационарных электромагнитных полей во многом определяет уровень и возможности многих технологий электроразведки [2, 26]. Данная работа посвящена разработке программно-математического аппарата для источника в виде кругового электрического диполя (КЭД) [11-14, 19, 21, 23, 29, 35-38] – относительно нового и при этом многообещающего источника, возможности применения которого в настоящее время еще слабо изучены по причине отсутствия высокоточного и многофункционального программного обеспечения (ПО), позволяющего проектировать соответствующие полевые работы и интерпретировать [20, 46, 49, 50, 52, 53, 56, 82] получаемые в результате их выполнения данные. Особенно актуальным может быть использование источника КЭД для решения задач морской электроразведки.

Установка КЭД представляет собой радиально направленный ток, который заземлен в центре установки и на некотором расстоянии, называемым внешним радиусом КЭД. Технология, использующая КЭД в качестве источника, называется технологией зондирования вертикальными токами – она была предложена и разрабатывалась в работах [11,13, 89]. Данная технология, в частности, позволяет при измерении вертикальной магнитной компоненты наблюдать на дневной поверхности только отклик от трехмерной неоднородности, свободный от откликов от вмещающей среды.

Для получения распределения электромагнитного поля в средах с относительно простой структурой часто используются аналитические и полуаналитические методы, разрабатываемые, например, в [14, 39, 40, 51]. Основное достоинство этих методов заключается в том, что базирующиеся на их использовании алгоритмы позволяют достаточно быстро, с небольшими вычислительными затратами получать характеристики изучаемого поля в отдельных точках (приемниках). А к главным недостаткам указанных методов можно отнести невозможность учета всех особенностей решаемой задачи, в том числе и полностью адекватного учета структуры среды. Методы численного

моделирования являются с этой точки зрения более универсальными, хотя и требуют более высоких вычислительных затрат. При решении дифференциально-краевых задач, описывающих геоэлектромагнитные поля в сложных средах, широко используются метод интегральных уравнений (МИУ), метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ). Соответствующие подходы разрабатывались и обсуждаются в работах [3-7, 10, 17, 24, 25, 27, 28, 31, 47-49, 50, 52, 83, 84, 93, 95, 96, 98, 102, 104, 105]. Кроме того, при решении задач численными методами довольно часто используется технология выделения поля [18 - 22, 32, 33, 42], которая позволяет многократно сократить вычислительные затраты при моделировании трехмерных геоэлектромагнитных полей.

При моделировании процессов становления поля КЭД необходимо также учитывать, что установившееся поле приводит к возникновению вторичного поля – поля вызванной поляризации (ВП) [15, 30, 44, 50, 56, 58, 59, 68, 69, 71, 73, 82, 84, 85, 92, 102, 105]. Вклад сигналов ВП для рассматриваемого источника может быть довольно существенным, а отсутствие учета этого вклада может привести к ошибкам в интерпретации данных. Кроме того, реальная моделируемая среда является трехмерной по своим геоэлектрическим свойствам. Поэтому использование упрощенных моделей (без учета анизотропности среды) для расчетов процессов становления поля и поля ВП для источника КЭД в анизотропных средах может также дать некорректный результат.

Таким образом, создание вычислительных схем и реализующего их ПО, позволяющего выполнять 3D-моделирование электромагнитных полей и полей вызванной поляризации для этой установки в сложных геоэлектрических средах с учетом наличия в них трехмерных неоднородностей с анизотропной проводимостью, является **актуальной** задачей, решение которой позволит расширить возможности электромагнитных технологий геологоразведки.

**Основной научной проблемой**, решению которой посвящена данная диссертационная работа, является проблема разработки и программной реализации вычислительных схем конечноэлементного моделирования электромагнитных полей и полей вызванной поляризации для источника КЭД в

изотропных и анизотропных средах. При этом разработанное программное обеспечение должно адекватно учитывать анизотропные свойства среды, геометрию источника и обладать высокой вычислительной эффективностью.

### **Цели и задачи исследования**

Целью работы является разработка программно-математического аппарата 3D-моделирования геоэлектромагнитных полей, порождаемых источником в виде кругового электрического диполя. Для достижения этой цели были решены следующие задачи.

1. Разработаны вычислительные схемы 3D-моделирования стационарных и нестационарных геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых источником в виде КЭД в анизотропных средах.

2. Разработаны вычислительные схемы 3D-моделирования полей вызванной поляризации, возбуждаемых источником в виде КЭД в изотропных и анизотропных средах.

3. Проведены исследования возможностей технологии электромагнитных зондирований с источником в виде КЭД при решении задач морской электроразведки.

### **Научная новизна**

Разработан и реализован метод конечноэлементного моделирования процессов становления поля КЭД в анизотропных трехмерных средах.

Разработан и реализован метод конечноэлементного моделирования полей ВП в изотропных и анизотропных средах для источника в виде КЭД.

Проведено моделирование электромагнитных технологий с источником в виде КЭД для задач морской электроразведки в условиях арктического бассейна.

### **На защиту выносятся**

Конечноэлементные схемы моделирования процессов становления поля КЭД в анизотропных трехмерных средах.

Конечноэлементные схемы моделирования полей ВП для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах.

Программная реализация разработанных схем и результаты ее использования для решения задач геоэлектромагнетизма для источника КЭД.

### **Достоверность результатов**

Расчеты полей для источника КЭД в простых средах сравнивались с результатами, полученными другими авторами.

Результаты моделирования полей ВП для источника КЭД сравнивались с результатами моделирования для установки, составленной из  $n$  горизонтальных электрических линий.

Верификация разработанных вычислительных схем моделирования процессов становления электромагнитных полей и полей ВП для источника КЭД в анизотропных средах проводилась на модели среды, содержащей трехмерный "пластинчатый" объект, в котором чередуются пластинки с различной проводимостью.

### **Практическая значимость работы и реализация результатов**

Предлагаемые в данной работе методы построения трехмерных дискретизаций и конечноэлементные вычислительные схемы моделирования полей ВП реализованы в программном комплексе CED-MAR – 3D-моделирование геоэлектромагнитных полей кругового электрического диполя для решения задач морской электроразведки. Этот программный комплекс использовался для моделирования различных геоэлектромагнитных полей при проектировании полевых электроразведочных работ и формировании синтетических данных для анализа возможностей выполнения 3D-инверсий.

### **Личный вклад**

Лично автором разработаны и программно реализованы методы моделирования процессов становления электромагнитных полей КЭД в анизотропных трехмерных средах, а также полей вызванной поляризации для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах. Проведен анализ точности получаемых конечноэлементных решений и вычислительной эффективности разработанных методов.

### **Апробация работы**



Основные результаты работы были представлены на Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (Новосибирск, 2010, 2011 гг.); международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электроники и приборостроения» (Новосибирск, 2012 г.); Российской научно-технической конференции «Информатика и проблемы телекоммуникаций» (Новосибирск, 2011 г.); Российской научно-технической конференции «Обработка информационных сигналов и математическое моделирование» (Новосибирск, 2013 г.); VI Всероссийской школе-семинаре по электромагнитным зондированиям Земли Имени М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна (ЭМЗ-2013), проведенной 2-6 сентября 2013 года, г. Новосибирск, Академгородок; Международном симпозиуме International symposium on Three-Dimensional Electromagnetics (Sapporo, Japan, May 7 – 9, 2013).

Работа выполнялась в рамках государственных заданий высшим учебным заведениям в части проведения НИР (шифр заявки 8.874.2011).

### **Публикации**

По результатам выполненных исследований опубликовано 11 работ, из них 3 статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК, 1 работа в сборнике научных трудов, 6 публикаций в сборниках трудов конференций и одно свидетельство о регистрации программы для ЭВМ в ФИПС (Роспатент).

### **Структура работы**

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников (105 наименований). Общий объем диссертации – 120 страниц, в том числе 49 рисунков и 12 таблиц.

### **Краткое содержание работы**

В **первой главе** диссертационной работы приведены математические модели в виде дифференциальных уравнений, использующиеся для моделирования трехмерных электромагнитных полей и полей ВП для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах. Рассмотрены математические модели с выделением основной части поля.

Во **второй главе** диссертационной работы рассматриваются вариационные постановки и дискретные аналоги математических моделей, приведенных в первой главе диссертационной работы. Постановки приводятся с использованием как узлового, так и векторного МКЭ в изотропных и анизотропных средах.

В **третьей главе** диссертационной работы представлено описание разработанного программного комплекса. Приводится назначение программных модулей, разработанных автором, а также их взаимосвязь. Кроме того, в данной главе рассматривается верификация разработанных вычислительных схем.

**Четвертая глава** диссертационной работы посвящена описанию результатов вычислительных экспериментов моделирования процессов становления электромагнитных полей и полей ВП для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах. В одном из примеров приведены результаты моделирования электромагнитного поля для установки в виде КЭД, расположенной на дрейфующей льдине, при решении задачи картирования геоэлектрического строения и поиска месторождений полезных ископаемых. Также в данной главе рассматривается задача мониторинга водонефтяного контакта на основе измерений электромагнитного поля.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

# 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОЛЯ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

## 1.1. Моделирование нестационарного электромагнитного поля КЭД

### 1.1.1. Моделирование двумерного нестационарного электромагнитного поля КЭД

Система уравнений Максвелла, используемая при моделировании практически всех макроскопических электромагнитных явлений, в случае, когда токи смещения являются пренебрежимо малыми, может быть записана в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}^{CT} + \sigma \vec{E},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

где  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля,  $\vec{J}^{CT}$  – плотность сторонних токов,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость среды,  $t$  – время,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля (связанная с напряженностью  $\vec{H}$  соотношением  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\mu$  – коэффициент магнитной проницаемости).

Рассмотрим цилиндрическую расчетную область  $\Omega^{2D}$ . Ограничим ее вертикальной границей  $\Gamma_1$ , которая определяется некоторым малым радиусом  $r_0$  (который будем называть внутренним радиусом КЭД); дневной поверхностью  $\Gamma_2$ ; удаленной вертикальной границей  $\Gamma_3$  и горизонтальной границей  $\Gamma_4$ , являющейся либо удаленной, либо границей между средой и фундаментом. При этом заземленное кольцо со сторонним током  $\vec{J}^{CT}$  не будем включать в расчетную область.

Для получения начального распределения  $\vec{H}$  (соответствующего моменту выключения тока в КЭД) необходимо решить стационарную краевую задачу [29]:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \text{ в } \Omega^{2D}, \vec{H} = (0, H_\varphi, 0), \quad (1.1)$$

$$H_\varphi \Big|_{\Gamma_1'} = \frac{1}{2\pi r}, H_\varphi \Big|_{\Gamma_1/\Gamma_1'} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_2} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_3} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad (1.2)$$

где граница  $\Gamma_1'$  заключена между точками  $(r_0, 0)$  и  $(R, 0)$ .

После выключения тока нестационарный процесс становления поля без учета токов смещения описывается следующей начально-краевой задачей [29]:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \vec{H} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \text{ в } \Omega^{2D}, \vec{H} = (0, H_\varphi, 0), \quad (1.3)$$

$$H_\varphi \Big|_{\Gamma_1} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_2} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_3} = H_\varphi \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad (1.4)$$

т. е. на всех границах расчетной области  $\Omega^{2D}$  (включая  $\Gamma_1'$ ) для распределения  $H_\varphi$  задается однородное краевое условие первого рода.

По найденным из решения задач (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) значениям  $H_\varphi$  очень просто вычислить компоненты напряженности электрического поля [29]:

$$E_r = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, E_z = \frac{1}{\sigma r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r}. \quad (1.5)$$

Пересчитать  $E_r$  и  $E_z$  в декартову систему координат можно при помощи следующих соотношений [29]:

$$E_x(x, y, z, t) = E_r(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.6)$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_r(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.7)$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_z\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t\right). \quad (1.8)$$

Таким образом, краевые задачи (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) и соотношения (1.5) – (1.8) полностью описывают электромагнитное поле КЭД в осесимметричной среде.

### 1.1.2. Моделирование трехмерного стационарного электромагнитного поля КЭД в изотропных средах

Перейдем к рассмотрению трехмерного стационарного поля КЭД. Представим магнитное поле  $\vec{B}$  в виде суммы  $\vec{B} = \vec{B}^n + \vec{B}^a$ , где  $\vec{B}^n$  – индукция магнитного поля от вмещающей среды, а  $\vec{B}^a$  – поле влияния трехмерных объектов. Аналогично представим поля  $\vec{E} = \vec{E}^n + \vec{E}^a$ ,  $\vec{A} = \vec{A}^n + \vec{A}^a$ ,  $V = V^n + V^a$ .

В осесимметричной среде электрическое поле  $\vec{E}^n$  полностью описывается потенциалом  $V^n$ . Краевая задача для поля  $V^n$  выглядит следующим образом [19]:

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} V^n) = f, \quad (1.9)$$

$$V^n|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial V^n}{\partial n}|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4} = 0, \quad (1.10)$$

где  $\sigma^n$  – удельная электрическая проводимость вмещающей среды, а источник  $f$  представляет собой сумму двух сосредоточенных источников, расположенных в местах заземления электродов КЭД, причем по оси  $r$  один из источников расположен в начале координат, а другой (с обратным знаком) имеет координату  $R$ , равную радиусу КЭД.

Уравнение, описывающее распределение аномальной составляющей  $V^a$  скалярного электрического потенциала  $V$  в изотропной среде, имеет вид [19]:

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V^a) = -\operatorname{div}((\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} V^n), \quad (1.11)$$

$$V^a \Big|_{\Gamma_3} = 0, \frac{\partial V^a}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4} = 0. \quad (1.12)$$

Запишем математическую модель для расчета стационарного трехмерного магнитного поля при условии, что магнитная проницаемость в Земле  $\mu$  равна магнитной проницаемости в вакууме  $\mu_0$  [19]:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \bar{A}^a = -\sigma \text{grad} V^a - (\sigma - \sigma^n) \text{grad} V^n, \quad \bar{A}^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \quad (1.13)$$

где  $\Gamma_A$  – граница трехмерной области определения магнитного поля.

Уравнение (1.13) фактически является совокупностью трех независимых скалярных уравнений для компонент  $\bar{A}_x^a$ ,  $\bar{A}_y^a$ ,  $\bar{A}_z^a$ . Таким образом, в изотропной среде уравнение (1.13) будет иметь вид:

$$-\text{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \bar{A}_x^a \right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} - (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial x}, \quad \bar{A}_x^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_x^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \quad (1.14)$$

$$-\text{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \bar{A}_y^a \right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} - (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial y}, \quad \bar{A}_y^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_y^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \quad (1.15)$$

$$-\text{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \bar{A}_z^a \right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} - (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial z}, \quad \bar{A}_z^a \Big|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_z^a \Big|_{\Gamma_A} = 0. \quad (1.16)$$

Для расчета трехмерного нестационарного электромагнитного поля КЭД в качестве начального приближения необходима именно аномальная составляющая вектор-потенциала  $\bar{A}^a$ , которая может быть получена как результат решения последовательности задач (1.9) – (1.10), (1.11) – (1.12) и (1.14) – (1.16).

Аномальная составляющая  $\bar{A}^a$  полностью определяет значение индукции магнитного поля на поверхности Земли, поскольку для осесимметричной среды магнитное поле КЭД на поверхности Земли и в воздухе равно нулю и, следовательно, магнитное поле  $\vec{B}$  (там, где поле  $\vec{B}$  возможно измерять

практически) полностью совпадает с магнитным полем от трехмерных неоднородностей  $\vec{B}^a$ .

### 1.1.3. Моделирование трехмерного стационарного электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах

Рассмотрим уравнение, описывающее распределение аномальной составляющей  $V^a$  скалярного электрического потенциала в анизотропной среде, где удельная электрическая проводимость  $\sigma$  является тензором:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Подставим (1.17) в (1.11) – (1.12) и получим распределение аномальной составляющей  $V^a$  поля  $V$ :

$$-div(\sigma grad V^a) = -div((\sigma^n I - \sigma) grad V^n), \quad (1.18)$$

$$V^a|_{\Gamma_3} = 0, \frac{\partial V^a}{\partial n}|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4} = 0. \quad (1.19)$$

где распределение поля  $V^n$  получается из решения задачи (1.9) – (1.10).

Запишем математическую модель для расчета стационарного трехмерного магнитного поля в анизотропной среде:

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad \bar{A}_x^a\right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} - (\sigma - \sigma^n I) \frac{\partial V^n}{\partial x}, \bar{A}_x^a|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_x^a|_{\Gamma_A} = 0, \quad (1.20)$$

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad \bar{A}_y^a\right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} - (\sigma - \sigma^n I) \frac{\partial V^n}{\partial y}, \bar{A}_y^a|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_y^a|_{\Gamma_A} = 0, \quad (1.21)$$

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad \bar{A}_z^a\right) = -\sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} - (\sigma - \sigma^n I) \frac{\partial V^n}{\partial z}, \bar{A}_z^a|_{\Gamma_A} = 0, \bar{A}_z^a|_{\Gamma_A} = 0. \quad (1.22)$$

### 1.1.4. Моделирование трехмерного нестационарного электромагнитного поля КЭД в изотропных средах

Запишем математическую модель, описывающую нестационарное электромагнитное поле КЭД в изотропной среде [29]:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a + \sigma \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} = (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n, \quad \vec{A}^a \Big|_{\Gamma_A} = 0. \quad (1.23)$$

Начальным условием для нестационарного процесса с источником в виде КЭД является распределение поля  $\vec{A}^a \Big|_{t=0}$ , которое может быть найдено из решения задач (1.9) – (1.10), (1.11) – (1.12) и (1.14) – (1.16). Нормальное же поле  $\vec{E}^n$  может быть найдено по формулам (1.5) после решения начально-краевой задачи (1.3) – (1.4).

### 1.1.5. Моделирование трехмерного нестационарного электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах

Рассмотрим уравнение, описывающее распределение аномальной составляющей  $\vec{A}^a$  вектор-потенциала  $\vec{A}$  в анизотропной среде, где удельная электрическая проводимость  $\sigma$  является тензором и имеет вид (1.17). Тогда математическая модель, описывающая нестационарное электромагнитное поле КЭД в анизотропной по параметру удельной проводимости среде выглядит следующим образом:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a + \sigma \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} = (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \vec{E}^n, \quad \vec{A}^a \Big|_{\Gamma_A} = 0. \quad (1.24)$$

Начальным условием для нестационарного процесса с источником в виде КЭД является распределение поля  $\vec{A}^a \Big|_{t=0}$ , которое может быть найдено из решения задач (1.9) – (1.10), (1.18) – (1.19) и (1.20) – (1.22). Нормальное поле  $\vec{E}^n$  может быть найдено после решения задач (1.3) – (1.4).



## 1.2. Моделирование полей вызванной поляризации для источника КЭД

Установившееся (поляризующее) электрическое поле КЭД описывается краевой задачей

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V^0) = f^0 \quad (1.25)$$

с однородными краевыми условиями первого и второго рода, заданными на внешних границах области  $\Omega$  определения потенциала  $V^0$  поляризующего поля. Внешние границы этой области являются либо ее удаленными границами, либо плоскостями симметрии потенциала  $V^0$ , либо границами раздела сред типа земля-воздух или земля-фундамент. В уравнении (1.25) коэффициент проводимости среды  $\sigma$  является заданной трехмерной функцией координат  $\sigma = \sigma(x, y, z)$  (с разрывами на границах слоев и трехмерных объектов, расположенных в изучаемой среде), а функция  $f^0$  является источником.

Задача ВП решается в среде, содержащей  $K$  поляризующихся горизонтальных слоев или трехмерных объектов  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , причем пересекаться  $\Omega_k$  друг с другом могут только по своим границам. То есть если в некотором слое  $\Omega_k$  лежит трехмерный объект (или его часть, или несколько объектов или их частей), то под подобластью  $\Omega_k$ , описывающей этот слой, понимается не все пространство между двумя горизонтальными плоскостями, а только его часть, не содержащая попавших в этот слой трехмерных объектов или их частей.

Считаем, что каждый слой или объект  $\Omega_k$  характеризуется коэффициентом начальной поляризации  $\alpha_k = \text{const}$  и параметром спада  $\beta_k = \beta_k(t)$  (т. е. в каждой точке тела  $\Omega_k$  протекает только один процесс с параметрами  $(\alpha_k, \beta_k)$ ). Тогда (аналогично с подходом, описанным в [30] для источника горизонтальная электрическая линия) уравнение, описывающее процесс ВП в среде  $\Omega$  с учетом поляризуемости всех ее слоев и трехмерных тел, может быть представлено в виде

$$V^{BII} = \sum_k \alpha_k \beta_k(t) W_k^{BII}, \quad (1.26)$$

причем поля  $W_k^{BII}$  могут быть получены как решения соответствующих краевых задач для уравнений

$$-div(\sigma grad W_k^{BII}) = -div(\delta_k \sigma grad V^0), \quad (1.27)$$

где

$$\delta_k(x, y, z) = \begin{cases} 0, & (x, y, z) \in \Omega \setminus \Omega_k \\ 1, & (x, y, z) \in \Omega_k \end{cases}. \quad (1.28)$$

Краевые условия в задаче (1.27) для потенциала  $W_k^{BII}$  являются однородными и совпадают с краевыми условиями для потенциала  $V^0$  поляризующего поля.

Представление результирующего поля  $V^{BII}$  в виде соотношения (1.26) является очень удобным для практического использования, так как оно позволяет после вычисления поля  $W_k^{BII}$  изучать влияние поляризации области  $\Omega_k$  при любых значениях коэффициента начальной поляризации. В этом случае для вычисления поля  $V^{BII}$  по формуле (1.26) необходимо решить  $K$  краевых задач для уравнений вида (1.27).

Рассмотрим возможность применения технологии выделения поля к решению краевых задач для дифференциального уравнения вида (1.27) с учетом трех наиболее типичных ситуаций:

- 1) подобласть  $\Omega_k$  является однородным по поляризуемости трехмерным объектом;
- 2) подобласть  $\Omega_k$  является полным однородным по поляризуемости горизонтальным слоем, не содержащем в себе ни одного трехмерного тела или его части;

3) подобласть  $\Omega_k$  является частью однородного по поляризуемости горизонтального слоя, из которого исключены входящие в него трехмерные тела или их части.

В ситуации, когда  $\Omega_k$  является однородным по поляризуемости трехмерным объектом, правая часть уравнения (1.27) определяет поверхностный источник, действующий на границах объекта  $\Omega_k$ , не совпадающих с внешними границами расчетной области  $\Omega$ . В этой ситуации решение краевой задачи для уравнения (1.27) не содержит в себе двумерной (осесимметричной) части, и поэтому решать эту задачу можно только как трехмерную.

В анизотропной среде уравнение (1.27) имеет вид:

$$-div(\sigma grad W_k^{BII}) = -div(\delta_k \sigma grad V^0), \quad (1.29)$$

где  $\sigma$  определяется соотношением (1.17).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $\Omega_k$  является полным однородным по поляризуемости горизонтальным слоем. Поле  $V^0$  может быть представлено в виде суммы

$$V^0 = V^n + V^a, \quad (1.30)$$

в которой поле  $V^n$  вычисляется по формулам (1.9) – (1.10), а поле  $V^a$  может быть получено в результате решения краевой задачи (1.11) – (1.12) в случае, когда  $\sigma$  – скалярная величина. Если же коэффициент удельной проводимости трехмерных объектов  $\sigma$  имеет вид (1.17), поле  $V^a$  принимает вид (1.18) – (1.19).

Представим поле  $W_k^{BII}$  для случая однородного по поляризуемости слоя  $\Omega_k$  в виде суммы двух полей:

$$W_k^{BII} = W_k^n + W_k^a, \quad (1.31)$$

где функция  $W_k^n$  является решениями краевой задачи для дифференциального уравнения

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} W_k^n) = -\operatorname{div}(\delta_k \sigma^n \operatorname{grad} V^n). \quad (1.32)$$

Заметим, что функция  $W_k^n$  может быть получена из осесимметричной краевой задачи для определенного в цилиндрической системе координат  $\{r, z\}$  уравнения

$$-\operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} W_k^{r,z}) = -\operatorname{div}(\delta_k \sigma^n \operatorname{grad} V_{r,z,k}^n), \quad (1.33)$$

путем пересчета этого решения  $W_k^{r,z}$  в декартову систему координат  $\{x, y, z\}$ . При этом входящая в правую часть уравнения (1.33) функция  $V_{r,z,k}^n$  является определенным в цилиндрической системе координат осесимметричным полем для горизонтально-слоистой среды с удельной проводимостью  $\sigma^n$ .

Поскольку подобласть  $\Omega_k$  является полным слоем вмещающей среды и тогда справедливо тождество  $\delta_k \sigma^n \equiv \delta_k \sigma$ , с учетом соотношения (1.32) нетрудно убедиться, что функция  $W_k^a$  может быть найдена из решения трехмерной краевой задачи для уравнения

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} W_k^a) = -\operatorname{div}((\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} W_k^n) - \operatorname{div}(\delta_k \sigma \operatorname{grad} V^a). \quad (1.34)$$

В анизотропной среде уравнение (1.34) имеет вид:

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} W_k^a) = -\operatorname{div}((\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \operatorname{grad} W_k^n) - \operatorname{div}(\delta_k \sigma \operatorname{grad} V^a). \quad (1.35)$$

И, наконец, рассмотрим третью ситуацию, когда  $\Omega_k$  является частью однородного по поляризуемости горизонтального слоя, из которого исключены входящие в него трехмерные тела или их части. Вообще говоря, слой с исключенными из него трехмерными объектами (или их частями) представляет собой тело с трехмерной геометрией и поэтому формально эта ситуация совпадает с первой из рассматриваемых нами трех ситуаций. Однако если входящие в горизонтальный слой трехмерные тела или их части относительно невелики, то исключение их из слоя  $\Omega_k$  при вычислении поля ВП  $W_k^{ВП}$  именно

этого слоя может не слишком существенно изменить результат по сравнению с полем ВП полного слоя. Поэтому в такой ситуации также имеет смысл выделить те части поля  $W_k^{BII}$ , которые могут быть найдены в результате решения соответствующей осесимметричной задачи, что позволит заметно снизить вычислительные затраты на получение численного решения трехмерной задачи для  $W_k^{BII}$  с требуемой точностью.

Итак, поле  $W_k^{BII}$  в третьей ситуации (как и в первых двух) удовлетворяет уравнению (1.27). Будем искать это поле в виде суммы (1.31), в которой поля  $W_k^n$  определяются как решения краевых задач для дифференциальных уравнений

$$-div(\sigma^n grad W_k^n) = -div(\delta_k \sigma^n grad V^n). \quad (1.36)$$

В уравнении (1.36) функция  $\delta_k$  является индикатором однородного по проводимости и поляризуемости слоя  $\Omega_k$ , внутри которого находится трехмерная подобласть  $\Omega_k$ . Поэтому краевые задачи для уравнений (1.36) полностью аналогичны краевым задачам для дифференциальных уравнений (1.32) и их решения также вычисляются пересчетом решения  $W_k^{r,z}$  осесимметричной задачи для уравнения

$$-div(\sigma^n grad W_k^{r,z}) = -div(\delta_k \sigma^n grad V_{r,z,k}^n) \quad (1.37)$$

из цилиндрической системы координат  $\{r, z\}$  в декартову  $\{x, y, z\}$  систему координат. Тогда трехмерная составляющая  $W_k^a$  поля  $W_k^{BII}$  может быть получена как решение трехмерной краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} -div(\sigma^n grad W_k^a) &= -div((\sigma^n - \sigma) grad W_k^n) - \\ &-div((\delta_k - \delta_k) \sigma^n grad V^n) - div(\delta_k \sigma grad V^a), \end{aligned} \quad (1.38)$$

где  $\delta_k$  – индикатор однородного по проводимости и поляризуемости слоя  $\Omega_k$ , внутри которого лежит рассматриваемая нами область  $\Omega_k$ . Покажем это.

Подставим в уравнение (1.27) соотношение (1.31) и перенесем в правую часть члены с функциями  $W_k^n$ :

$$-div(\sigma grad W_k^3) = div(\sigma grad W_k^2) - div(\delta_k \sigma grad V^0). \quad (1.39)$$

Преобразуем первое слагаемое правой части уравнения (1.39):

$$-div(\sigma grad W_k^n) = -div((\sigma^n - \sigma) grad W_k^n) + div(\sigma^n grad W_k^n).$$

Учитывая соотношение (1.36), получим

$$-div(\sigma grad W_k^n) = -div((\sigma^n - \sigma) grad W_k^n) + div(\delta_k \sigma^n grad V^n). \quad (1.40)$$

Подставляя (1.40) в уравнение (1.39) и учитывая (1.30) и тождество  $\delta_k \sigma^n = \delta_k \sigma$ , получаем уравнение (1.38). Уравнение (1.38) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} -div(\sigma grad W_k^a) &= -div((\sigma^n - \sigma) grad W_k^n) + \\ &+ div(\delta_k \sigma^n grad V^n) - div(\delta_k \sigma grad V^a), \end{aligned} \quad (1.41)$$

где функция  $\delta_k = \delta_k - \delta_k$  – индикатор всех трехмерных объектов  $\Omega_k = \Omega_k \setminus \Omega_k$  внутри полного слоя  $\Omega_k$ , т. е.  $\Omega_k$  – это трехмерные объекты, лежащие в полном слое  $\Omega_k$  и не принадлежащие рассматриваемой нами однородной по поляризуемости части  $\Omega_k$  этого слоя. Индикатор объектов  $\Omega_k$  определяется аналогично соотношению (1.28):

$$\delta_k(x, y, z) = \begin{cases} 0, & (x, y, z) \in \Omega \setminus \Omega_k \\ 1, & (x, y, z) \in \Omega_k \end{cases}.$$

Сравнивая уравнение (1.41) с (1.34), мы видим, что в правой части уравнения (1.41) появилось еще одно слагаемое  $div(\delta_k \sigma^n grad V^n)$ , которое определяет поверхностные источники поля  $W_k^3$ , распределенные по границам объектов  $\Omega_k = \Omega_k \setminus \Omega_k$  из полного слоя  $\Omega_k$ , не совпадающим с внешними границами расчетной области  $\Omega$ .

В анизотропной же среде уравнение (1.41) имеет вид:

$$\begin{aligned} -div(\sigma grad W_k^a) = & -div((\sigma^n I - \sigma) grad W_k^n) + \\ & + div(\delta_k \sigma^n I grad V^n) - div(\delta_k \sigma grad V^a). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Замена краевой задачи для уравнения (1.27) краевыми задачами для уравнений (1.37) и (1.41) дает практически те же преимущества в плане сокращения суммарных вычислительных затрат, что и замена краевой задачи для уравнения (1.27) краевыми задачами для уравнений (1.33) и (1.34). Но при этом следует учитывать, что в случае слишком больших включений трехмерных неоднородностей  $\Omega_k$  в рассматриваемый полный слой  $\Omega_k$  составляющая  $div(\delta_k \sigma^n grad V^n)$  источника поля  $W_k^a$  может стать столь значительной, что краевая задача (1.41) сравняется по вычислительной трудоемкости с исходной краевой задачей для уравнения (1.27), и тогда вычисление поля  $W_k^{BII}$  для неполного слоя  $\Omega_k$  удобней проводить на основе решения исходной краевой задачи для уравнения (1.27).

### 1.3. Выводы

1. Рассмотрены математические модели осесимметричных и трехмерных нестационарных электромагнитных полей для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах.

2. Рассмотрены математические модели осесимметричных и трехмерных полей вызванной поляризации для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах.



## 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ И ИХ ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ПОЛЕЙ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

### 2.1. Двумерное электромагнитное поля КЭД

#### 2.1.1. Эквивалентные вариационные постановки

Рассмотрим эквивалентную вариационную постановку в форме Галеркина для начально-краевой задачи (1.3) – (1.4). Умножим обе части уравнения (1.3) на пробную функцию  $\bar{\Psi}$  из пространства  $H_0^{rot}$ , касательная составляющая которой принимает нулевое значение на границах расчетной области, и проинтегрируем полученное равенство по  $\Omega^{2D}$ :

$$\int_{\Omega^{2D}} rot \frac{1}{\sigma} rot \bar{H} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} + \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} = 0. \quad (2.1)$$

Применим к первому слагаемому в левой части уравнения (2.1) векторную формулу Грина:

$$\int_{\Omega^{2D}} rot \frac{1}{\sigma} rot \bar{H} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} = \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} rot \bar{H} \cdot rot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} - \int_{S^{2D}} \frac{1}{\sigma} (rot \bar{H} \times \vec{n}) \cdot \bar{\Psi} dS^{2D}. \quad (2.2)$$

Учтем, что касательные составляющие пробных вектор-функций на границах расчетной области равны нулю. В этом случае поверхностный интеграл в уравнении (2.2) оказывается равен нулю, и уравнение (2.1) принимает вид [29]:

$$\int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} rot \bar{H} \cdot rot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} + \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} = 0. \quad (2.3)$$

Для краевой задачи (1.1) – (1.2) вариационная постановка выглядит аналогичным образом, только в ней отсутствует член, содержащий производную по времени [33]:

$$\int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{\Psi} d\Omega^{2D} = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Построение дискретных аналогов

Для аппроксимации по времени вариационного уравнения (2.3) применим трехслойную неявную схему. Представим производную  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  по времени в виде

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = C_1 \vec{H}^k - C_2 \vec{H}^{k-1} + C_3 \vec{H}^{k-2}, \quad (2.5)$$

где  $\vec{H}^{k-1}$ ,  $\vec{H}^{k-2}$  – известные значения  $\vec{H}$ , найденные ранее на предыдущих временных слоях, а коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  определяются соотношениями

$$C_1 = \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}, \quad C_2 = \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}, \quad C_3 = \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1}, \quad (2.6)$$

$$\Delta t = t_k - t_{k-2}, \quad \Delta t_0 = t_k - t_{k-1}, \quad \Delta t_1 = t_{k-1} - t_{k-2},$$

где  $t_k$ ,  $t_{k-1}$ ,  $t_{k-2}$  – текущее и два предыдущих значения из временной сетки.

Таким образом, подставляя в (2.3) формулу (2.5) получаем [33]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} \vec{H}^k \cdot \text{rot} \vec{\Psi} d\Omega^{2D} + \int_{\Omega^{2D}} \mu C_1 \vec{H}^k \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{2D} = \\ & = \int_{\Omega^{2D}} \mu C_2 \vec{H}^{k-1} \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{2D} - \int_{\Omega^{2D}} \mu C_3 \vec{H}^{k-2} \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{2D}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При этом на первом шаге может быть использована двухслойная полностью неявная схема [33]:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{H}^k \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi} d\Omega^{2D} + \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{1}{\Delta t} \bar{H}^k \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D} = \\
& = \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{1}{\Delta t} \bar{H}^{k-1} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{2D}, \Delta t = t_k - t_{k-1},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

а значение  $\bar{H}^0$  вычисляется следующим образом:

$$\int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{H}^0 \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi} d\Omega^{2D} = 0. \tag{2.9}$$

Построим конечноэлементную аппроксимацию на основе уравнения (2.7). Пусть  $\{\bar{\Psi}_i = (0, \psi_i, 0), i = \overline{1, n}\}$  – набор базисных функций, где  $\psi_i$  – билинейные базисные функции. Заменяем искомую функцию  $\bar{\Psi}^k$  на функцию  $\bar{H}^{k,h} = \sum_{i=1}^n q_i^{k,h} \bar{\Psi}_i$ , а вместо пробной функции поочередно подставим базисные функции  $\bar{\Psi}_i$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{2D} + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^{2D}} \mu C_1 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{2D} = \\
& = \int_{\Omega^{2D}} \mu C_2 \bar{H}^{k-1} \cdot \bar{\Psi}_i d\Omega^{2D} - \int_{\Omega^{2D}} \mu C_3 \bar{H}^{k-2} \cdot \bar{\Psi}_i d\Omega^{2D}, i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Аналогично, конечноэлементная аппроксимация для уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{2D} + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{1}{\Delta t} \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{2D} = \\
& = \int_{\Omega^{2D}} \mu \frac{1}{\Delta t} \bar{H}^{k-1} \cdot \bar{\Psi}_i d\Omega^{2D}, i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

А для уравнения (2.9) дискретный аналог выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega^{2D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{2D} = 0, i = \overline{1, n}.$$

## 2.2. Трехмерное стационарное электромагнитное поля КЭД

### 2.2.1. Эквивалентные вариационные постановки

Рассмотрим эквивалентную вариационную постановку в форме Галеркина для краевой задачи (1.9) – (1.10). Умножим левую часть уравнения (1.9) на пробную функцию  $\psi \in H_0^1$ , которая принимает нулевое значение на границах расчетной области  $\Omega^{2D}$ , и проинтегрируем полученное равенство по  $\Omega^{2D}$ :

$$-\int_{\Omega^{2D}} \operatorname{div}(\sigma^n \operatorname{grad} V^n) \psi d\Omega^{2D} = 0. \quad (2.10)$$

Применим к левой части уравнения (2.10) формулу Грина и, учитывая, что  $\psi$  на границах  $\Omega^{2D}$  обращается в ноль, получим [29]:

$$\int_{\Omega^{2D}} \sigma^n \operatorname{grad} V^n \operatorname{grad} \psi d\Omega^{2D} = \int_{l_0} \Theta_1 \psi d\Omega^{2D} + \int_L \Theta_2 \psi d\Omega^{2D}. \quad (2.11)$$

Аналогично, эквивалентная вариационная постановка для уравнения (1.11) – (1.12) в области  $\Omega^{3D}$ , имеет вид [29]:

$$\int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} V^a \operatorname{grad} \psi d\Omega^{3D} = - \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}((\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} V^n) \psi d\Omega^{3D}. \quad (2.12)$$

А для уравнения (1.18) – (1.19) вариационная постановка выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} V^a \operatorname{grad} \psi d\Omega^{3D} = - \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}((\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \operatorname{grad} V^n) \psi d\Omega^{3D}. \quad (2.13)$$

Вариационная постановка для уравнений (1.14) – (1.16) в области  $\Omega^{3D}$  имеет вид [29]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_x^a \operatorname{grad} \psi d\Omega^{3D} &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial x} \psi d\Omega^{3D}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad}A_y^a \text{grad}\psi d\Omega^{3D} &= \\
&= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial y} \psi d\Omega^{3D},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad}A_z^a \text{grad}\psi d\Omega^{3D} &= \\
&= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial z} \psi d\Omega^{3D}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

А для уравнений (1.20) – (1.22) эквивалентная вариационная постановка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad}A_x^a \text{grad}\psi d\Omega^{3D} &= \\
&= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial x} \psi d\Omega^{3D},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad}A_y^a \text{grad}\psi d\Omega^{3D} &= \\
&= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial y} \psi d\Omega^{3D},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad}A_z^a \text{grad}\psi d\Omega^{3D} &= \\
&= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial z} \psi d\Omega^{3D}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

### 2.2.2. Построение дискретных аналогов

Будем считать, что расчетная область  $\Omega^{2D}$  разбита на конечные элементы и в ней определены финитные базисные функции  $\psi_i, i = \overline{1, n^{2D}}$ . Двумерную функцию  $V^n$  будем искать в виде линейных комбинаций базисных функций  $\psi_i$ :

$$V^n = \sum_i^{n^{2D}} q_i^n \psi_i. \quad (2.20)$$

Подставим выражение (2.20) в вариационные уравнения (2.11) и заменим пробную функцию  $\psi$  поочередно на базисные функции  $\psi_i, i = \overline{1, n^{2D}}$ . Тогда уравнение (2.11) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n^{2D}} q_j^n \int_{\Omega^{2D}} \sigma^n \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{2D} = \int_{l_0} \Theta_1 \psi_i d\Omega^{2D} + \int_L \Theta_2 \psi_i d\Omega^{2D}.$$

Рассмотрим расчетную область  $\Omega^{3D}$ , которая разбита на конечные элементы. В этой области определены финитные базисные функции  $\psi_i, i = \overline{1, n^{3D}}$ . Трехмерные функции  $A_x^a, A_y^a, A_z^a$  и  $V^a$  можно представить в виде линейных комбинаций базисных функций  $\psi_i$ :

$$A_x^a = \sum_i^{n^{3D}} q_i^x \psi_i, A_y^a = \sum_i^{n^{3D}} q_i^y \psi_i, A_z^a = \sum_i^{n^{3D}} q_i^z \psi_i, V^a = \sum_i^{n^{3D}} q_i^{V^a} \psi_i, V^n = \sum_i^{n^{3D}} q_i^{V^n} \psi_i. \quad (2.21)$$

Будем считать, что вектор  $\vec{q}^{-V^n}$  коэффициентов разложения  $V^n$  по базисным функциям  $\psi_i$  считается известным, а вектор  $\vec{q}^{-V^a}$  коэффициентов разложения  $V^a$  по  $\psi_j$  подлежит определению. Если подставить выражение (2.21) в вариационное уравнение (2.12) и заменить пробную функцию  $\psi$  поочередно на базисные функции  $\psi_i, i = \overline{1, n^{3D}}$ , в результате уравнение (2.12) примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^{V^a} = \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div} \left( (\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} V^n \right) \psi_i d\Omega^{3D}, i = \overline{1, n^{3D}}.$$

А для уравнения (2.13) дискретный аналог выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^{V^a} = \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div} \left( (\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \operatorname{grad} V^n \right) \psi_i d\Omega^{3D}, i = \overline{1, n^{3D}}.$$

Если подставить выражение (2.21) в вариационные уравнения (2.14) – (2.16) и заменить пробную функцию  $\psi$  поочередно на базисные функции  $\psi_i, i = \overline{1, n^{3D}}$ , в результате уравнения (2.14) – (2.16) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^x &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial x} \psi_i d\Omega^{3D}, i = \overline{1, n^{3D}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^y &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial y} \psi_i d\Omega^{3D}, i = \overline{1, n^{3D}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^z &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \frac{\partial V^n}{\partial z} \psi_i d\Omega^{3D}, i = \overline{1, n^{3D}}. \end{aligned}$$

А для уравнений (2.17) – (2.19) конечноэлементная аппроксимация выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^x = \\
& = \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial x} \psi_i d\Omega^{3D}, \quad i=1, \overline{n^{3D}}, \\
& \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^y = \\
& = \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial y} \psi_i d\Omega^{3D}, \quad i=1, \overline{n^{3D}}, \\
& \sum_{j=1}^{n^{3D}} \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_j d\Omega^{3D} \right] q_j^z = \\
& = \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} \psi_i d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{I}) \frac{\partial V^n}{\partial z} \psi_i d\Omega^{3D}, \quad i=1, \overline{n^{3D}}.
\end{aligned}$$

### 2.3. Трехмерное нестационарное электромагнитное поля КЭД

#### 2.3.1. Эквивалентные вариационные постановки

Рассмотрим эквивалентную вариационную постановку в форме Галеркина для начально-краевой задачи (1.23). Умножим обе части уравнения на пробную функцию  $\bar{\Psi}$  из  $H_0^{rot}$ , касательная составляющая которой принимает нулевое значение на границах расчетной области, и проинтегрируем полученное равенство по  $\Omega^{3D}$ :

$$\int_{\Omega^{3D}} \text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A}^a \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial \bar{A}^a}{\partial t} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \bar{E}^n \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D}. \quad (2.22)$$

Применим к первому слагаемому в левой части уравнения (2.22) векторную формулу Грина:



$$\int_{\Omega^{3D}} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a \cdot \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega^{3D} - \int_{S^{3D}} \frac{1}{\sigma} \left( \operatorname{rot} \vec{A}^a \times \vec{n} \right) dS^{3D}. \quad (2.23)$$

Учтем, что касательные составляющие пробных вектор-функций на границах расчетной области равны нулю. В этом случае поверхностный интеграл (2.23) в уравнении оказывается равен нулю, и уравнение (2.22) принимает вид [29]:

$$\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a \cdot \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{3D}. \quad (2.24)$$

Для уравнения (1.24) эквивалентная вариационная постановка выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}^a \cdot \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n \cdot \vec{\Psi} d\Omega^{3D},$$

$$\vec{A}^a \Big|_{\Gamma_A} = 0. \quad (2.25)$$

### 2.3.2. Построение дискретных аналогов

Для аппроксимации по времени вариационного уравнения (2.24) применим трехслойную неявную схему. Представим производную  $\vec{A}^a$  по времени в виде

$$\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} = C_1 \vec{A}^{a,k} - C_2 \vec{A}^{a,k-1} + C_3 \vec{A}^{a,k-2}, \quad (2.26)$$

где  $\vec{A}^{a,k-1}$ ,  $\vec{A}^{a,k-2}$  – известные значения  $\vec{A}^a$ , найденные ранее на предыдущих временных слоях, а коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  определяются соотношениями (2.6). Таким образом, подставляя в (2.24) формулу (2.26) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A}^{a,k} \cdot \text{rot} \bar{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_1 \bar{A}^{a,k} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} = \\
& = \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \bar{E}^n \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_2 \bar{A}^{a,k-1} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} - \\
& - \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_3 \bar{A}^{a,k-2} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

При этом на первом шаге может быть использована двухслойная полностью неявная схема

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A}^{a,k} \cdot \text{rot} \bar{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{A}^{a,k} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} = \\
& = \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \bar{E}^n \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{A}^{a,k-1} \cdot \bar{\Psi} d\Omega^{3D},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\Delta t = t_k - t_{k-1},$$

а начальное значение на первом временном слое вычисляется как решение стационарной задачи (1.13).

Построим конечноэлементную аппроксимацию на основе уравнения (2.27). Базисные вектор-функции из пространства  $H_0^{rot}$  на параллелепипедах строятся следующим образом. Рассмотрим параллелепипед  $\Omega_{rsp} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_r, y_{r+1}] \times [z_r, z_{r+1}]$ . На нем определены двенадцать (ассоциированных с ребрами) базисных вектор-функций таких, что каждая из них имеет направления строго вдоль оси координат, параллельной ребру, с которым она ассоциирована. При этом модуль каждой базисной вектор-функции внутри  $\Omega_{rsp}$  является билинейной функцией двух других координат, направлению осей которых она перпендикулярна [33]. Таким образом, базисные функции имеют следующий вид:

$$\bar{\Psi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \cdot \frac{z_{p+1}-z}{h_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{y-y_s}{h_y} \cdot \frac{z_{p+1}-z}{h_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \cdot \frac{z-z_p}{h_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_4 = \begin{pmatrix} \frac{y-y_s}{h_y} \cdot \frac{z-z_p}{h_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \cdot \frac{z_{p+1}-z}{h_z} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \cdot \frac{z_{p+1}-z}{h_z} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \cdot \frac{z-z_p}{h_z} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \cdot \frac{z-z_p}{h_z} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \cdot \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \cdot \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \cdot \frac{y-y_s}{h_y} \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \cdot \frac{y-y_s}{h_y} \end{pmatrix}.$$

Локальная нумерация на элементе  $\Omega_{rsp}$  приведена на рисунке 2.1.

Заменяем искомую функцию  $\bar{A}^{a,k}$  на функцию  $\bar{A}^{a,k,h} = \sum_{i=1}^n q_i^{k,h} \bar{\Psi}_i$ , а вместо

пробной функции поочередно подставим базисные функции  $\bar{\Psi}_i$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \text{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_1 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^k = \\
& = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^E + \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_2 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-1} - \\
& - \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_3 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-2}, i=\overline{1, n}.
\end{aligned}$$

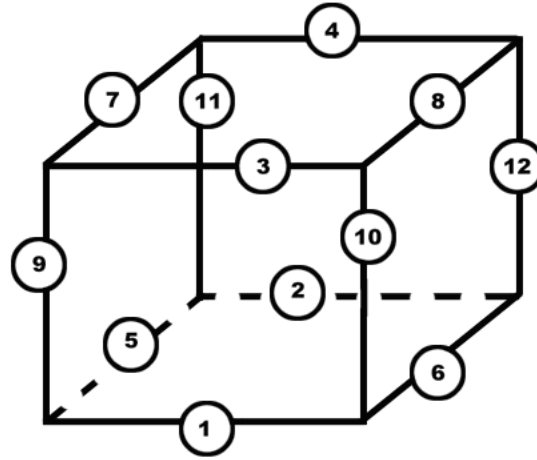


Рисунок 2.1 – Локальная нумерация на элементе  $\Omega_{rsp}$

В случае, если  $\sigma$  – тензор удельной проводимости, уравнение (2.27) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \text{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_1 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^k = \\
& = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n I) \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^E + \\
& + \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_2 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-1} - \\
& - \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma C_3 \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-2}, i=\overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Аналогично, конечноэлементная аппроксимация для уравнения (2.28) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^k = \\ & = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n) \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^E + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-1, i=\overline{1, n}}. \end{aligned}$$

В случае, если  $\sigma$  – тензор удельной проводимости, уравнение (2.28) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{\Psi}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^k = \\ & = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma - \sigma^n \mathbf{1}) \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^E + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \frac{1}{\Delta t} \bar{\Psi}_i \cdot \bar{\Psi}_j d\Omega^{3D} \right] q^{k-1, i=\overline{1, n}}. \end{aligned}$$

## 2.4. Поле вызванной поляризации КЭД в изотропных и анизотропных средах

### 2.4.1. Эквивалентные вариационные постановки

Чтобы получить вариационный эквивалент краевой задачи для уравнения (1.27), умножим обе его части на пробную функцию  $\psi$ , проинтегрируем по области  $\Omega^{3D}$  и применим формулу Грина, учитывая, что все краевые условия первого и второго рода для  $W_k^{ВП}$  и  $V^0$  являются однородными:

$$\int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} W_k^{BII} \text{grad} \psi d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} \text{div}(\delta_k \sigma \text{grad} V^0) \psi d\Omega^{3D}. \quad (2.29)$$

А для уравнения (1.29) эквивалентная вариационная постановка выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} W_k^{BII} \text{grad} \psi d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{3D}} \text{div}(\delta_k \sigma \text{grad} V^0) \psi d\Omega^{3D}. \quad (2.30)$$

Аналогично, для уравнения (1.33) имеем:

$$\int_{\Omega^{2D}} \sigma^n \text{grad} W_k^{r,z} \text{grad} \psi d\Omega^{3D} = \int_{\Omega^{2D}} \delta_k \sigma^n \text{grad} V^{r,z} \text{grad} \psi d\Omega^{3D}. \quad (2.31)$$

Эквивалентное вариационное уравнение (учитывая, что все краевые условия первого и второго рода для  $W_k^a$ ,  $W_k^n$  и  $V^a$  являются однородными), для (1.34) имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} W_k^a \text{grad} \psi d\Omega^{3D} &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \text{div}((\sigma^n - \sigma) \text{grad} W_k^n) \psi d\Omega^{3D} + \\ &+ \int_{\Omega^{3D}} \text{div}(\delta_k \sigma \text{grad} V^a) \psi d\Omega^{3D}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

А для уравнения (1.35) эквивалентное вариационное уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} W_k^a \text{grad} \psi d\Omega^{3D} &= \\ &= \int_{\Omega^{3D}} \text{div}((\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \text{grad} W_k^n) \psi d\Omega^{3D} + \\ &+ \int_{\Omega^{3D}} \text{div}(\delta_k \sigma \text{grad} V^a) \psi d\Omega^{3D}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Для уравнения (1.41), учитывая, что все краевые условия первого и второго рода для  $W_k^3$ ,  $W_k^2$ ,  $V_{\sigma rC}$  и  $V_{\sigma}^3$  являются однородными:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} W_k^a \operatorname{grad} \psi d\Omega^{3D} &= \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}((\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} W_k^n) \psi d\Omega^{3D} - \\ &- \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}(\delta_k \sigma^n \operatorname{grad} V^n) \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}(\delta_k \sigma \operatorname{grad} V^a) \psi d\Omega^{3D}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

А для уравнения (1.42) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} W_k^a \operatorname{grad} \psi d\Omega^{3D} &= \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}((\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \operatorname{grad} W_k^n) \psi d\Omega^{3D} - \\ &- \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}(\delta_k \sigma^n \mathbf{I} \operatorname{grad} V^n) \psi d\Omega^{3D} + \int_{\Omega^{3D}} \operatorname{div}(\delta_k \sigma \operatorname{grad} V^a) \psi d\Omega^{3D}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.4.2. Построение дискретных аналогов

Считаем, что расчетная область  $\Omega^{3D}$  разбита на конечные элементы  $\Omega_m^{3D}$ , на которых заданы кусочно-полиномиальные базисные функции  $\psi_j, j=1, n^{3D}$ . Представим функции  $W_k^{BII}$ ,  $V^0$ ,  $V_\sigma^3$ ,  $V_{\sigma^{rc}}$ ,  $W_k^n$  и  $W_k^a$  в виде разложения по базисным функциям  $\psi_j$ , т. е.

$$W_k^{BII} = \sum_j q_j \psi_j, \quad V^0 = \sum_j q_j^0 \psi_j, \quad V_\sigma^3 = \sum_j q_j^\sigma \psi_j,$$

$$V^n = \sum_j q_j^{\sigma^n} \psi_j, \quad W_k^n = \sum_j q_j^n \psi_j, \quad W_k^a = \sum_j q_j^a \psi_j.$$

Будем считать, что вектор  $\vec{q}^0$  коэффициентов разложения  $V^0$  по базисным функциям  $\psi_j$  считается известным, а вектор  $\vec{q}$  коэффициентов разложения  $W_k^{BII}$  по  $\psi_j$  подлежит определению. Заменяя в (2.29) пробную функцию  $\psi$  поочередно на все базисные функции  $\psi_j$ , получим конечноэлементную СЛАУ:

$$\sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j = \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^0 \quad (2.36)$$

или, в матричном виде,

$$A\vec{q} = F.$$

Из соотношения (2.36) видно, что локальный вектор правой части конечноэлементной СЛАУ может быть легко вычислен умножением локальной матрицы  $B^m$ , компоненты которой определяются формулой

$$B_{i,j}^m = \int_{\Omega_m^{3D}} \sigma \text{grad}\psi_j \text{grad}\psi_i d\Omega^{3D},$$

на соответствующие локальному вектору конечного элемента  $\Omega_m^{3D}$  компоненты вектора  $\vec{q}^{-0}$ . А поскольку компоненты локальной матрицы  $A^m$  конечного элемента  $\Omega_m^{3D}$  определяются соотношением

$$A_{i,j}^m = \int_{\Omega_m^{3D}} \delta_k \sigma \text{grad}\psi_j \text{grad}\psi_i d\Omega^{3D},$$

то  $A^m \equiv B^m$  для тех конечных элементов  $\Omega_m^{3D}$ , внутри которых  $\delta_k = 1$  (конечные элементы  $\Omega_m^{3D}$  лежат внутри области  $\Omega_k$ ) и  $B^m = 0$  для тех конечных элементов, которые не лежат внутри  $\Omega_k$ .

А для уравнения (2.30):

$$\sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad}\psi_j \text{grad}\psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j = \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \text{grad}\psi_j \text{grad}\psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^0. \quad (2.37)$$

Для уравнения (2.31) конечноэлементная аппроксимация имеет вид:

$$\sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad}\psi_i \text{grad}\psi_j d\Omega^{2D} \right] q_j^{W_k^{r,z}} = \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad}\psi_i \text{grad}\psi_j d\Omega^{2D} \right] q_j^{V_k^{r,z} \sigma^{r,c}}.$$

Будем считать, что векторы  $\vec{q}^{-\sigma}$  коэффициентов разложения  $V^a$  по базисным функциям  $\psi_j$  и  $\vec{q}^{-n}$  коэффициентов разложения  $W_k^n$  по базисным функциям  $\psi_j$  считаются известным, а вектор  $\vec{q}^{-a}$  коэффициентов разложения  $W_k^a$  по  $\psi_j$



подлежит определению. Заменяя в (2.32) пробную функцию  $\psi$  поочередно на все базисные функции  $\psi_j$ , получим конечноэлементную СЛАУ:

$$\begin{aligned} \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^a &= \\ &= \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma^n - \sigma) \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^n + \\ &+ \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^\sigma. \end{aligned} \quad (2.38)$$

А для уравнения (2.33) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^a &= \\ &= \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^n + \\ &+ \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^\sigma. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Будем считать, что векторы  $\vec{q}^\sigma$  коэффициентов разложения  $V^a$  по базисным функциям  $\psi_j$ ,  $\vec{q}^n$  коэффициентов разложения  $W_k^n$  по базисным функциям  $\psi_j$ ,  $\vec{q}^{\sigma^n}$  коэффициентов разложения  $V^n$  по базисным функциям  $\psi_j$  считаются известным, а вектор  $\vec{q}^a$  коэффициентов разложения  $W_k^a$  по  $\psi_j$  подлежит определению. Заменяя в (2.34) пробную функцию  $\psi$  поочередно на все базисные функции  $\psi_j$ , получим конечноэлементную СЛАУ:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^a = \\
& = \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma^n - \sigma) \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^n - \\
& - \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma^n \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^{\sigma^n} + \\
& + \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^\sigma.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

А для уравнения (2.35) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^a = \\
& = \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} (\sigma^n \mathbf{I} - \sigma) \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^n - \\
& - \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma^n \mathbf{I} \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^{\sigma^n} + \\
& + \sum_j \left[ \int_{\Omega^{3D}} \delta_k \sigma \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega^{3D} \right] q_j^\sigma.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

## 2.5. Выводы

1. Построены эквивалентные вариационные постановки и дискретные аналоги для моделирования процессов становления поля КЭД в анизотропных средах.

2. Построены эквивалентные вариационные постановки и дискретные аналоги для поля вызванной поляризации для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах.

### **3. РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ПОЛЕЙ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ**

#### **3.1. Структура программного комплекса**

Разработанный программный комплекс [34], реализующий расчеты трехмерных электромагнитных полей и поле ВП с учетом возможной анизотропности трехмерных объектов для источника КЭД, включает в себя следующие программные модули:

- модуль решения задачи становления электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах;
- модуль решения задачи ВП для источника КЭД в изотропных и анизотропных средах;
- модуль выдачи физических характеристик полученного электромагнитного поля – напряженности электрического поля и ЭДС.

Общая архитектура программного комплекса приведена на рисунке 3.1.

Основные модули обозначены прямоугольниками со сплошными линиями, структуры данных, которые либо заполняются в результате выполнения модулей, либо из которых берутся данные при выполнении модулей, обозначены прямоугольниками с пунктирными линиями. Линиями без направления обозначены связи между модулями. Линии с направлениями указывают или на структуру, которая заполняется модулем, или на модуль, в который передается структура. Модули, в которых учитывается возможная анизотропность среды, обозначены штрих-пунктиром.

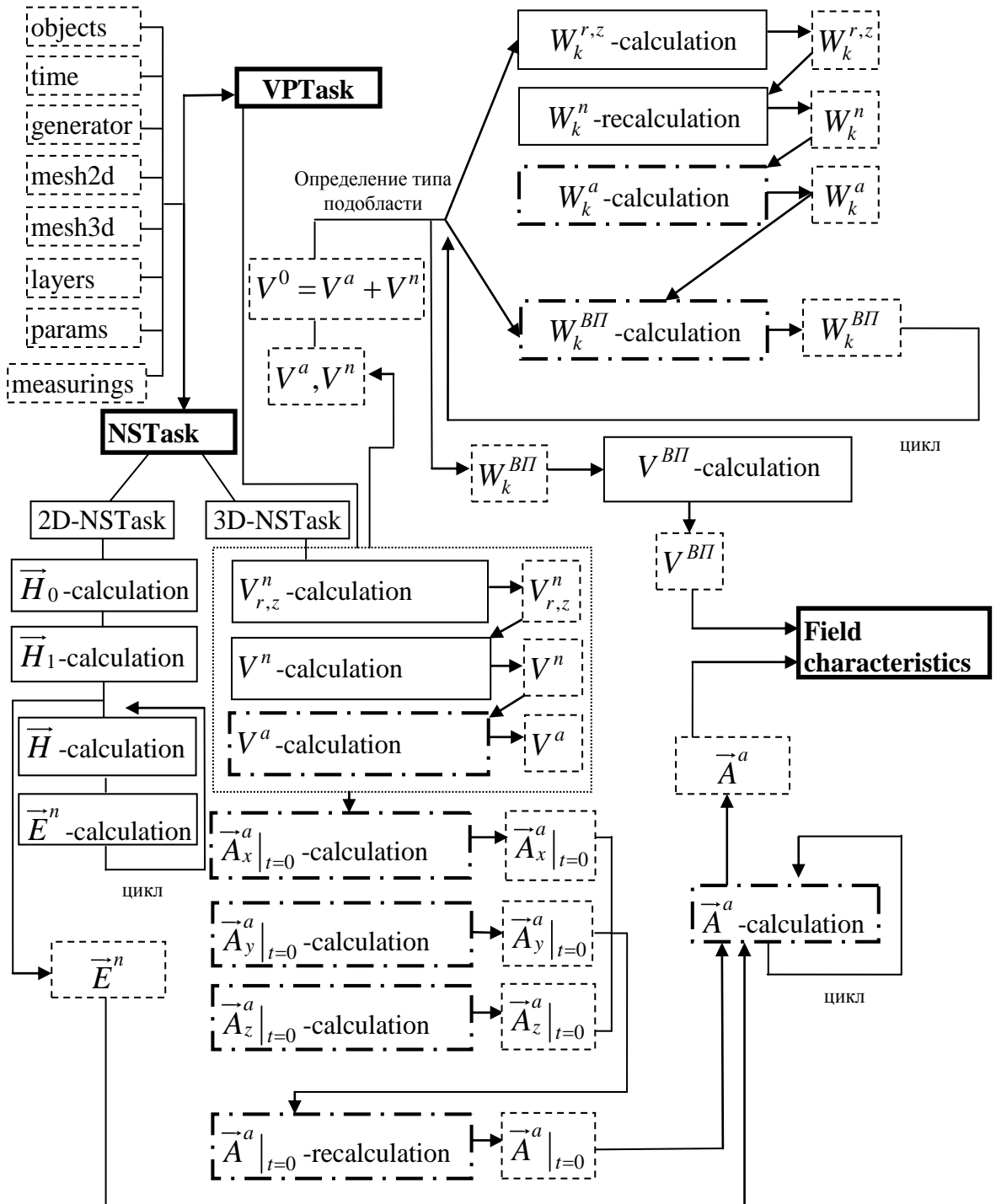


Рисунок 3.1 – Общая архитектура программного комплекса

Входными данными для разработанного программного комплекса решения задачи становления поля и поля ВП для источника КЭД являются следующие структуры:

- time – диапазон времен, на которых производится расчет задачи;

- mesh2d – двумерная пространственная сетка;
- mesh3d – трехмерная пространственная сетка;
- generator – радиус, ток и положение источника;
- layers – количество слоев в горизонтально-слоистой вмещающей среде, их толщина  $h$ , проводимость  $\sigma$ , коэффициент начальной поляризации  $\alpha$ , коэффициент  $T_0$ , тип коэффициента спада  $\beta$  (по формуле Кормильцева [9], Комарова [8] или по формуле нелинейной экспоненциальной зависимости [16]);
- objects – количество 3D-объектов в модели, их пространственные характеристики, проводимость  $\sigma$  (изотропная или анизотропная), коэффициент начальной поляризации  $\alpha$ , коэффициент  $T_0$ , тип коэффициента спада  $\beta$ , углы поворота относительно каждой оси координат (в случае анизотропности объекта);
- params – максимальное количество итераций при решении СЛАУ, невязка (для выхода из цикла решения СЛАУ)
- measurings – количество и координаты точек и линий, в которых измеряется значение поля.

На этапе анализа входных данных, выполняется определение типа задачи в соответствии с коэффициентами удельной электрической проводимости объектов. Если проводимости всех объектов – скалярные величины, задачи становления поля и поля ВП для КЭД решаются как изотропные. В случае же, когда проводимость хотя бы одного объекта задается в виде трех скалярных значений, соответствующих осям координат, выполняется умножение диагональной матрицы, составленной из этих трех значений, на матрицу поворота (справа и слева). И в итоге задача решается как анизотропная.

На первом этапе решения задачи становления поля (NSTask) КЭД в соответствии с архитектурой на рисунке 3.1 запускается модуль решения двумерной задачи (2D-NSTask). Сначала вычисляется начальное распределение поля  $\vec{H}_0$  (на момент выключения тока в КЭД), затем запускается двухслойная

неявная схема по времени для получения распределения поля  $\vec{H}_1$ . Для получения поля  $\vec{H}$  на последующих временных слоях используется неявная трехслойная схема по времени. Из результатов решения двумерной задачи получается распределение нормальной компоненты  $\vec{E}^n$  поля  $\vec{E}$  с использованием соотношений (1.5) – (1.8).

Далее запускается модуль решение трехмерной задачи (3D-NSTask). Он включает в себя следующие шаги:

1. получение распределения нормальной составляющей  $V_{r,z}^n$  скалярного потенциала  $V$  в цилиндрической системе координат;
2. пересчет полученного распределения  $V_{r,z}^n$  из цилиндрической системы координат в поле  $V^n$  на трехмерной сетке в декартовой системе координат;
3. получение распределения аномальной составляющей  $V^a$  скалярного потенциала  $V$  из решения соответствующей трехмерной задачи;
4. получение начального распределения аномальных составляющих  $\vec{A}_x|_{t=0}$ ,  $\vec{A}_y|_{t=0}$ ,  $\vec{A}_z|_{t=0}$  вектор-потенциала  $\vec{A}^a$  по распределениям соответствующих компонент плотности тока, вычисленной по трехмерному полю  $V$  электрического потенциала;
5. пересчет полученных значений  $\vec{A}_x|_{t=0}$ ,  $\vec{A}_y|_{t=0}$ ,  $\vec{A}_z|_{t=0}$  из значений в узлах сетки в значения на ребрах;
6. получения распределения  $\vec{A}^a$  на временной шкале и использованием неявной двухслойной и трехслойной схем по времени.

Перейдем к рассмотрению модуля решения задачи ВП (VPTask). После запуска модуля решения трехмерной задачи становления поля (3D-NSTask) мы уже имеем распределение аномальной  $V^a$  и нормальной  $V^n$  составляющих скалярного потенциала  $V$ . Воспользовавшись этим, получим суммарное (поляризующее) поле  $V^0$  как  $V^0 = V^a + V^n$ . Далее переходим к циклу по подобластям.

Для подобласти, которая является однородным по поляризуемости трехмерным объектом, запускается подмодуль получения распределения поля  $W_k^{BII}$ . Это поле рассчитывается согласно (1.27) – для случая изотропной по  $\sigma$  среды. В случае же анизотропной среды поле  $W_k^{BII}$  получается из решения задачи (1.29).

Если же подобласть является полным однородным по поляризуемости слоем или слоем с исключенными из него объектами, то выполняются следующие шаги:

1. получение распределения нормальной составляющей  $W_{r,z}^n$  поля  $W_k^{BII}$  в цилиндрической системе координат;
2. пересчет полученного распределения  $W_k^{r,z}$  из цилиндрической системы координат в поле  $W_k^n$  на трехмерной сетке в декартовой системе координат;
3. получение распределения аномальной составляющей  $W_k^a$  поля  $W_k^{BII}$ ;
4. получение суммарного поля  $W_k^{BII}$  для  $k$ -й подобласти как  $W_k^{BII} = W_k^a + W_k^n$ .

Схема получения распределения поля  $W_k^{BII}$  для подобластей, являющихся полными однородными по поляризуемости слоями и слоями с исключенными из них объектами, выглядит одинаково. Однако поле  $W_k^a$  получается из решения разных задач. Для полного однородного по поляризуемости слоя необходимо решить задачу (1.34) в изотропной среде и (1.35) – в анизотропной. А в случае однородного по поляризуемости слоя, из которого исключены входящие в него объекты, решаются задачи (1.41) в изотропной среде и (1.42) – в анизотропной.

После получения распределения поля  $W_k^{BII}$  для всех подобластей выполняется расчет поля ВП  $V^{BII}$  с учетом заданных коэффициентов начальной поляризации  $\alpha$ , коэффициентов  $T_0$  и типов коэффициента спада  $\beta$ .

После расчета всех необходимых полей запускается модуль расчета физических характеристик (Field characteristics) в заданных точках и линиях измерения поля. При необходимости можно запустить данный модуль повторно без перезапуска остальных, чтобы посчитать необходимые характеристики в других точках и линиях измерения поля.

### 3.2. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования нестационарных электромагнитных полей в анизотропных средах

Для анализа точности вычисления нестационарного электромагнитного поля КЭД в анизотропных средах перейдем к рассмотрению следующей геоэлектрической модели. В проводящее полупространство с удельной проводимостью 0.001 См/м на глубину от 225 м до 200 м помещен объект с размерами  $2000 \times 1000 \times 25$  м<sup>3</sup>. Объект состоит из пластинок одинаковой толщины  $l_1^{obj}$  и  $l_2^{obj}$  с чередующимися значениями удельной проводимости, которые соответственно равны  $\sigma_1^{obj} = 1$  См/м и  $\sigma_2^{obj} = 0.001$  См/м. Рассматривается объект с различным количеством пластинок (10, 20 и 40). Радиус источника составляет 500 м. Рассмотрим два варианта расположения пластинок: вдоль оси X и оси Y. План и разрез геоэлектрической модели с объектом, состоящим из 10 пластинок, расположенных вдоль оси X, представлены на рисунке 3.2, а вдоль оси Y – на рисунке 3.3.

Сравним результаты моделирования нестационарного электромагнитного поля КЭД для трехмерной модели, содержащей "пластинчатый" объект, расположение пластинок которого представлено на рисунке 3.2, и для трехмерной модели, содержащей анизотропный объект, у которого коэффициенты проводимости рассчитываются следующим образом:

$$\sigma_x^{obj} = \frac{\sigma_1^{obj} \cdot \sigma_2^{obj} (l_1^{obj} + l_2^{obj})}{\sigma_1^{obj} \cdot l_2^{obj} + \sigma_2^{obj} \cdot l_1^{obj}}, \quad \sigma_y^{obj} = \sigma_z^{obj} = \frac{\sigma_1^{obj} l_1^{obj} + \sigma_2^{obj} l_2^{obj}}{l_1^{obj} + l_2^{obj}}. \quad (3.1)$$



Для заданных коэффициентов удельной электрической проводимости пластинок  $\sigma_1^{obj} = 1$  См/м и  $\sigma_2^{obj} = 0.001$  См/м тензор удельной электрической проводимости анизотропного объекта имеет вид:

$$\sigma^{obj} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{obj} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^{obj} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001998 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5005 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5005 \end{bmatrix}.$$

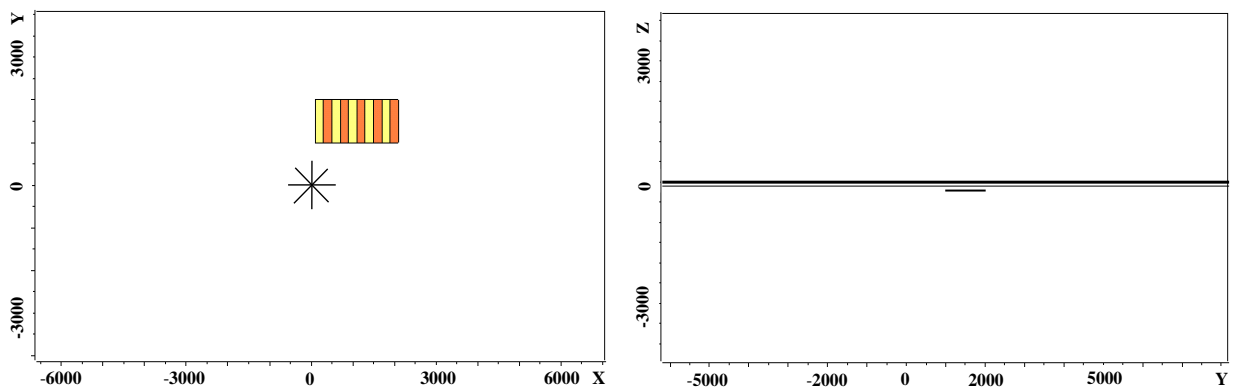


Рисунок 3.2 – План и разрез геоэлектрической модели с объектом, пластинки (одинаковой длины) которого расположены вдоль оси X

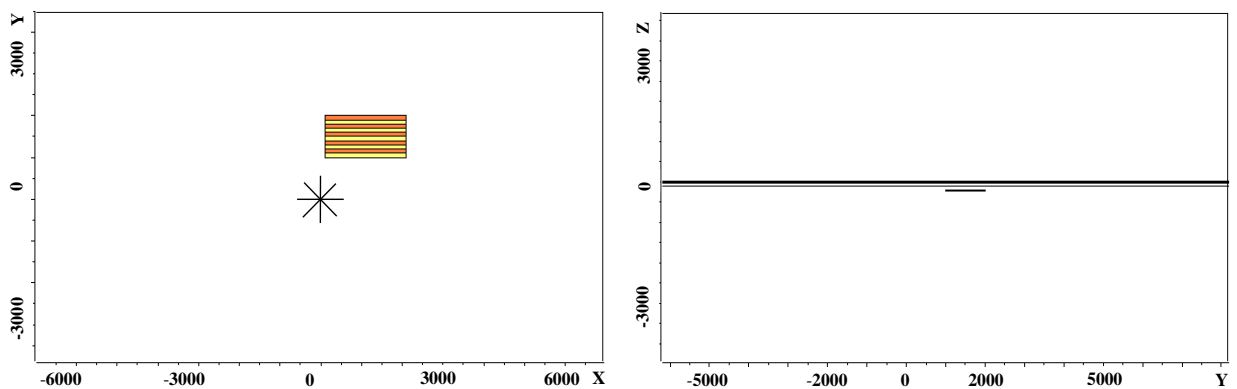


Рисунок 3.3 – План и разрез геоэлектрической модели с объектом, пластинки (одинаковой длины) которого расположены вдоль оси Y

Для модели "пластинчатого" объекта, пластинки которого расположены вдоль оси  $X$ , были получены следующие результаты. На рисунке 3.4 и рисунке 3.5 представлено распределение поля ЭДС на дневной поверхности в моменты времени 1.5 мс и 3.5 мс для "пластинчатой" и анизотропной задачи для ситуации, когда "пластинчатый" объект состоял из 40 пластинок.

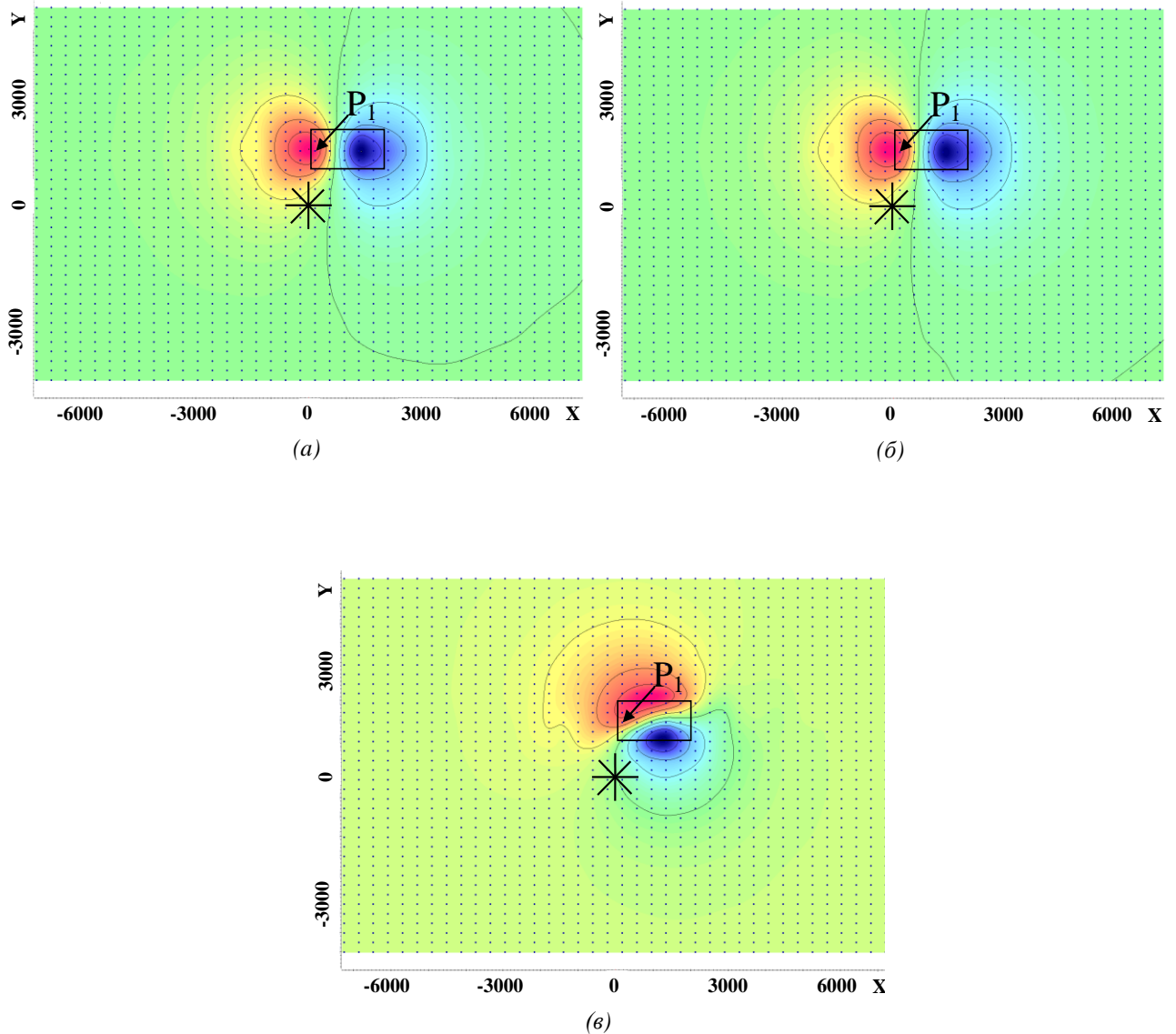


Рисунок 3.4 – Распределение поля ЭДС в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (a), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2

Также на рисунке 3.4 и рисунке 3.5 представлено распределение поля ЭДС для задачи с изотропным объектом, коэффициент удельной электрической проводимости которого равен 5 См/м. Все расчеты были проведены на одной и той же сетке.

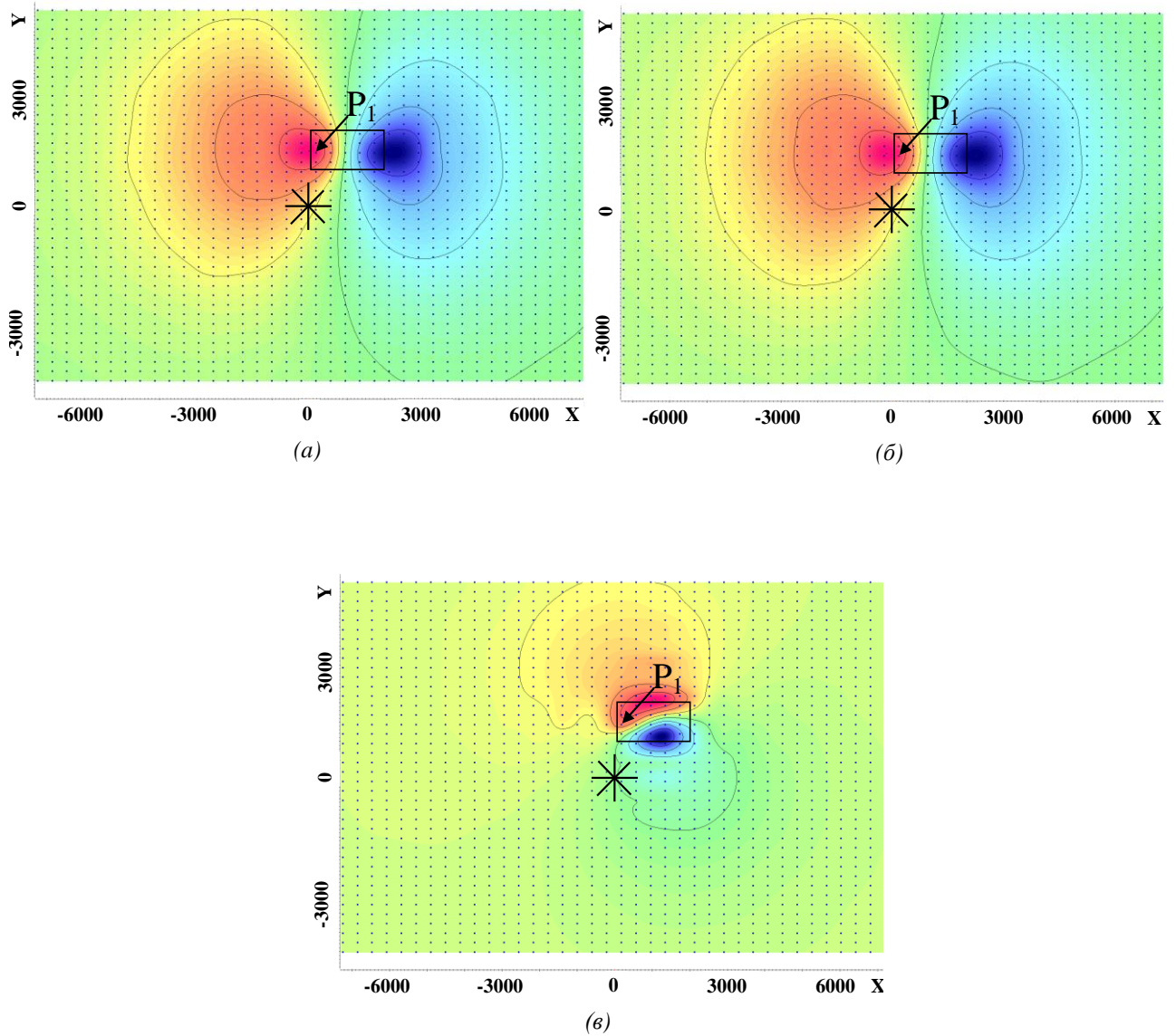


Рисунок 3.5 – Распределение поля ЭДС в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2

Кроме того, было проведено сравнение значения поля ЭДС для "пластинчатой" (10, 20 и 40 пластинок), анизотропной и изотропной задачи в точке  $P_1$  (ее расположение представлено на рисунке 3.4 и рисунке 3.5). Графики зависимости поля ЭДС от времени представлены на рисунке 3.6.

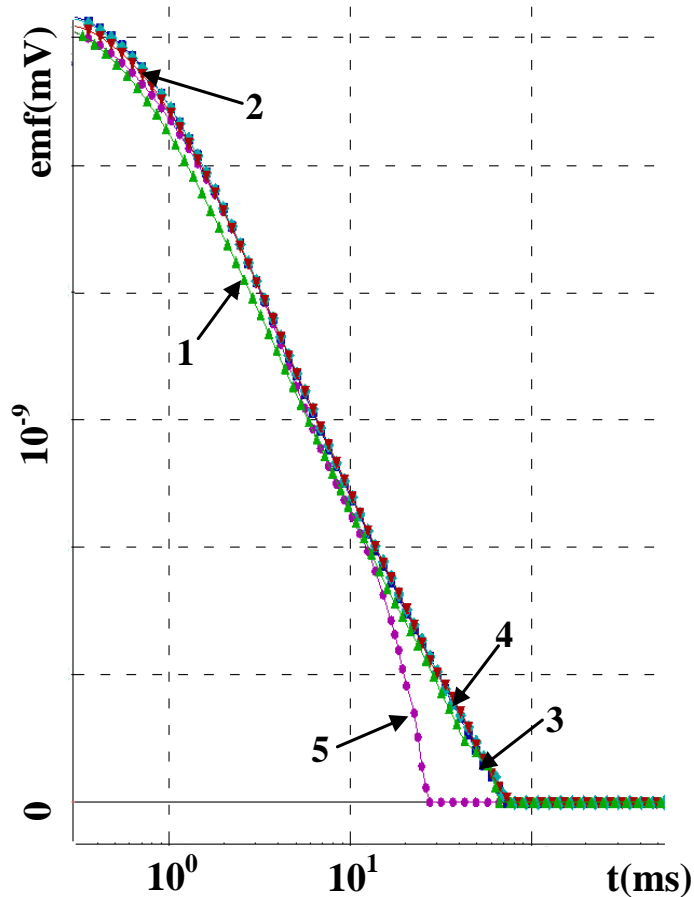


Рисунок 3.6 – Графики зависимости поля ЭДС от времени в точке  $P_1$  для "пластинчатой", анизотропной и изотропной задачи. Шифр кривых: 1 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (10 пластинок), 2 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (20 пластинок), 3 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (40 пластинок), 4 – поле ЭДС для анизотропной задачи, 5 – поле ЭДС для изотропной задачи

Рассмотрим распределение  $x$ -компоненты  $E_x$  и  $y$ -компоненту  $E_y$  напряженности электрического поля  $E$  на дневной поверхности в моменты времени 1.5 мс и 3.5 мс для задачи с "пластинчатым", анизотропным и

изотропным объектом. Соответствующие поля представлены на рисунках 3.7 – 3.10. Кроме того, сравним значения напряженностей электрического поля для трех рассматриваемых объектов в точках  $P_2$  и  $P_3$  (рисунке 3.11).

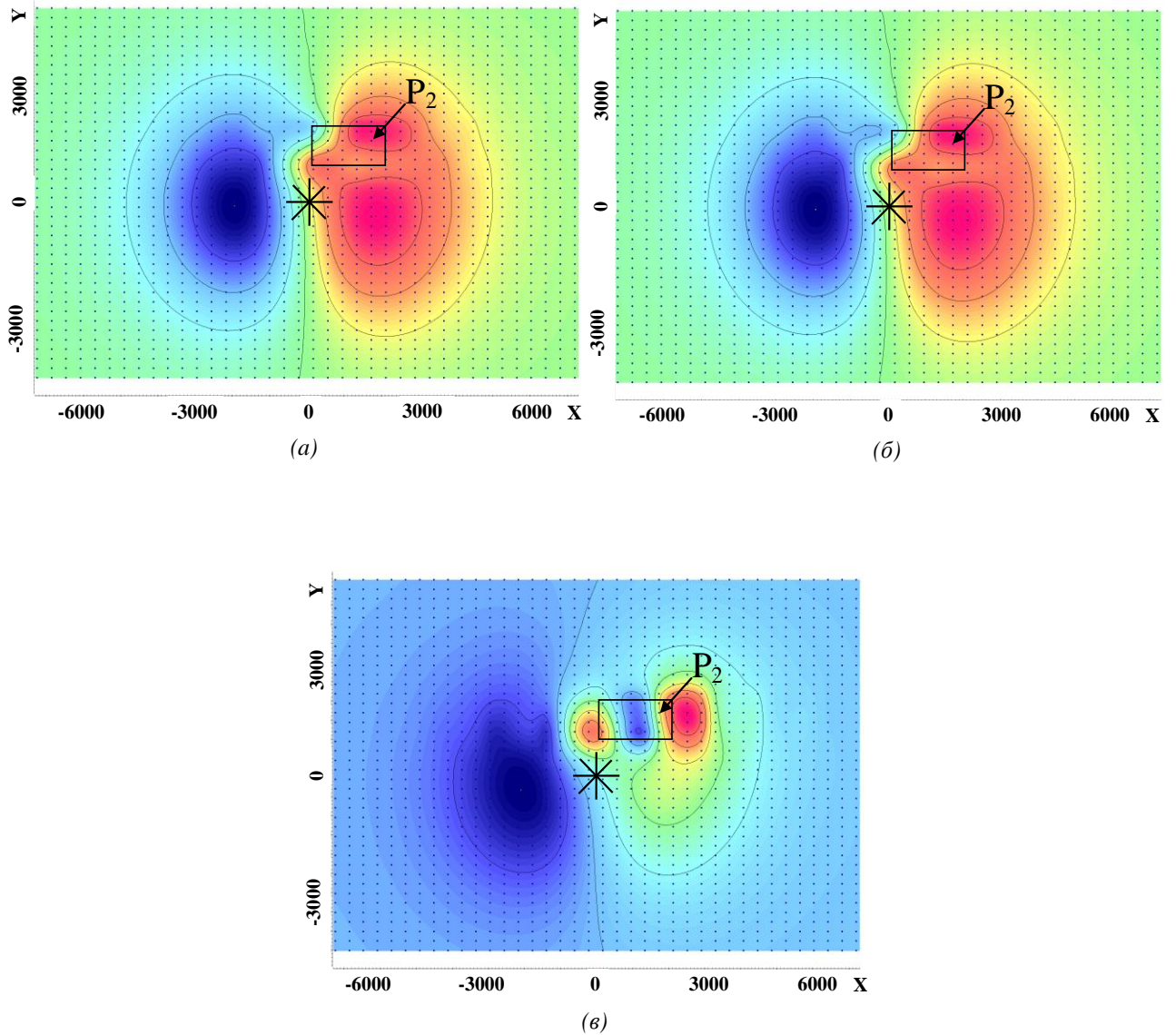


Рисунок 3.7 – Распределение поля  $E_x$  в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2

Из приведенных рисунков распределения поля ЭДС и компонент  $E_x$ ,  $E_y$  напряженности электрического поля видно, что результаты расчетов для "пластинчатого" и анизотропного подходов совпадают, и при этом отличаются от результатов для изотропного объекта. Также можно отметить, что с увеличением количества пластинок значение, полученное с использованием "пластинчатого" подхода, стремится к результату анизотропной задачи.

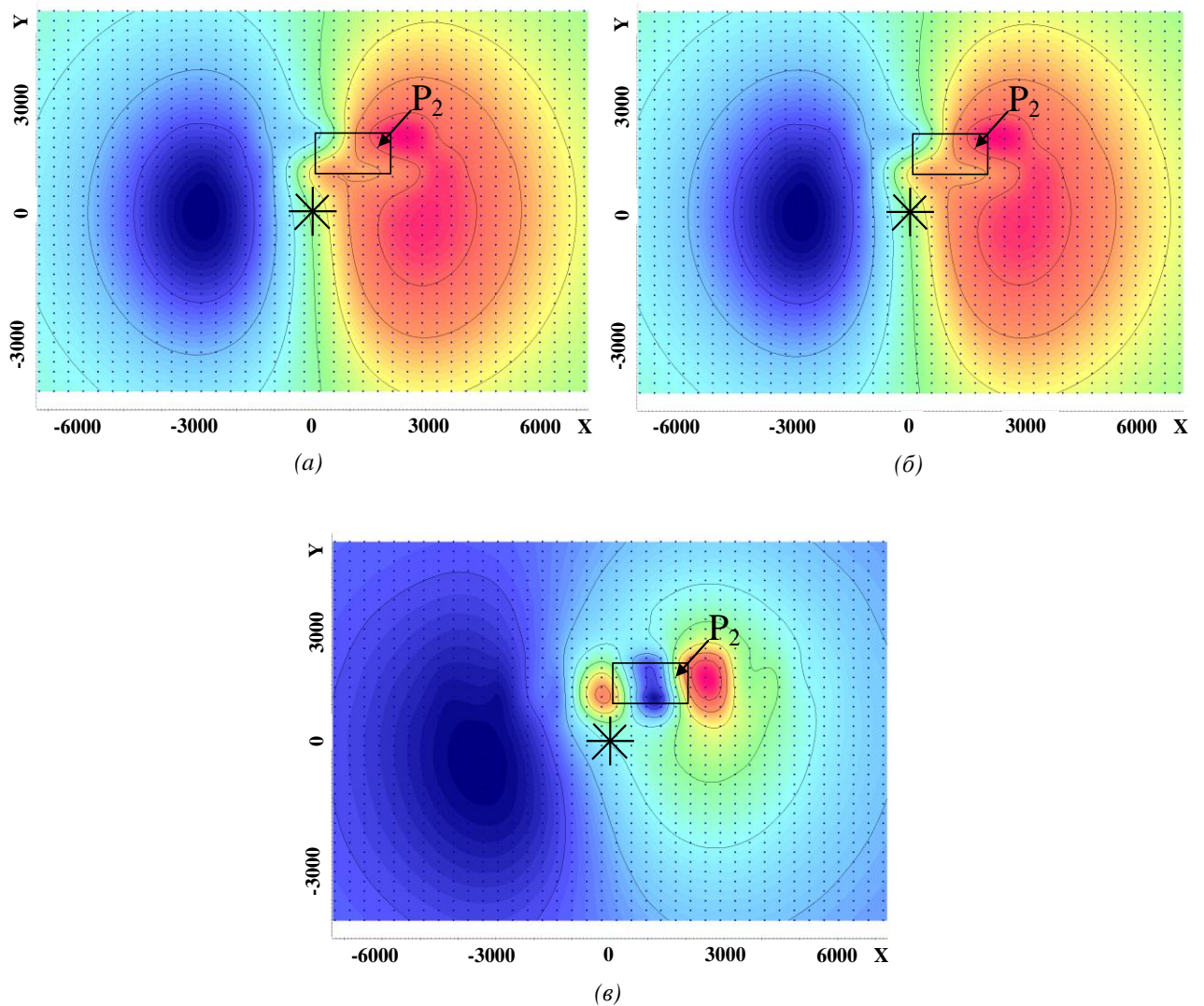


Рисунок 3.8 – Распределение поля  $E_x$  в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2

Перейдем к сравнению результатов моделирования нестационарного электромагнитного поля КЭД для трехмерной модели, расположение пластинок объекта в которой представлено на рисунке 3.3. В этом случае коэффициенты проводимости для анизотропного объекта рассчитываются следующим образом:

$$\sigma_y^{obj} = \frac{\sigma_1^{obj} \cdot \sigma_2^{obj} (l_1^{obj} + l_2^{obj})}{\sigma_1^{obj} \cdot l_2^{obj} + \sigma_2^{obj} \cdot l_1^{obj}}, \quad \sigma_x^{obj} = \sigma_z^{obj} = \frac{\sigma_1^{obj} l_1^{obj} + \sigma_2^{obj} l_2^{obj}}{l_1^{obj} + l_2^{obj}}. \quad (3.2)$$

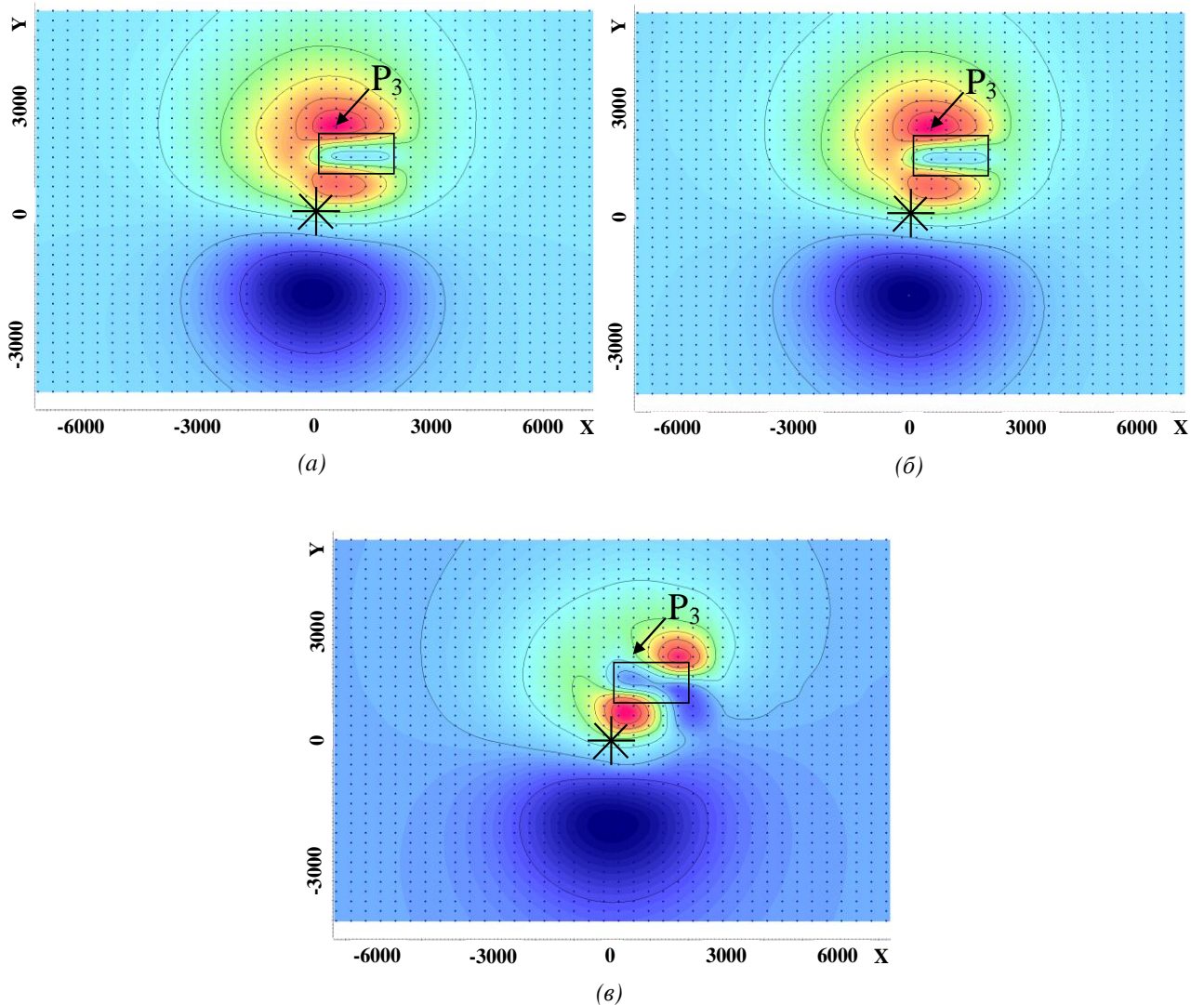


Рисунок 3.9 – Распределение поля  $E_y$  в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2

Для заданных коэффициентов удельной электрической проводимости пластинок  $\sigma_1^{obj} = 5$  См/м и  $\sigma_2^{obj} = 0.01$  См/м тензор удельной электрической проводимости анизотропного объекта имеет вид:

$$\sigma^{obj} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{obj} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^{obj} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001998 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5005 \end{bmatrix}.$$

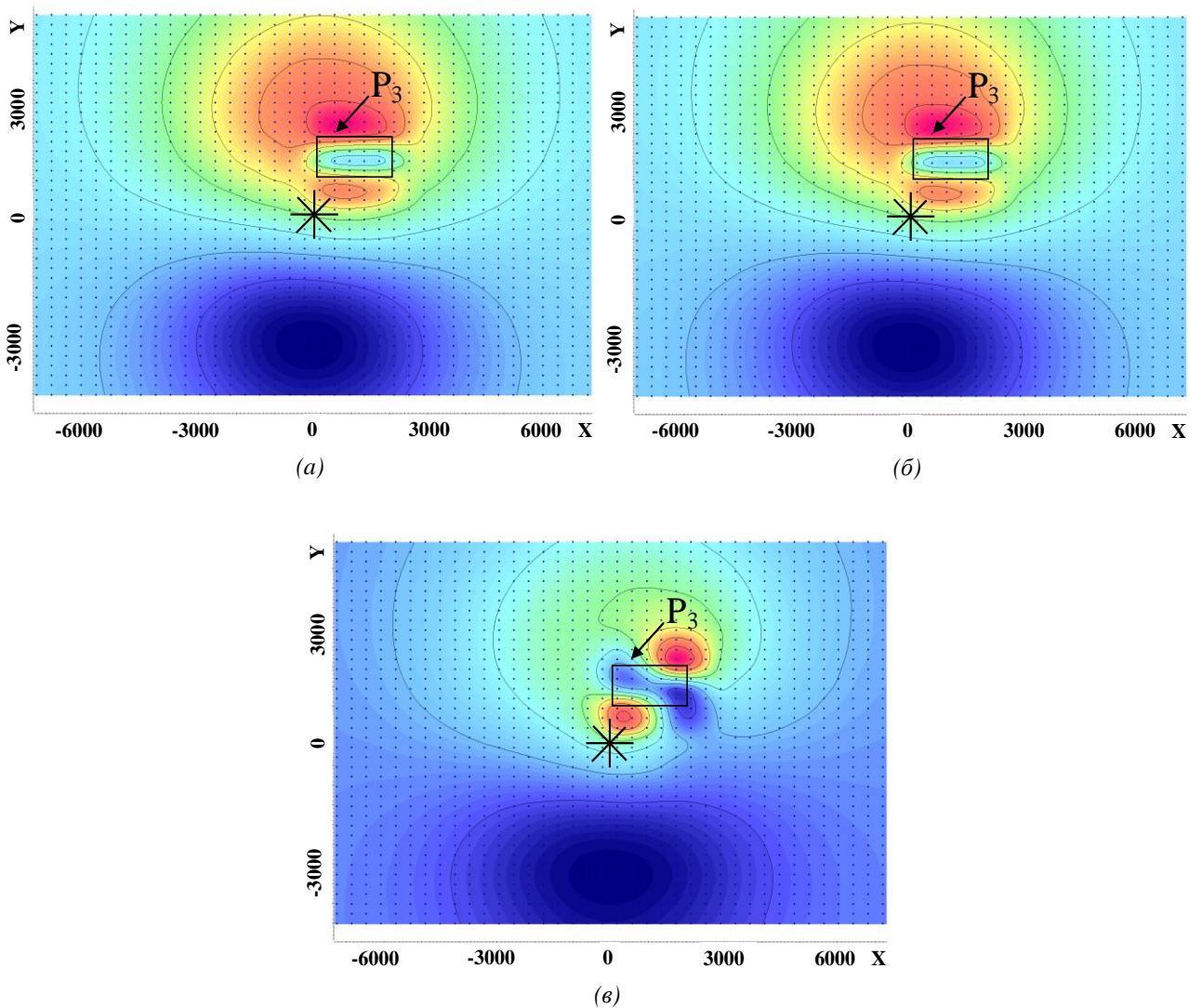


Рисунок 3.10 – Распределение поля  $E_y$  в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.2



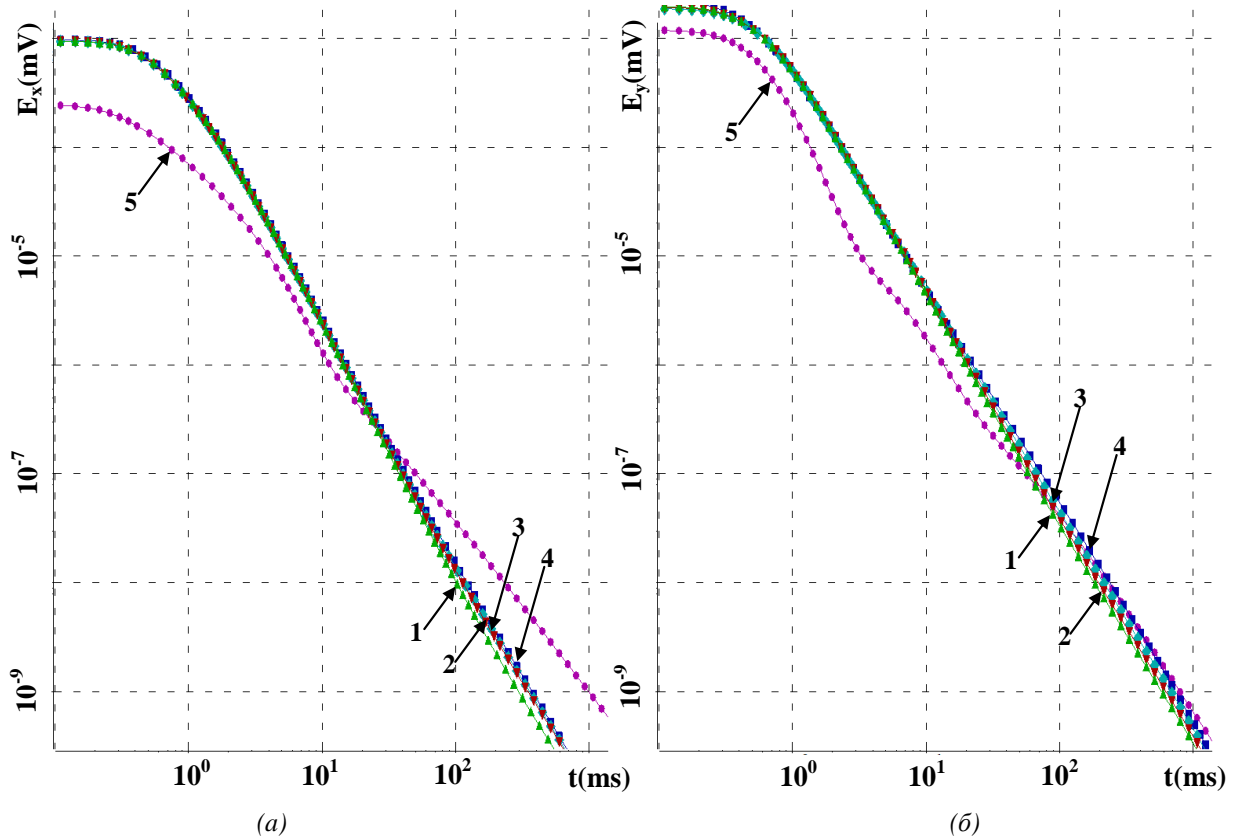


Рисунок 3.11 – Графики напряженности электрического поля  $E_x$  (а) и  $E_y$  (б) от времени в точках  $P_2$  и  $P_3$  для "пластинчатой", анизотропной и изотропной задачи. Шифр кривых: 1 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (10 пластинок), 2 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (20 пластинок), 3 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (40 пластинок), 4 – напряженности электрического поля для анизотропной задачи, 5 – поле ЭДС для изотропной задачи

На рисунках 3.12 и 3.13 представлено распределение поля ЭДС в момент времени 1.5 мс и 3.5 мс для "пластинчатой" и анизотропной задачи для ситуации, когда "пластинчатый" объект состоял из 40 пластинок, а также для задачи с

изотропным объектом, коэффициент удельной электрической проводимости которого равен 5 См/м.

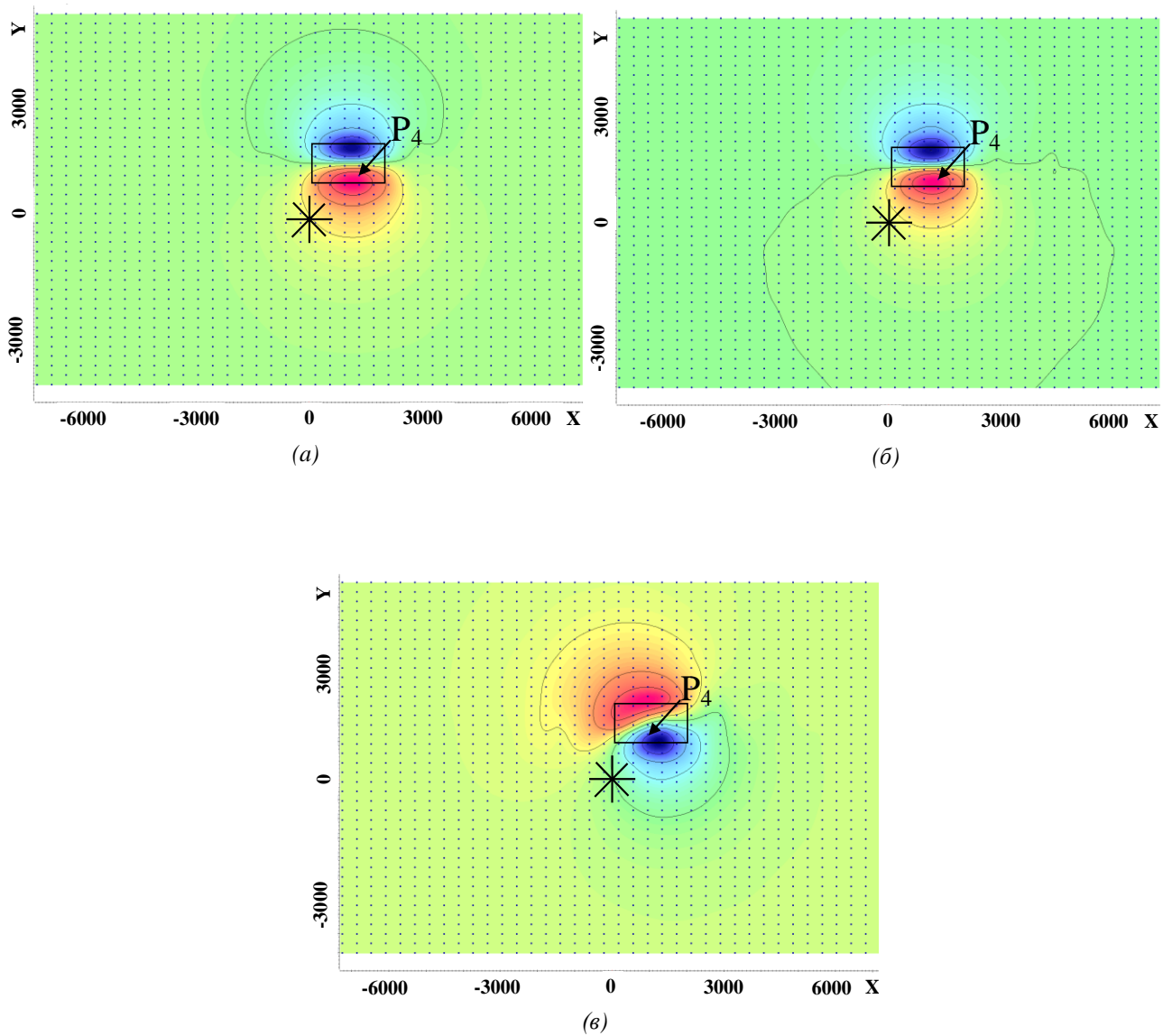


Рисунок 3.12 – Распределение поля ЭДС в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3

Сравним значения поля ЭДС для "пластинчатой" (10, 20 и 40 пластинок), анизотропной и изотропной задачи в точке P<sub>4</sub>. Графики зависимости поля ЭДС от времени представлены на рисунке 3.14. Из рисунка видно, что для такого

расположения пластинок поле ЭДС для изотропной и анизотропной задачи в точке  $P_4$  отличаются не существенно, поскольку в обоих случаях точка  $P_4$  расположена в зоне максимальных значений.

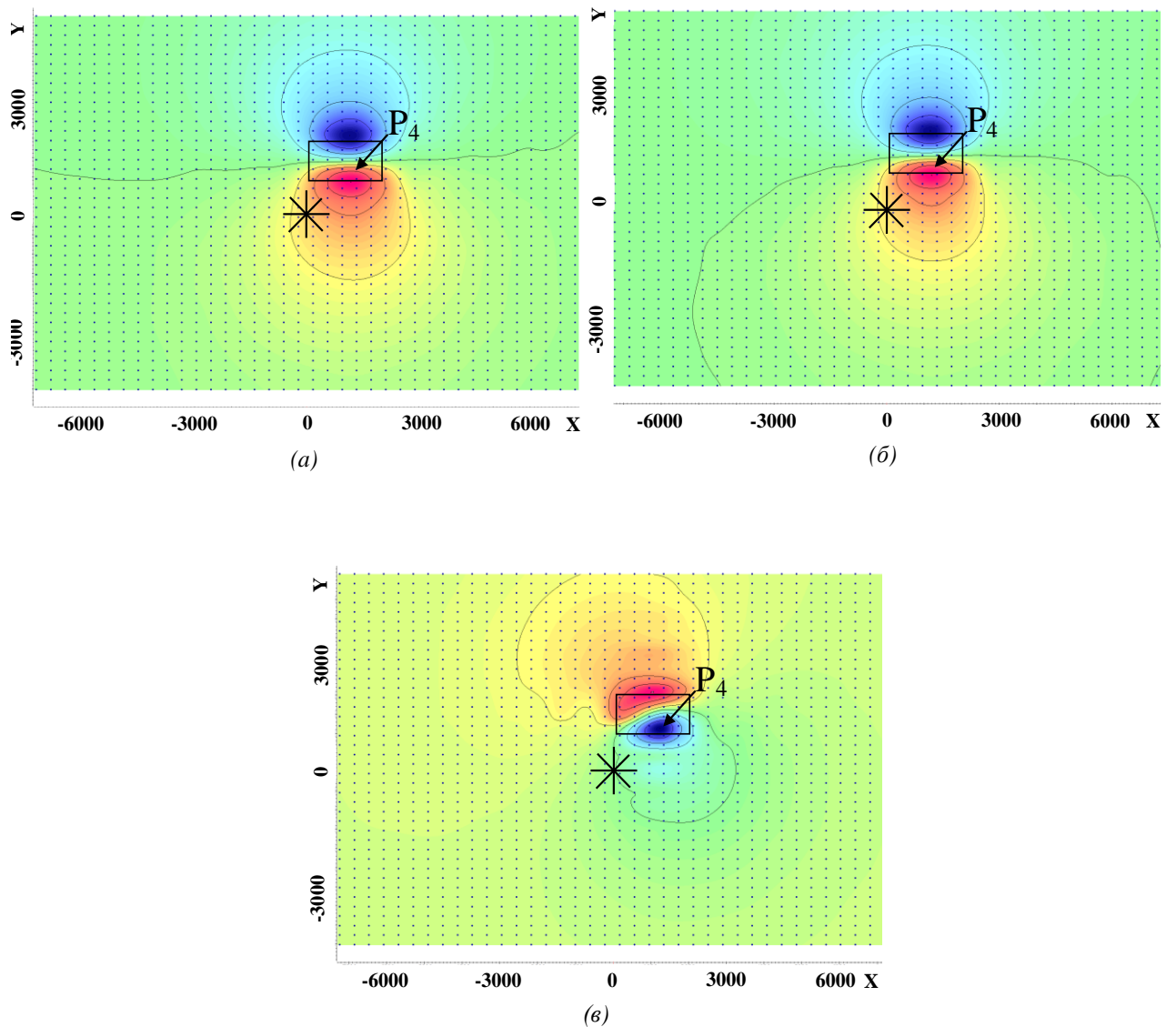


Рисунок 3.13 – Распределение поля ЭДС в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3

Сравним также распределение напряженности электрического поля  $E$ , а именно  $E_x$  и  $E_y$ , на дневной поверхности в моменты времени 1.5 мс и 3.5 мс для

задачи с "пластинчатым", анизотропным и изотропным объектом. Соответствующие поля представлены на рисунках 3.15 – 3.18. Также на рисунке 3.15 – 3.18 показано расположение точек  $P_5$  и  $P_6$ , в которых проводились измерения полей.

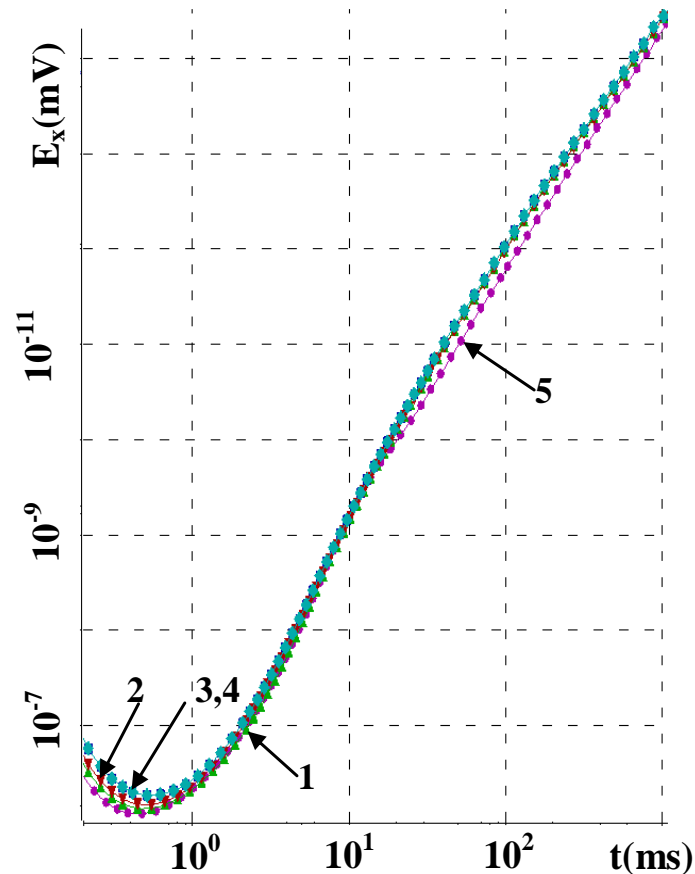


Рисунок 3.14 – Графики зависимости поля ЭДС от времени в точке  $P_3$  для "пластинчатой", анизотропной и изотропной задачи. Шифр кривых: 1 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (10 пластинок), 2 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (20 пластинок), 3 – поле ЭДС для "пластинчатой" задачи (40 пластинок), 4 – поле ЭДС для анизотропной задачи, 5 – поле ЭДС для изотропной задачи

Таким образом, и при расположении пластинок одинаковой длины вдоль оси  $Y$ , результаты расчетов для "пластинчатого" и анизотропного подходов совпадают.

Все это свидетельствует о правильности разработанных вычислительных схем и программных реализаций для расчета нестационарных электромагнитных полей в анизотропных трехмерных средах.

Кроме того следует отметить, что для анизотропного подхода вычислительные затраты существенно ниже за счет возможности использования более грубых пространственных дискретизаций, чем при использовании "пластинчатого".

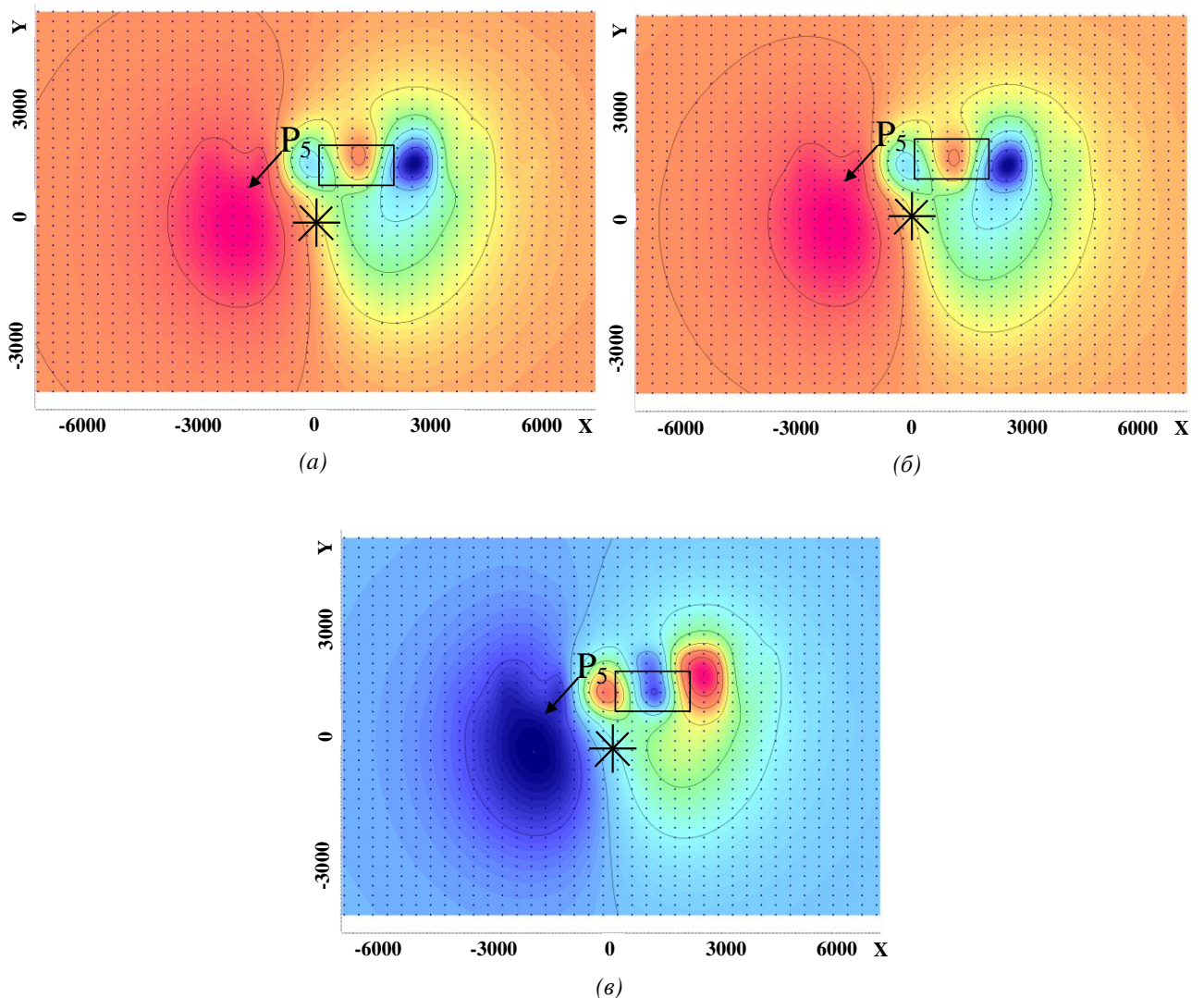


Рисунок 3.15 – Распределение поля  $E_x$  в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3

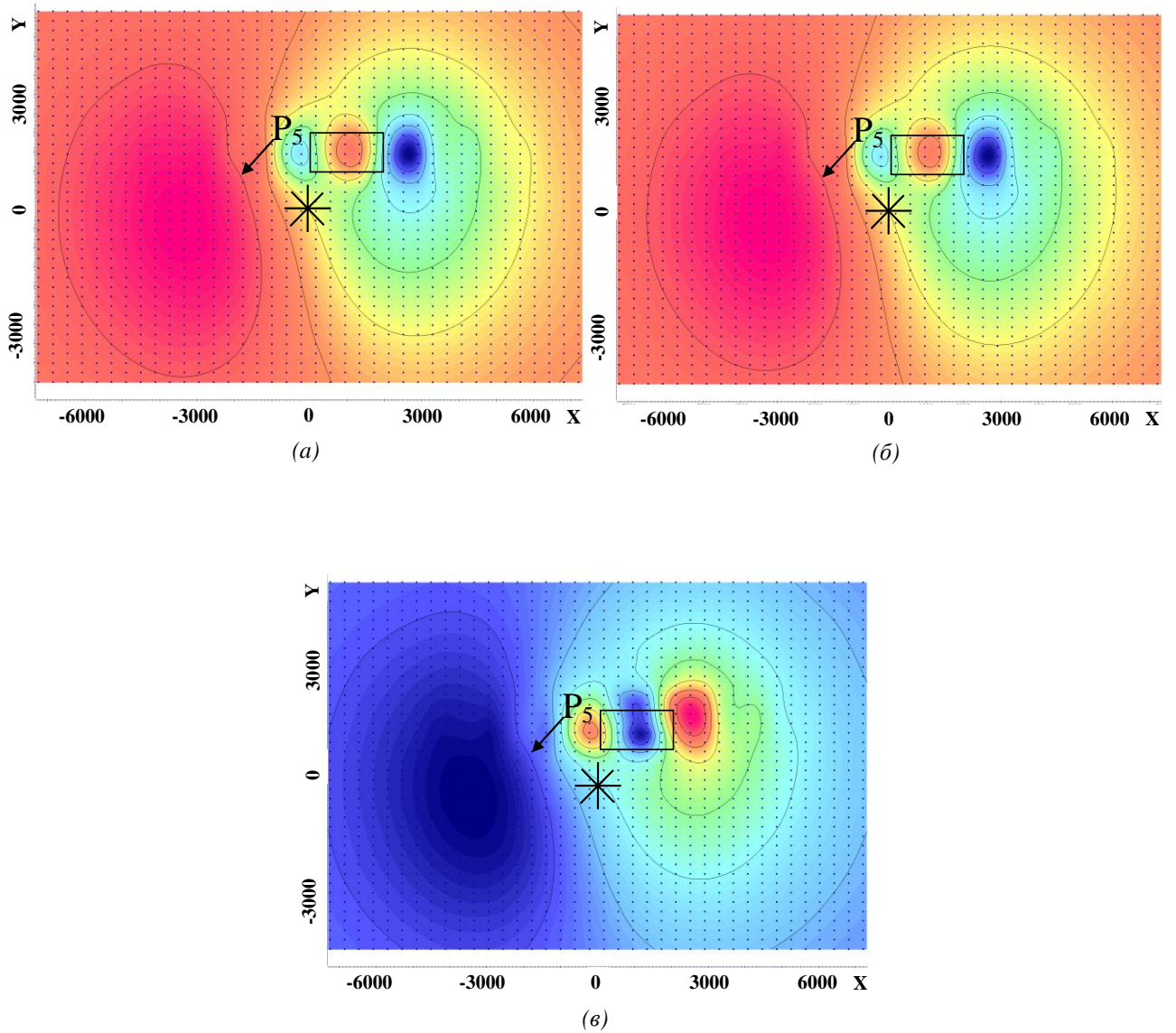


Рисунок 3.16 – Распределение поля  $E_x$  в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3

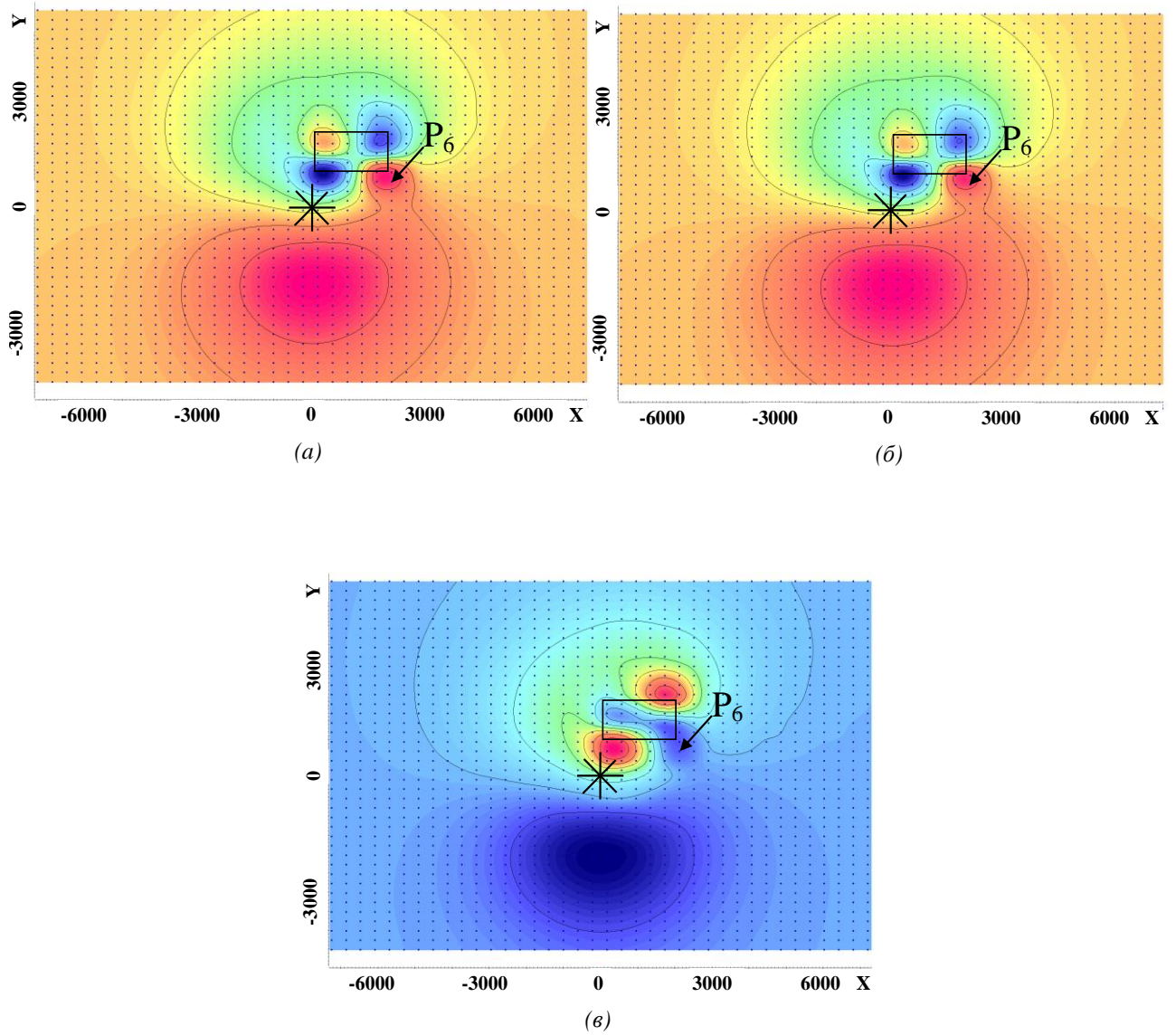


Рисунок 3.17 – Распределение поля  $E_y$  в момент времени 1.5 мс для "пластинчатой" (а), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3

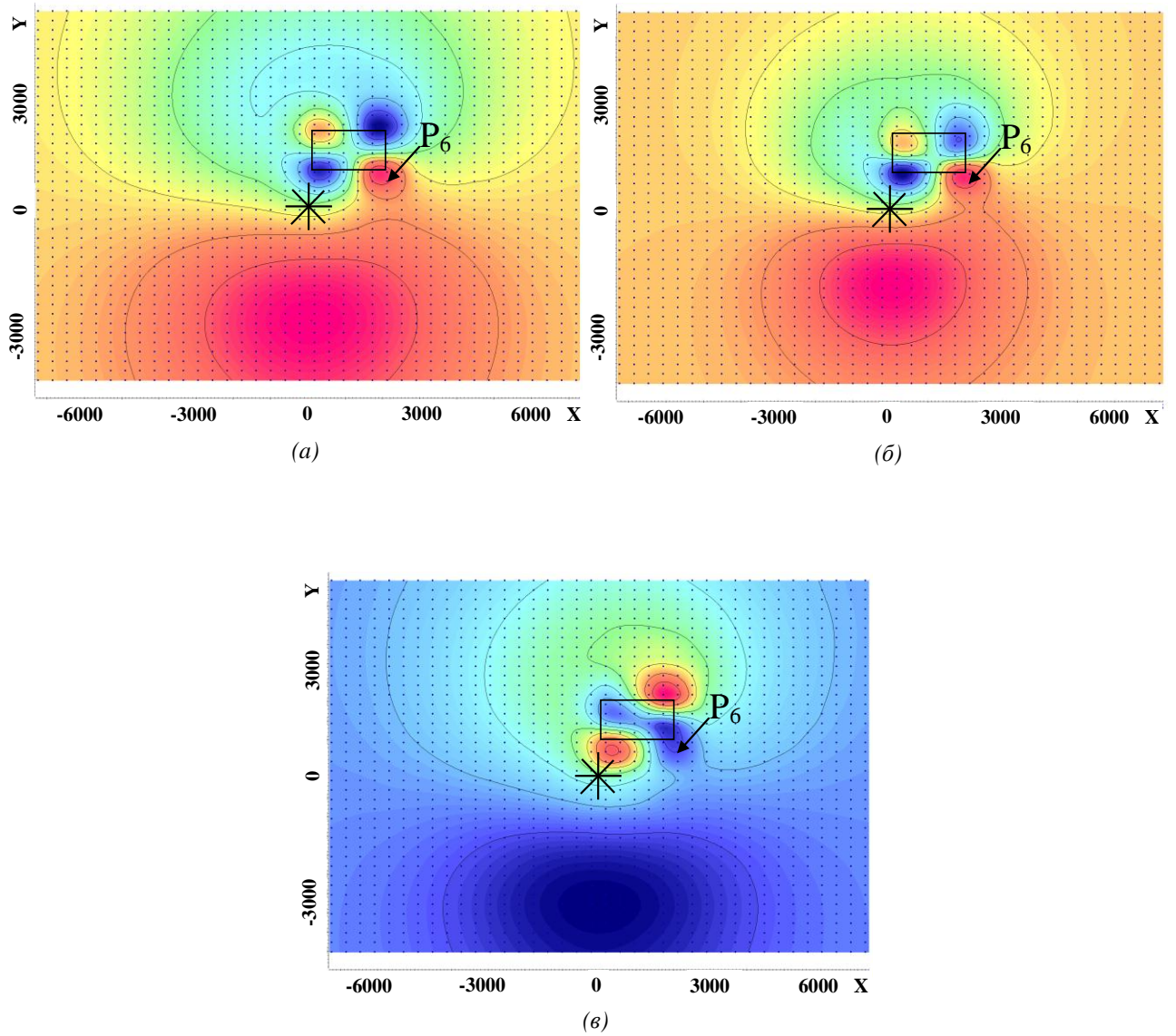


Рисунок 3.18 – Распределение поля  $E_y$  в момент времени 3.5 мс для "пластинчатой" (a), анизотропной (б) и изотропной задачи (в) для модели, представленной на рисунке 3.3



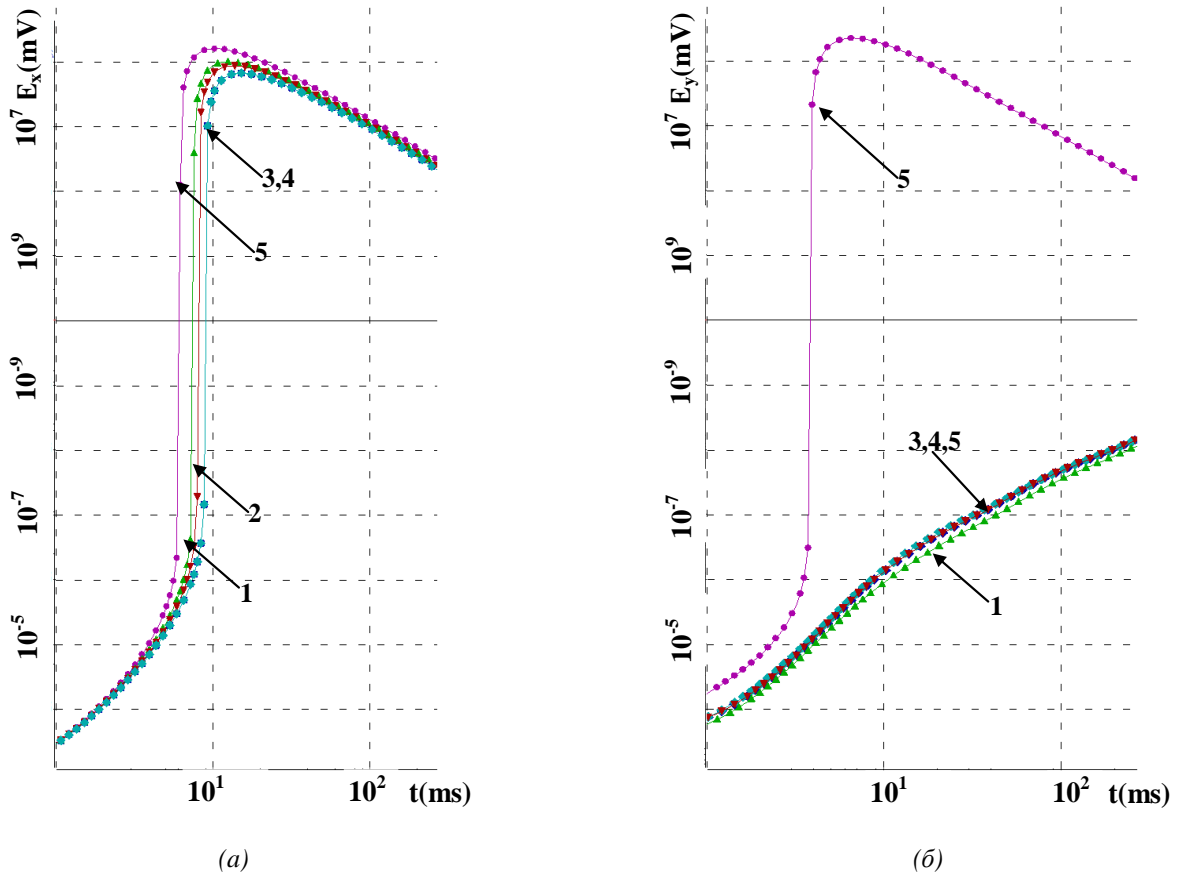


Рисунок 3.19 – Графики напряженности электрического поля  $E_x$  (а) и  $E_y$  (б) от времени в точках  $P_5$  и  $P_6$  для "пластинчатой", анизотропной и изотропной задачи. Шифр кривых: 1 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (10 пластинок), 2 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (20 пластинок), 3 – напряженности электрического поля для "пластинчатой" задачи (40 пластинок), 4 – напряженности электрического поля для анизотропной задачи, 5 – поле ЭДС для изотропной задачи

### 3.3. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования полей вызванной поляризации в изотропных средах

Для анализа точности вычисления поля ВП в изотропных средах сравним поле ВП, полученное для идеальной установки КЭД, и поле, рассчитанное как сумма полей от симметрично расположенных горизонтальных линий (ГЭЛ) [1]. Для этого рассмотрим следующую геоэлектрическую модель. В трехслойную горизонтально-слоистую среду с параметрами, представленными в таблице 3.1 ( $\sigma_i = 1/\rho_i$ ), поместим объект с размерами  $8 \times 10 \times 0.1$  км<sup>3</sup> на глубине 4000 м от поверхности. Коэффициент поляризуемости объекта выберем  $\alpha^{obj} = 5\%$ , коэффициент удельного сопротивления  $\rho^{obj} = 100$  См/м ( $\sigma^{obj} = 1/\rho^{obj}$ ), а параметр  $T_0^{obj} = 0.01$ . Радиус источника (длина ГЭЛ) составляет 5 км. План и разрез геоэлектрической модели представлены на рисунке 3.20. Координаты приемных линий (расположение которых представлено на рисунке 3.20) приведены в таблице 3.2. В качестве функции спада воспользуемся формулой Комарова.

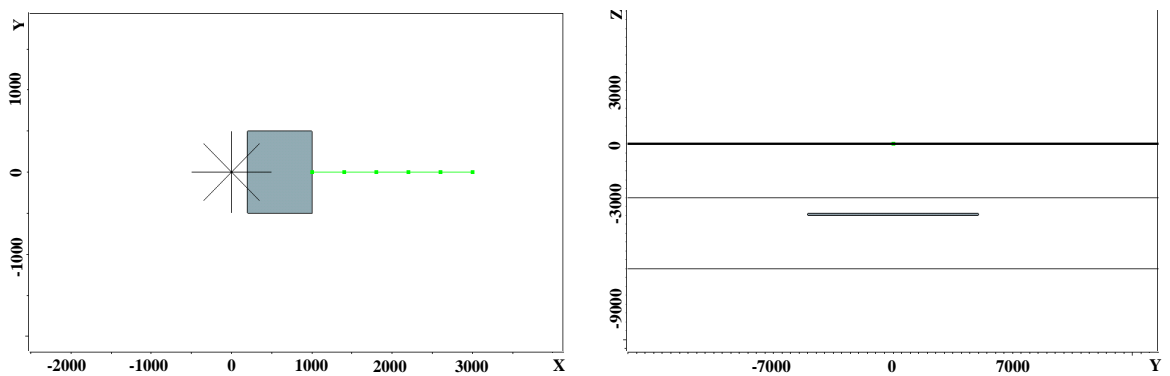


Рисунок 3.20 – План и разрез геоэлектрической модели

Результаты расчетов представлены на рисунках 3.21 – 3.24 в виде графиков разности потенциалов  $\Delta V(t)$  поля ВП для идеальной установки КЭД и установки КЭД, состоящей из 8 горизонтальных линий. Для установки, составленной из 8

ГЭЛ, приведены результаты на двух (двумерных) сетках: грубой (сетка 0), вложенной (сетка 1) и дважды вложенной (сетка 2). Кроме того, на рисунке 3.21 – 3.24 представлено поле ВП для среды без объекта.

Таблица 3.1 – Параметры среды

$i$	$h_i$ , м	$\rho_i$ , См/м	$\alpha_i$ , %	$T_0$
1	3000	0.3	1	0.01
2	4000	2	1	0.01
3	$\infty$	0.001	1	0.01

Таблица 3.2 – Координаты приемных линий

$MN_1$	(10000, 0, 0)	(14000, 0, 0)
$MN_2$	(14000, 0, 0)	(18000, 0, 0)
$MN_3$	(18000, 0, 0)	(22000, 0, 0)
$MN_4$	(22000, 0, 0)	(26000, 0, 0)
$MN_5$	(26000, 0, 0)	(30000, 0, 0)
$MN_6$	(30000, 0, 0)	(34000, 0, 0)

Из рисунков 3.21 и 3.22 видно, что решения, полученные на сетке 0 для установки, составленной из 8 ГЭЛ, совпадает с решением для идеальной установки КЭД. Таким образом, для получения совпадения в приемных линиях  $MN_1$  и  $MN_2$  нет необходимости в дроблении сетки.

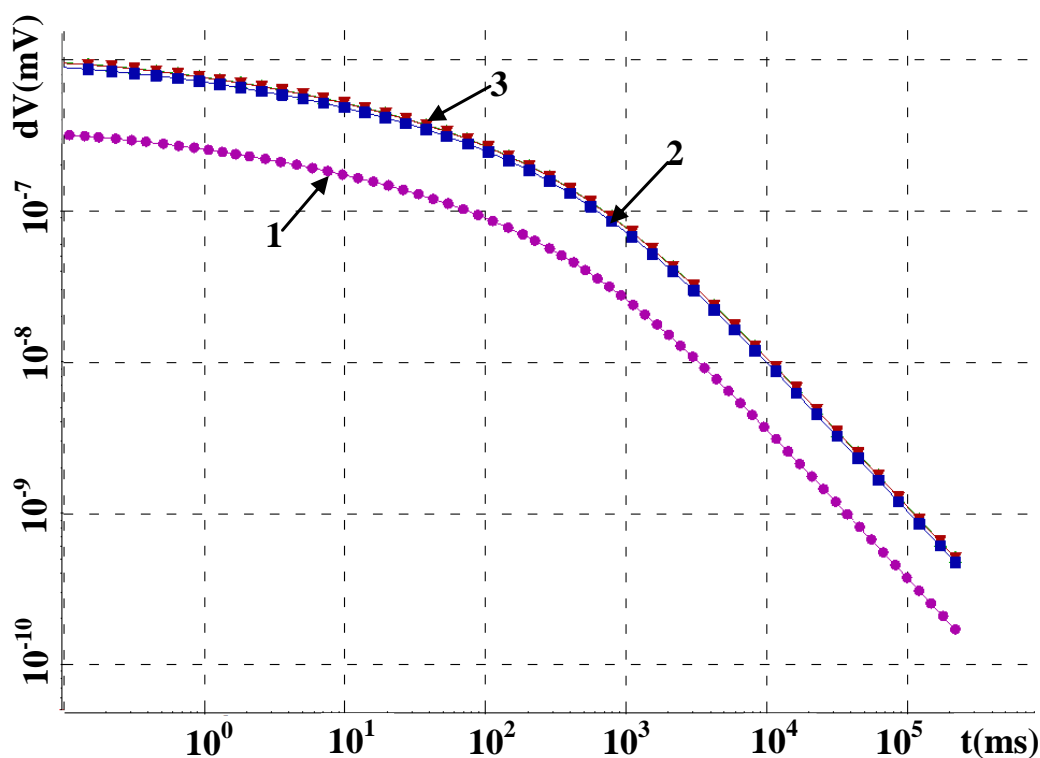


Рисунок 3.21 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемной линии  $MN_1$   
 Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта (идеальный КЭД), 2 – поле в среде, содержащей объект (идеальный КЭД), 3 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 0

В приемной линии  $MN_3$  (рисунок 3.23а) также было получено совпадение для обоих источников.

Если же сравнивать результаты для приемных линий  $MN_4$  (рисунок 3.23б),  $MN_5$  (рисунок 3.24а) и  $MN_6$  (рисунок 3.24б), можно отметить, что решение для 8 ГЭЛ на сетке 0 существенно отличается от решения для идеального КЭД. Поэтому для получения совпадения в приемной линии  $MN_4$  потребовалось провести расчет поля для восьмилучевого источника на вложенной двумерной сетке (сетке 1). А для приемных линий  $MN_5$  и  $MN_6$  также был проведен расчет и на дважды вложенной двумерной сетке.

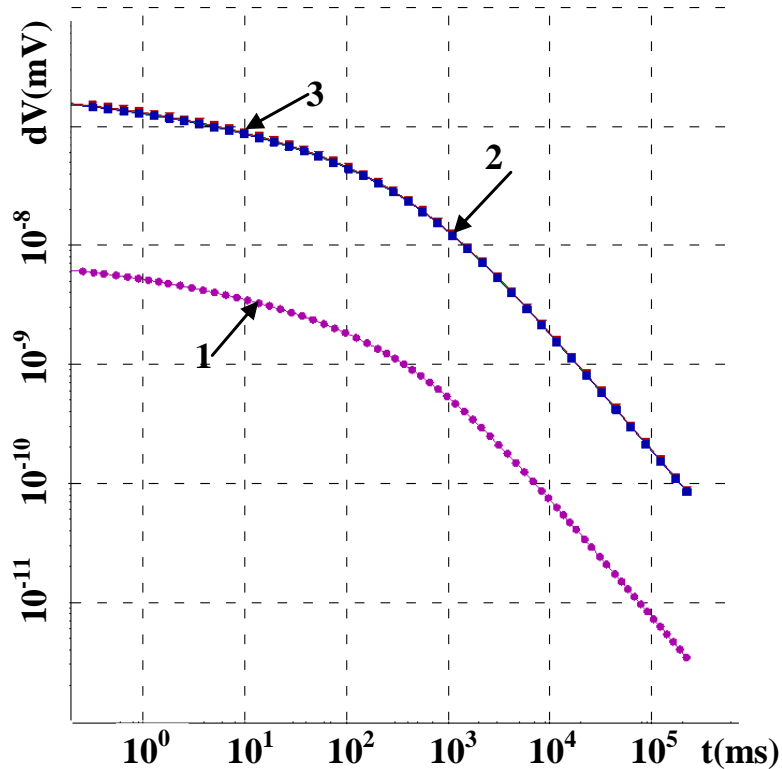


Рисунок 3.22 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемной линии  $MN_2$   
 Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта (идеальный КЭД), 2  
 – поле в среде, содержащей объект (идеальный КЭД), 3 – поле в среде,  
 содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 0

В целом, из рисунков 3.21 – 3.24 можно сделать вывод, что поле ВП для идеальной установки КЭД и установки, состоящей из 8 радиально направленных ГЭЛ, совпадает, что свидетельствует о правильности разработанных вычислительных схем и их программных реализаций.

Однако при расчете сигналов на приемных линиях, расположенных на значительном удалении от источника, погрешность расчета электромагнитного поля КЭД в виде суммы полей от радиальных ГЭЛ очень велика, а ее уменьшение требует колоссальных вычислительных затрат, в то время как погрешность расчета электромагнитного поля для идеального КЭД слабо зависит от разносов приемных линий.

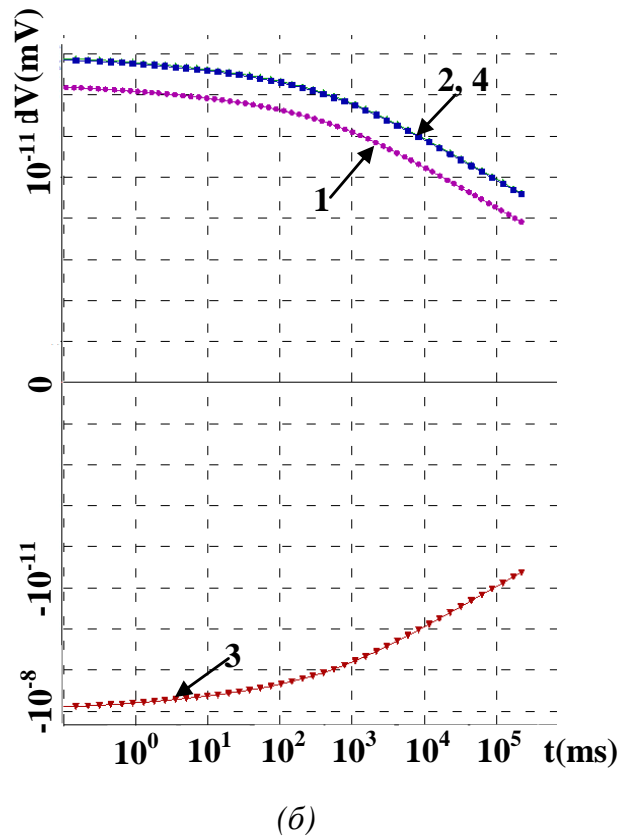
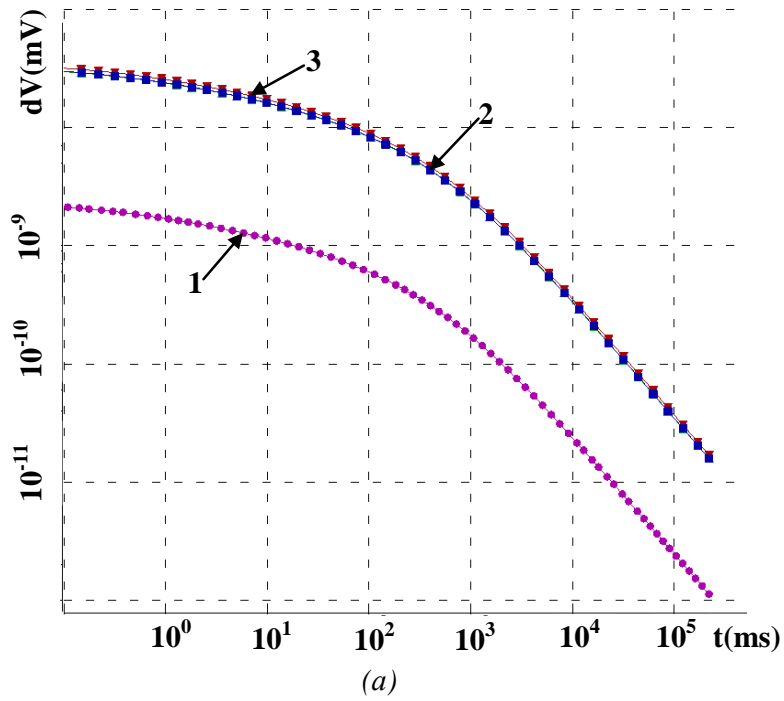
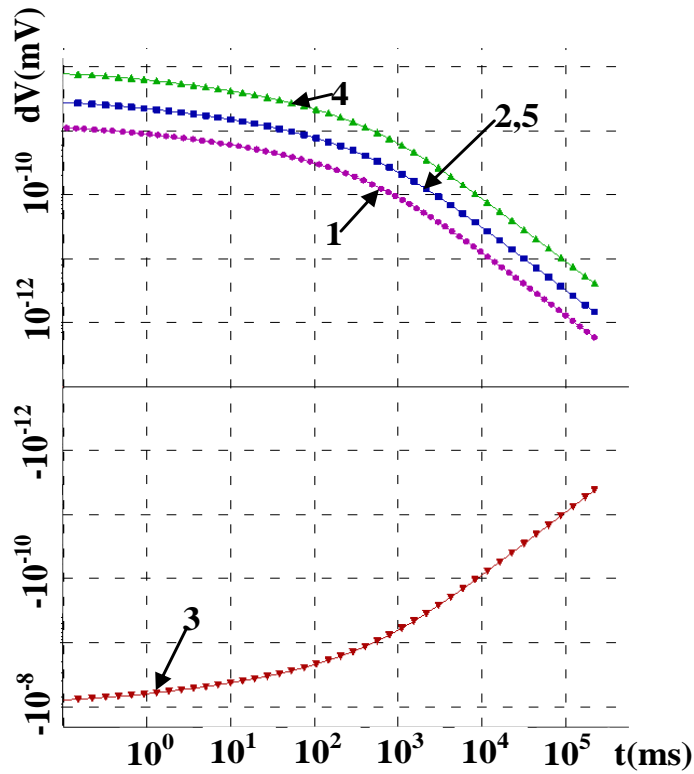
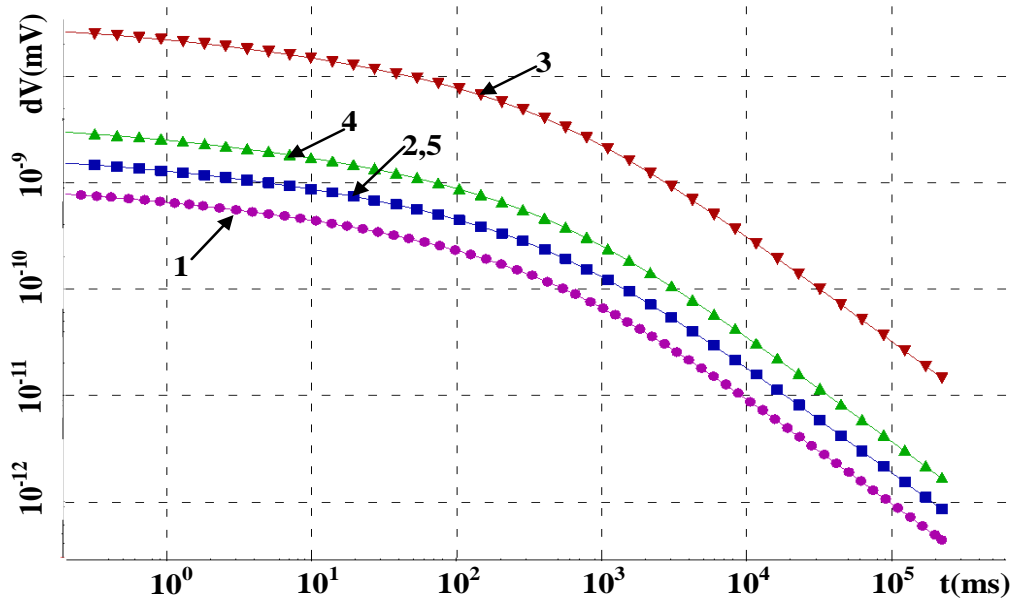


Рисунок 3.23 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_3$  (a) и  $MN_4$  (б). Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта (идеальный КЭД), 2 – поле в среде, содержащей объект (идеальный КЭД), 3 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 0, 4 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 1



(a)



(б)

Рисунок 3.24 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_5$  (a) и  $MN_6$  (б). Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта (идеальный КЭД), 2 – поле в среде, содержащей объект (идеальный КЭД), 3 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 0, 4 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 1, 5 – поле в среде, содержащей объект (8 ГЭЛ) на сетке 2

### 3.4. Верификация программного комплекса при решении задачи моделирования полей вызванной поляризации в анизотропных средах

Для анализа точности вычисления нестационарного электромагнитного поля КЭД перейдем к рассмотрению следующей геоэлектрической модели. В проводящее полупространство с удельной проводимостью 0.02 См/м на глубину от 100 м до 50 м помещен объект с размерами  $300 \times 300 \times 50$  м<sup>3</sup>. Объект состоит из пластинок одинаковой толщины с чередующимися значениями удельной проводимости, которые соответственно равны  $\sigma_1^{obj} = 5$  См/м и  $\sigma_2^{obj} = 0.01$  См/м. Рассматривается объект с различным количеством пластинок (10, 20 и 40). Радиус источника составляет 500 м. План и разрез геоэлектрической модели с объектом, состоящим из 10 пластинок, расположенных вдоль оси X, представлены на рисунке 3.25, а вдоль оси Y – на рисунке 3.26. В качестве функции спада используется формула Комарова.

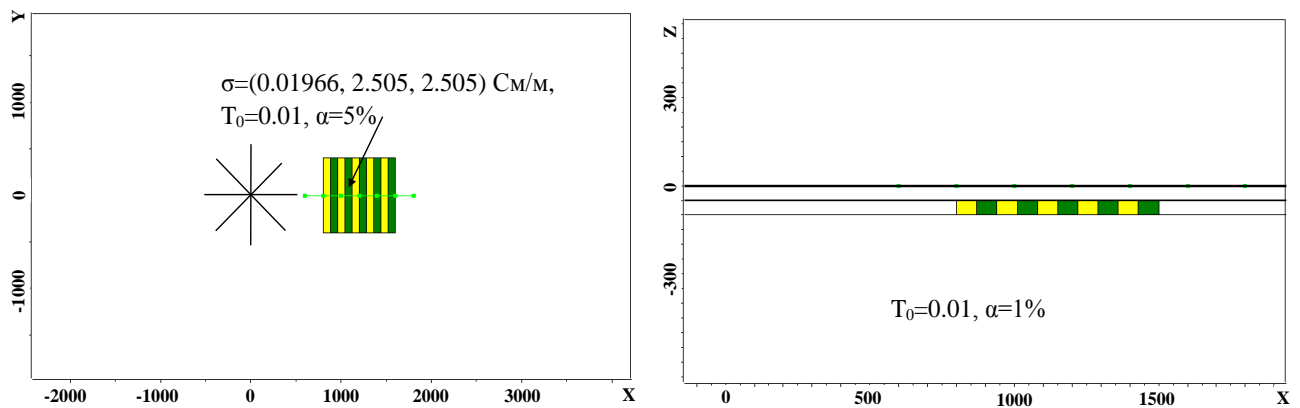


Рисунок 3.25 – План и разрез геоэлектрической модели с объектом, пластинки которого расположены вдоль оси X

Сравним результаты моделирования поля ВП для источника КЭД для трехмерной модели, содержащей такой "пластинчатый" объект, и для трехмерной модели, содержащей анизотропный объект, у которого тензор удельной



электрической проводимости анизотропного объекта определяется согласно (3.1) и имеет вид:

$$\sigma^{obj} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{obj} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^{obj} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01996 & 0 & 0 \\ 0 & 2.505 & 0 \\ 0 & 0 & 2.505 \end{bmatrix}.$$

При этом для среды коэффициент  $T_0$  выберем равным 0.01, коэффициент начальной поляризации среды  $\alpha = 1\%$ , а для объекта возьмем коэффициент начальной поляризации  $\alpha^{obj} = 5\%$ . Координаты приемных линий  $MN_1 - MN_6$  приведены в таблице 3.3.

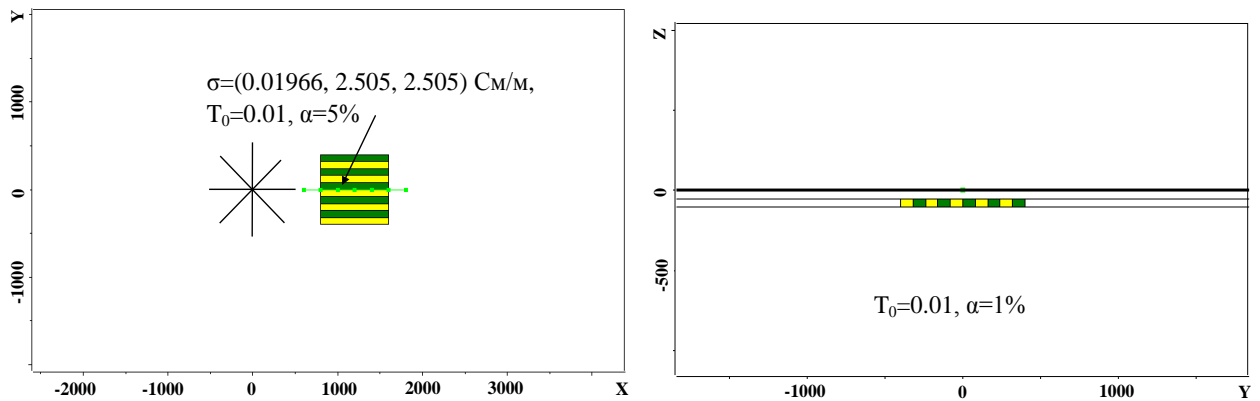


Рисунок 3.26 – План и разрез геоэлектрической модели с объектом, пластинки которого расположены вдоль оси  $Y$

Таблица 3.3 – Координаты приемных линий

$MN_1$	(600, 0, 0)	(800, 0, 0)
$MN_2$	(800, 0, 0)	(1000, 0, 0)
$MN_3$	(1000, 0, 0)	(1200, 0, 0)
$MN_4$	(1200, 0, 0)	(1400, 0, 0)
$MN_5$	(1400, 0, 0)	(1600, 0, 0)
$MN_6$	(1600, 0, 0)	(1800, 0, 0)

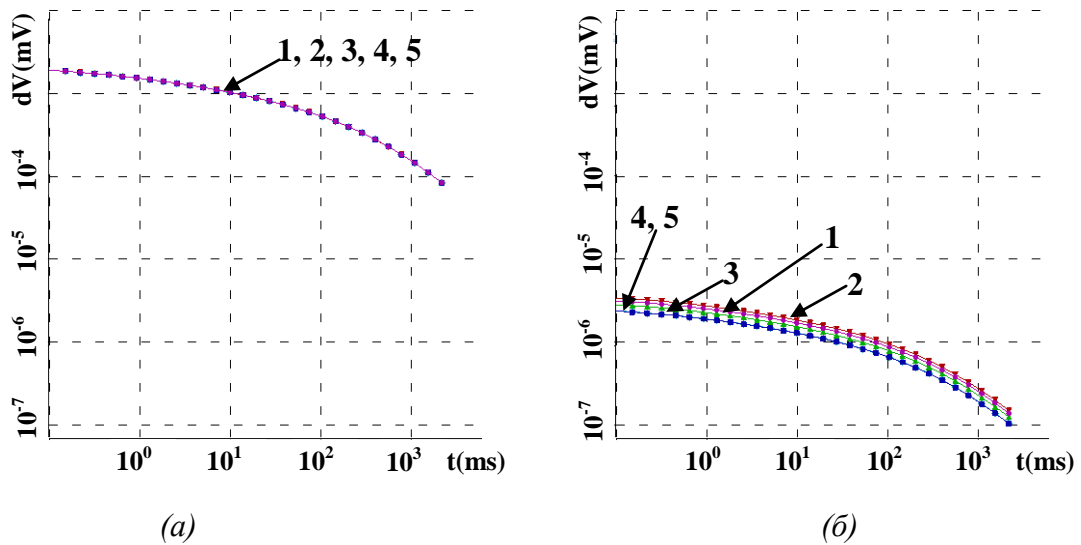
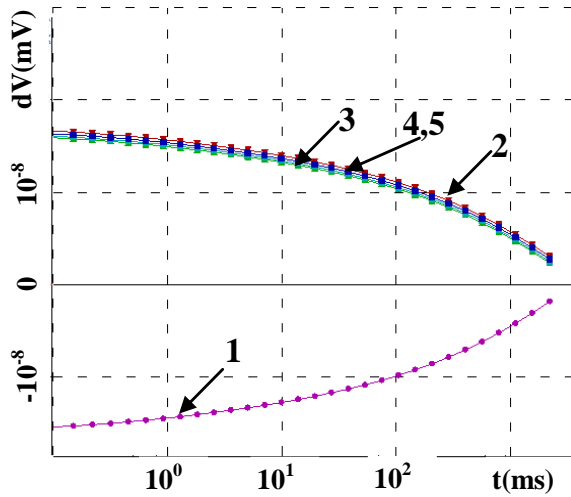


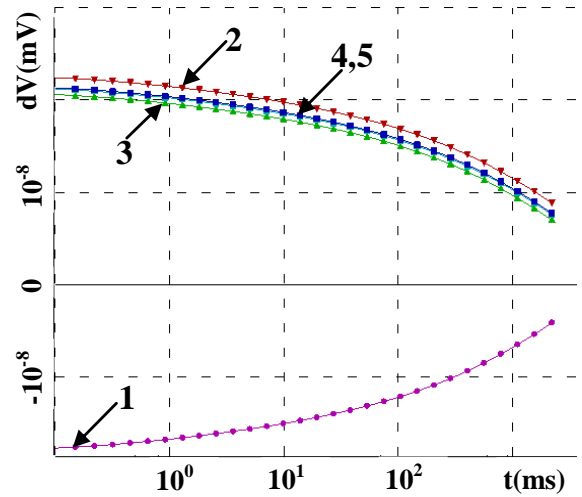
Рисунок 3.27 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_1$  (а) и  $MN_2$  (б)

Шифр кривых: 1 – поле в среде, содержащей изотропный объект, 2 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (10 пластинок), 3 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (20 пластинок), 4 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (40 пластинок), 5 – поле в среде, содержащей анизотропный объект

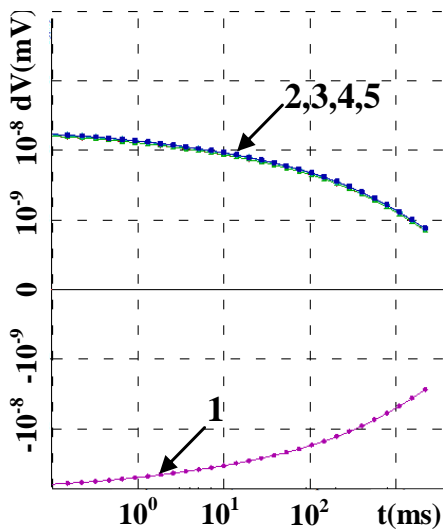
Для модели "пластинчатого" объекта, пластинки которого расположены вдоль оси  $X$ , были проведены расчеты для различного количества пластинок. Результаты расчетов представлены на рисунках 3.28 в виде графиков  $\Delta V(t)$  поля ВП для среды, содержащей объект, состоящий из 10, 20 и 40 пластинок в приемных линиях  $MN_1 - MN_6$ .



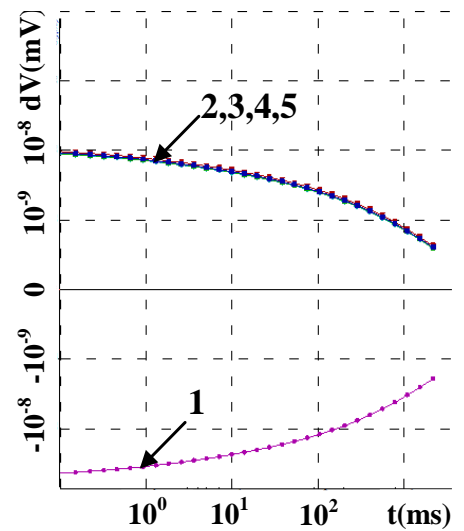
(a)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 3.28 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_3$ (a),  $MN_4$ (б),  $MN_5$ (в) и  $MN_6$ (г). Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта, 2 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (10 пластинок), 3 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (состоящий из 20 пластинок), 4 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (состоящий из 40 пластинок), 5 – поле в среде, содержащей анизотропный объект

Проанализируем результаты, представленные на рисунках 3.27 – 3.28. Разность потенциалов на приемной линии  $MN_1$  для "пластинчатого", анизотропного и изотропного подходов дают одинаковый результат. Для приемных линий  $MN_2$  –  $MN_4$  результат решения "пластинчатой" задачи отличается от решения анизотропной. Можно отметить, что с увеличением количества пластинок, решение "пластинчатой" задачи стремится к решению анизотропной. На приемных линиях  $MN_5$  –  $MN_6$  решение для "пластинчатого" подхода (для 10, 20 и 40 пластинок) и анизотропного практически не отличаются.

Перейдем к сравнению результатов моделирования поля ВП для трехмерной модели, расположение пластинок которого представлено на рисунке 3.26. В этом случае удельная проводимость анизотропного объекта рассчитываются согласно (3.2) и для коэффициентов удельной электрической проводимости пластинок  $\sigma_1^{obj} = 5$  См/м и  $\sigma_2^{obj} = 0.01$  См/м выглядит следующим образом:

$$\sigma^{obj} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{obj} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^{obj} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.505 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01996 & 0 \\ 0 & 0 & 2.505 \end{bmatrix}.$$

Для модели "пластинчатого" объекта, пластинки которого расположены вдоль оси Y, были проведены расчеты для различного количества пластинок. Результаты расчетов представлены на рисунках 3.29 – 3.30 в виде графиков разности потенциалов  $\Delta V(t)$  поля ВП для среды, содержащей объект, состоящий из 10, 20 и 40 пластинок в приемных линиях  $MN_1$  -  $MN_6$ .

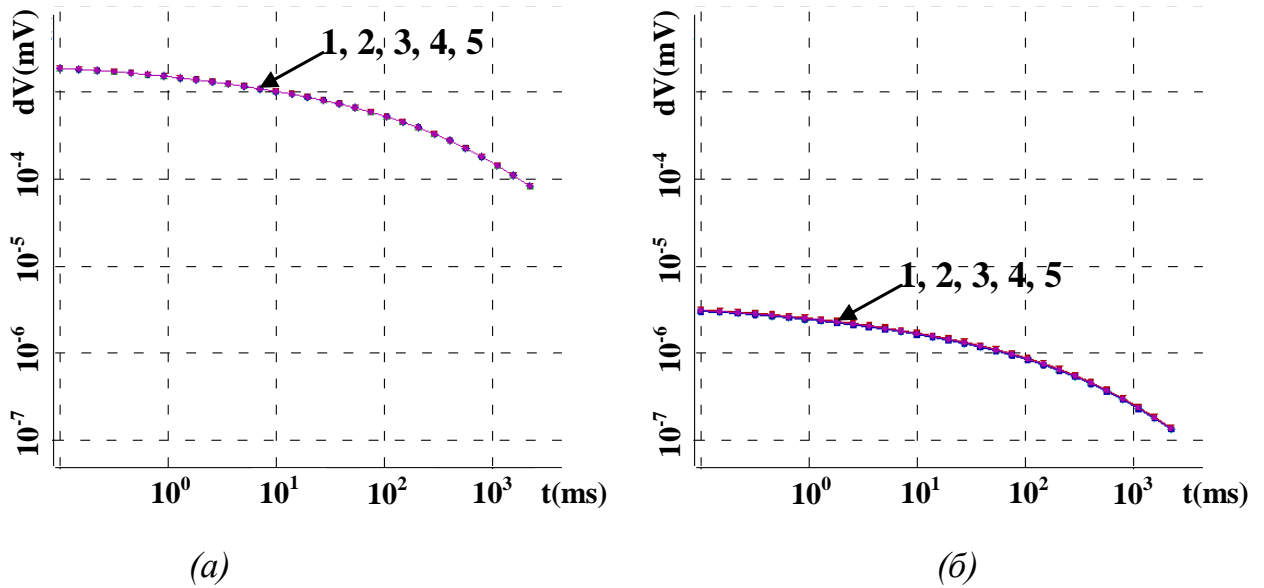


Рисунок 3.29 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_1$  (а) и  $MN_2$  (б)

Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта, 2 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (10 пластинок), 3 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (20 пластинок), 4 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (40 пластинок), 5 – поле в среде, содержащей анизотропный объект

Из рисунков 3.29 – 3.30 можно сделать вывод, что и при расположении пластинок вдоль оси  $Y$ , результаты расчетов для "пластинчатого" и анизотропного подходов совпадают.

Все это свидетельствует о правильности разработанных вычислительных схем и программных реализаций для расчета поля ВП в анизотропных трехмерных средах.

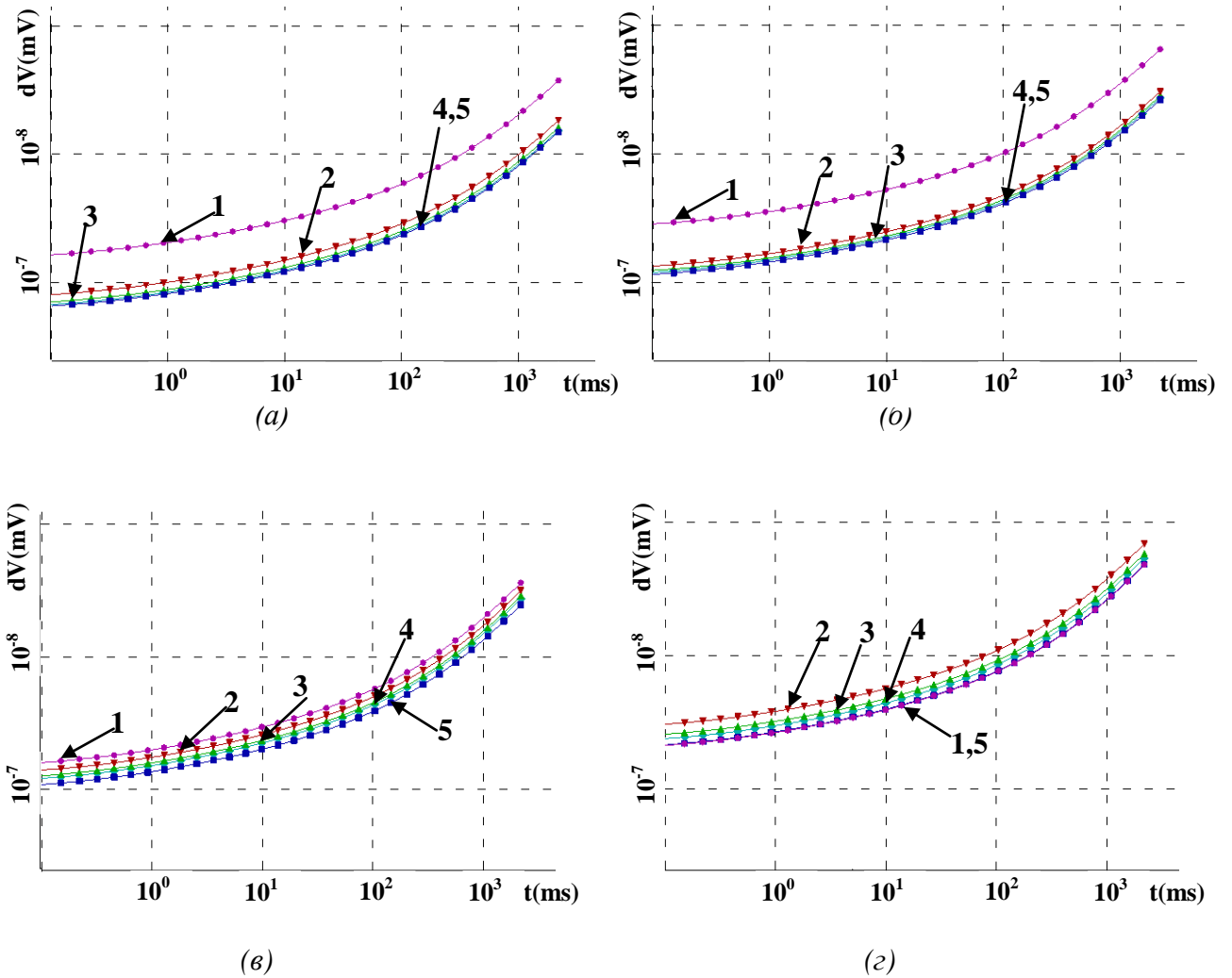


Рисунок 3.30 – Разность потенциалов  $\Delta V(t)$  для приемных линий  $MN_3(a)$ ,  $MN_4(b)$ ,  $MN_5(v)$  и  $MN_6(z)$ . Шифр кривых: 1 – поле в среде, не содержащей объекта, 2 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (10 пластинок), 3 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (20 пластинок), 4 – поле в среде, содержащей "пластинчатый" объект (40 пластинок), 5 – поле в среде, содержащей анизотропный объект

### 3.5. Выводы

1. Выполнена верификация моделирования полей ВП для источника КЭД в изотропных средах путем сравнения с результатами моделирования для установки, составленной из  $n$  горизонтальных электрических линий.

2. Выполнена верификация моделирования процессов становления поля и поля ВП для источника КЭД в среде, содержащей трехмерный "пластинчатый" объект, в котором чередуются пластинки с различной проводимостью. При этом при расчете рассмотренной геоэлектрической модели как анизотропной вычислительные затраты существенно ниже за счет возможности использования более грубых пространственных дискретизаций.

## **4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

### **4.1. Применение программного комплекса для решения задач поиска нефтегазовых залежей в условиях глубоководной части арктического бассейна**

Интерес к методам изучения строения земной коры арктического бассейна растет вместе с интересом к возможным богатейшим месторождениям полезных ископаемых в этом регионе. Специфика условий проведения соответствующих исследований (наличие мощного ледяного покрова и глубоководность большей части бассейна) накладывает свои ограничения как на арсенал возможных методов проведения геофизических исследований, так и на конкретные способы их реализации.

Одним из наиболее часто используемых методов электроразведки в Арктике является метод магнитотеллурических зондирований (МТЗ), когда соответствующая аппаратура размещается на льдах и обслуживается с использованием дрейфующих станций [57, 60, 74, 75, 97]. Однако метод МТЗ хотя и довольно удобен при геофизических исследованиях на дрейфующих льдах (поскольку его реализация с размещением аппаратуры на дрейфующей льдине не вызовет особых технических проблем), его разрешающая способность при определении структуры придонной части геоэлектрического разреза (на глубинах нескольких километров от морского дна) очень мала из-за огромного влияния высокопроводящей толщи морской воды. Кроме того, подтверждением трудностей при восстановлении среды по данным МТЗ в субарктической зоне могут служить результаты, приведенные в работе [63]. Поэтому МТ-данные можно использовать лишь для дополнительной проверки на корректность других данных, по которым может быть восстановлена геоэлектрическая структура придонной части среды (от самого дна до 5–7 км в глубину).

При очень большом интересе к электромагнитным зондированиям в морских условиях практически никто из исследователей не рассматривает возможностей, которые может предоставить дрейф льдов [61] для естественного



перемещения приемно-генераторной установки. Одна из возможных причин – определенные трудности, связанные с использованием традиционного для морской электроразведки источника в виде ГЭЛ. Кроме того, что этот источник вместе с приемными датчиками в условиях глубокого моря необходимо погружать на дно (и в этом случае ледяной покров может заметно усложнить соответствующую технологию), разрешающая способность ГЭЛ [51, 77-79] довольно невелика. Гораздо большей разрешающей способностью обладает другой традиционный источник – вертикальная электрическая линия (ВЭЛ) [65, 67, 70, 81], но при его использовании также есть трудности, связанные с возможным нарушением вертикальности электрической линии и недостаточностью мощности при уменьшении глубины моря. Поэтому особый интерес представляет источник в виде КЭД, который по разрешающей способности аналогичен ВЭЛ, но не имеет естественного ограничения по размеру (и, соответственно, мощности излучаемого поля) при изменяющейся глубине моря, а также более удобен в обслуживании, поскольку находится на поверхности льдины.

Наибольший интерес представляет оценка возможности с помощью рассматриваемой технологии определения наличия тонких локальных слабопроводящих объектов, в том числе с пониженным значением только вертикальной удельной проводимости, имитирующих нефтегазовые залежи. Для этого рассмотрим геоэлектрическую модель, план и разрез которой приведены на рисунке 4.1. Она представляет собой трехслойную горизонтально-слоистую среду с параметрами  $h_1 = 3000$  м,  $\sigma_1 = 3$  См/м (слой морской воды),  $h_2 = 4000$  м,  $\sigma_2 = 0.5$  См/м,  $h_3 = \infty$ ,  $\sigma_3 = 0.001$  См/м ( $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $\sigma_i$  – его удельная проводимость), содержащую объект с параметрами  $8 \times 10 \times 0.1$  км<sup>3</sup> на глубине 4000 м от поверхности моря. Электромагнитное поле возбуждается источником с радиусом 5 км.

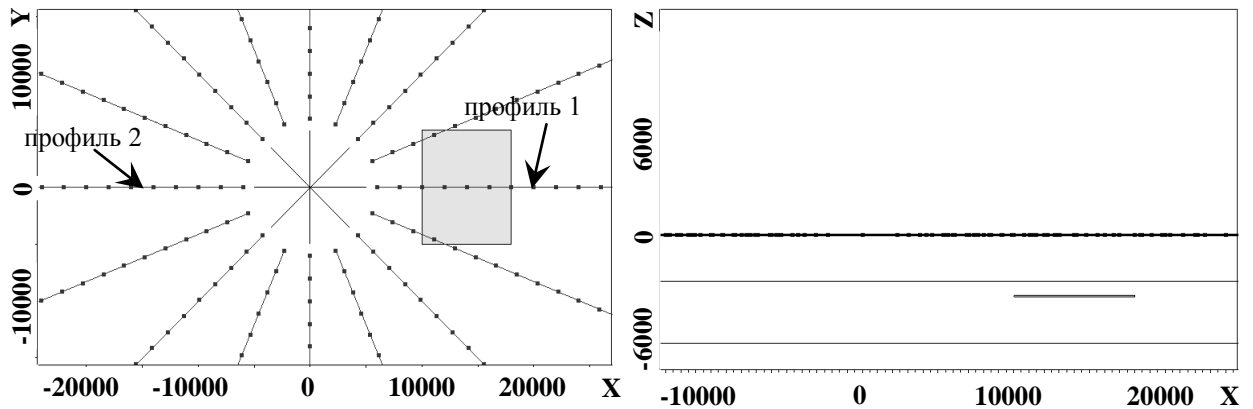


Рисунок 4.1 – План и разрез геоэлектрической модели слабопроводящего 3D-объекта, расположенного сбоку от источника и имитирующего нефтегазовую залежь в условиях арктического бассейна

При этом будем рассматривать три ситуации: изотропный объект с удельной проводимостью  $0.01 \text{ См/м}$ , анизотропный объект, у которого латеральная проводимость совпадает с проводимостью вмещающей среды, а вертикальная проводимость равна  $0.01 \text{ См/м}$ , и анизотропный объект с вертикальной проводимостью  $0.001 \text{ См/м}$ . Результаты расчетов для изотропной и двух анизотропных моделей в виде графиков сигналов в зависимости от разноса на приемных линиях по двум радиальным профилям (обозначенным на рисунке 4.1), нормированных на поле горизонтально-слоистой среды, приведены на рисунке 4.2а. Из приведенных результатов расчетов видно, что в рассматриваемой технологии при боковом (по отношению к источнику) расположении объекта при работе на постоянном токе и в области ранних времен на сигнал влияет только вертикальное сопротивление объекта.

Заметим также, что анизотропные объекты с отличным от вмещающей среды только вертикальным сопротивлением вообще не имеют аномалии в режиме становления поля. Соответствующие результаты приведены на рисунке 4.2б.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда объект (толщиной 0.2 км) расположен на глубине 5000 м от поверхности моря и часть его проекции попадает под источник. Результаты расчетов для изотропной и анизотропной (с значением вертикальной проводимости 0.01 См/м) моделей в виде графиков сигналов в зависимости от разноса на приемных линиях по радиальному профилю (обозначенному на рисунке 4.3), нормированных на поле горизонтально-слоистой среды, приведены на рисунке 4.4.

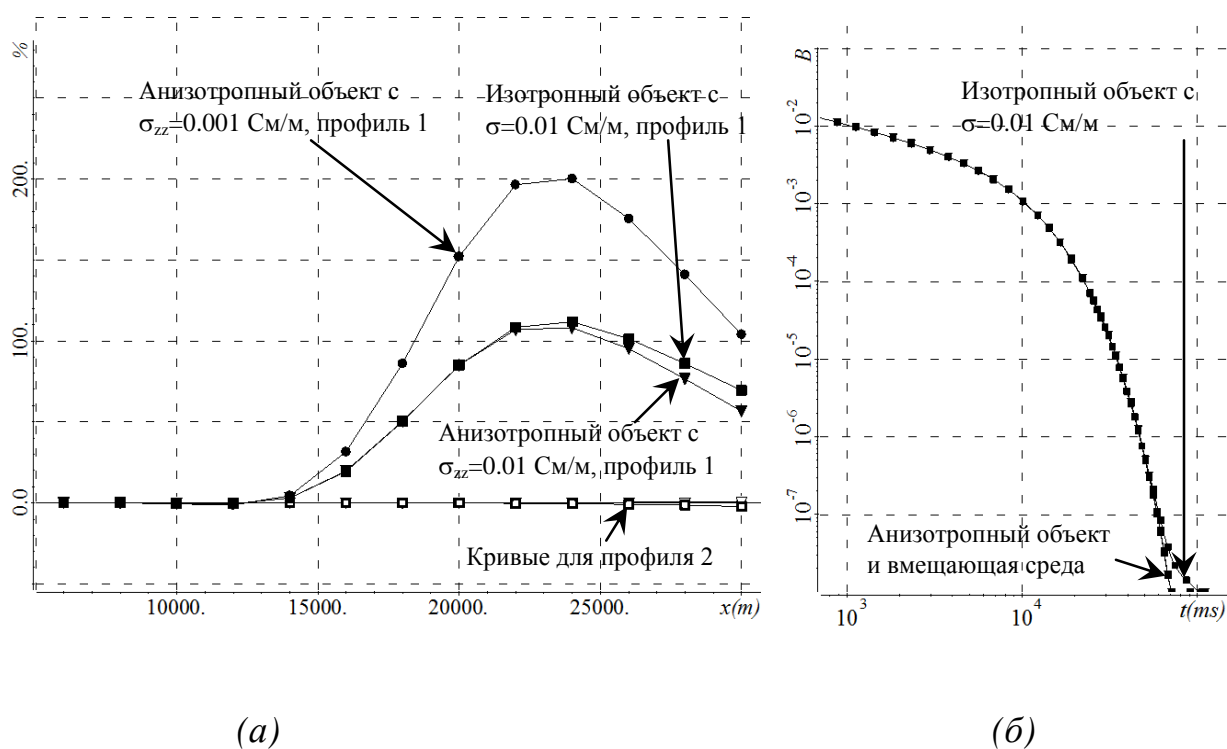


Рисунок 4.2 – Графики нормированных сигналов на приемных линиях по двум радиальным профилям в зависимости от разноса в момент времени 1 с (а), и графики зависимости сигналов от времени на приемной линии с разносом 8 км (б), рассчитанные для изотропной и анизотропных трехмерных моделей, показанных на рисунке 4.1

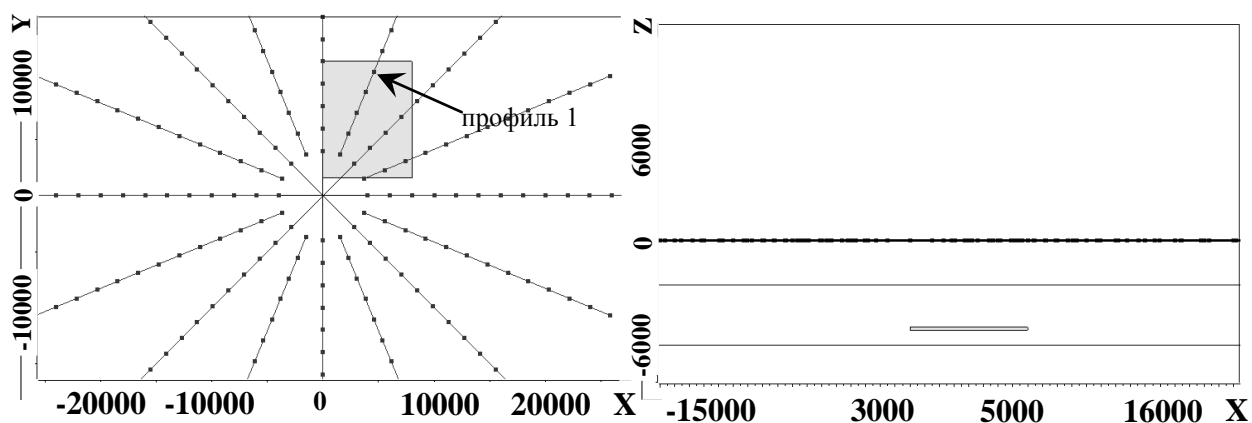


Рисунок 4.3 – План и разрез геоэлектрической модели слабопроводящего 3D-объекта, часть проекции которого попадает под источник и имитирующего нефтегазовую залежь в условиях арктического бассейна

Из приведенных на рисунке 4.4 результатов видно, что для разносов порядка 16 км сигналы для изотропной и анизотропной моделей совпадают, а для больших разносов начинают очень существенно отличаться.

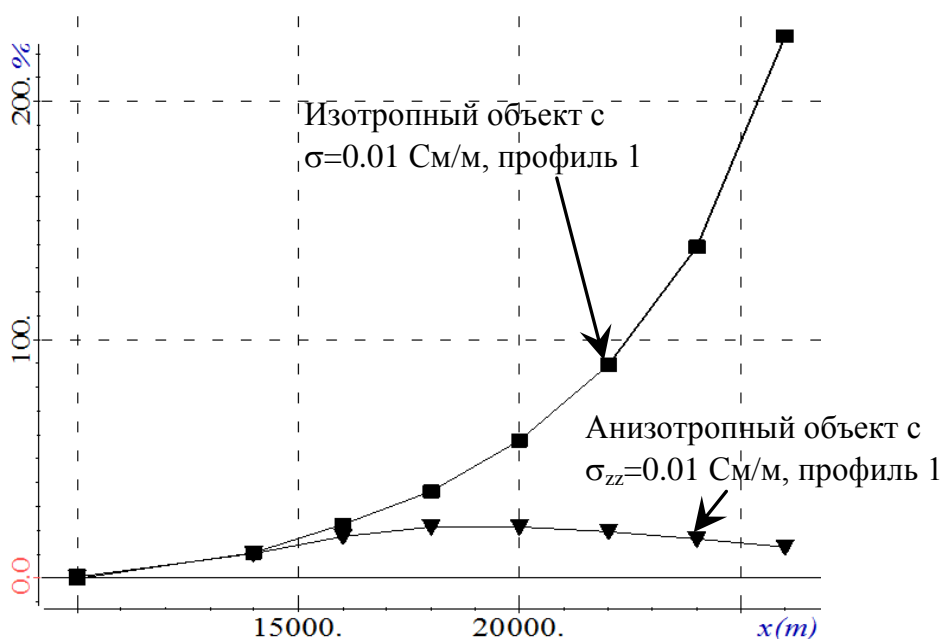


Рисунок 4.4 – Графики нормированных сигналов на приемных линиях по пересекающему объект радиальному профилю в зависимости от разноса в момент времени 1 с (а), и графики зависимости сигналов от времени на приемной линии с разносом 8 км (б), рассчитанные для изотропной и анизотропной трехмерных моделей, показанных на рисунке 4.3

В целом, полученные результаты свидетельствуют о том, что локальные 3D-объекты, у которых существенно пониженной является только вертикальная удельная проводимость, дают существенный вклад в измеряемый сигнал и могут быть достаточно уверенно определены при использовании для геоэлектромагнитного картирования рассматриваемой технологии с источником в виде КЭД. При этом отклики от изотропных и анизотропных объектов существенно различаются в области поздних времен (нестационарный режим) и на больших разносах при измерении сигналов на постоянном токе и в области ранних времен.

Оба этих фактора создают очень хорошие предпосылки использования данной технологии для обнаружения нефтегазовых объектов, особенно в глубоководной части арктического бассейна. Заметим, что в таких условиях стандартные электроразведочные технологии с горизонтальной электрической линией или магнитотеллурические зондирования не позволяют не только разделять объекты с изотропной и анизотропной проводимостью, но и в принципе определять их наличие на тех же глубинах в изучаемой среде.

#### **4.2. Применение программного комплекса для решения задач в условиях шельфовой зоны арктического бассейна**

В настоящее время при поиске и разведке углеводородов в морской электроразведке наибольшее распространение получила электромагнитная технология с буксируемым источником (наиболее известная под аббревиатурой CSEM) [43, 53-55, 62, 66, 72, 76 - 80, 86-88, 90, 91, 94, 100, 101, 103]. При этом в качестве измерителей чаще всего используются донные станции [64], а корабль буксирует за собой источник. Эта технология основана на быстром затухании поля в проводящей среде и ориентирована на поиск слабопроводящих объектов.

Однако, в условиях шельфа достаточно активно начинает применяться другая технология, которая реализуется путем буксирования генераторной и

приемных линий на некоторой глубине, максимально возможно близкой ко дну, и при этом импульс в генераторной линии имеет вид "ток"—"пауза"—"ток (с обратным знаком) – "пауза". Измерения на приемных линиях выполняются как при включенном токе (непосредственно перед выключением, когда ток в линии уже установился), так и в паузе (после выключения тока). В результате на приемных линиях измеряется сигнал, включающий в себя как процессы становления поля (по которым можно восстанавливать электрическую проводимость среды), так и процессы ВП – по которым можно восстанавливать поляризационные характеристики среды [41, 45, 46, 58, 59, 99]. Источник в виде ГЭЛ является очень технологичным источником для проведения морских исследований благодаря простоте его перемещения и, соответственно, возможностям обследования больших площадей с относительно небольшими затратами. Однако аномалии ВП на фоне процессов становления поля для ГЭЛ могут быть довольно слабыми, поскольку среды являются очень проводящими. В этой ситуации представляет интерес источник в виде КЭД, который предлагается использовать для заверки ранее полученных с помощью ГЭЛ аномалий.

Рассмотрим геоэлектрическую модель, приведенную на рисунке. 4.5. Она представляет собой восьмислойную горизонтально-слоистую среду (параметры которой приведены в таблице 4.1), содержащую два трехмерных объекта. Первый объект с размерами  $3 \times 2 \times 0.27 \text{ км}^3$  и удельным сопротивлением  $\rho = 1.33 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  расположен в третьем слое. Вторым объектом с размерами  $0.6 \times 2 \times 0.02 \text{ км}^3$  и удельным сопротивлением  $\rho = 2 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  расположен во втором слое. При этом будем рассматривать две геоэлектрические модели. В одной модели первый объект обладает повышенной относительно вмещающей среды поляризуемостью –  $\alpha = 15.7 \%$ ,  $T_0 = 0.5$  (эту модель будем называть модель 1). В другой модели параметры поляризации первого объекта совпадают с параметрами содержащего его слоя (эту модель будем называть модель 2). В обеих моделях параметры поляризации второго объекта совпадают с параметрами второго слоя.

Таблица 4.1 – Параметры среды

$i$	$h_i, \text{м}$	$\rho_i, \text{Ом}\cdot\text{м}$	$\alpha_i, \%$	$T_0$
1	70	0.26	0	0.01
2	150	3	4	0.05
3	270	1.5	7	0.5
4	1550	2.7	5	2
5	385	1.7	0	0.01
6	1080	4	0	0.01
7	2000	1000	0	0.01
8	$\infty$	1010	0	0.01

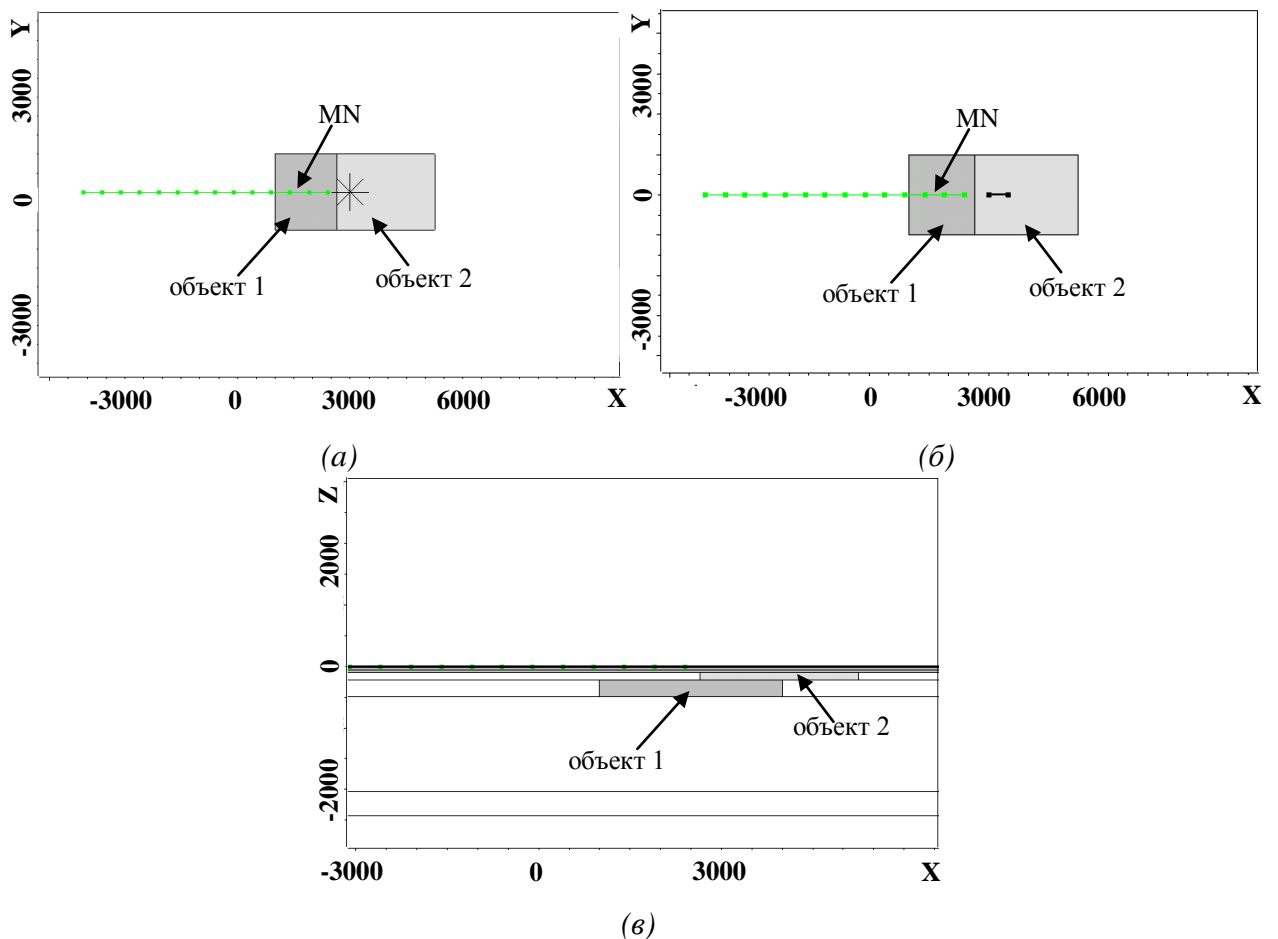


Рисунок 4.5 – План (а, б) и разрез (в) геоэлектрической модели, содержащей два трехмерных объекта, при возбуждении электромагнитного поля источником в виде КЭД (а) и источником в виде ГЭЛ (б)

Электромагнитное поле возбуждается источником КЭД с радиусом 500 м с центром в точке (3000, 0, 0). Сравним поле КЭД с полем, возбуждаемым источником ГЭЛ с координатами А(3000, 0, 0) и В(3500, 0, 0).

На рисунке 4.6 приведены графики сигналов на приемной линии MN (расположение которой показано на рисунке 4.5) без учета влияния процессов ВП и с учетом влияния ВП для источников КЭД и ГЭЛ.

Из приведенных на рисунке 4.6 графиков видно, что влияние сигналов ВП на фоне становления поля для источника КЭД довольно существенно в отличие от ГЭЛ.

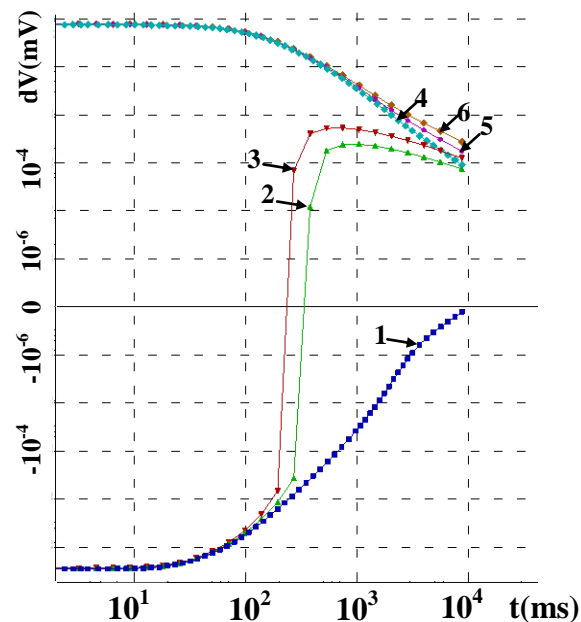


Рисунок 4.6 – Графики сигналов на приемной линии MN

Шифр кривых: при возбуждении поля источником в виде КЭД:

1 – становление поля, 2 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 2,

3 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 1;

при возбуждении поля источником в виде ГЭЛ:

4 – становление поля, 5 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 2,

6 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 1



Далее рассмотрим две геоэлектрические модели (модели 3 и 4), отличающиеся от моделей 1 и 2 тем, что расстояние от поверхности моря до дна увеличено с 70 м до 270 м. Графики сигналов на приемных линиях MN без учета влияния процессов ВП и с учетом влияния ВП для источника КЭД и ГЭЛ приведены на рисунке 4.7.

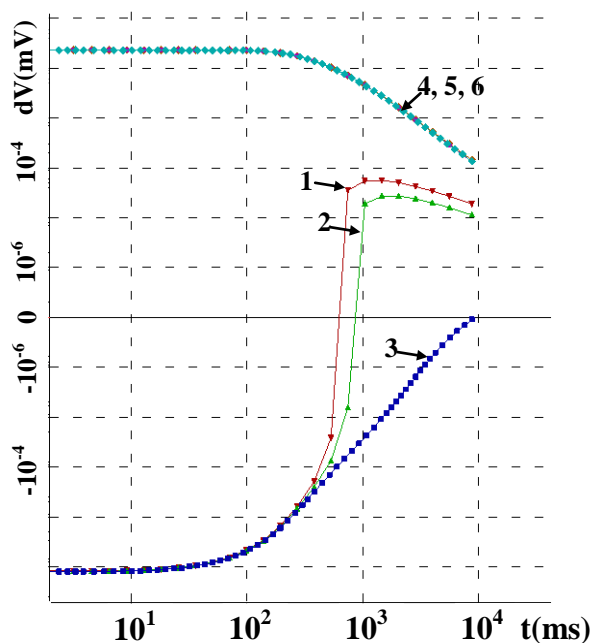


Рисунок 4.7 – Графики сигналов на приемной линии MN

Шифр кривых: при возбуждении поля источником в виде КЭД:

- 1 – становление поля, 2 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 4,  
3 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 3;

при возбуждении поля источником в виде ГЭЛ:

- 4 – становление поля, 5 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 4,  
6 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 3

Из приведенных на рисунке 4.7 графиков видно, что при увеличении глубины моря влияние поля ВП для источника КЭД остается существенным, в то время как для ГЭЛ влияние ВП практически отсутствует.

Для моделей 3 и 4 поместим источник поля на дно, также переместив на дно и приемную линию. Результаты расчетов в приемной линии MN представлены на рисунке 4.8.

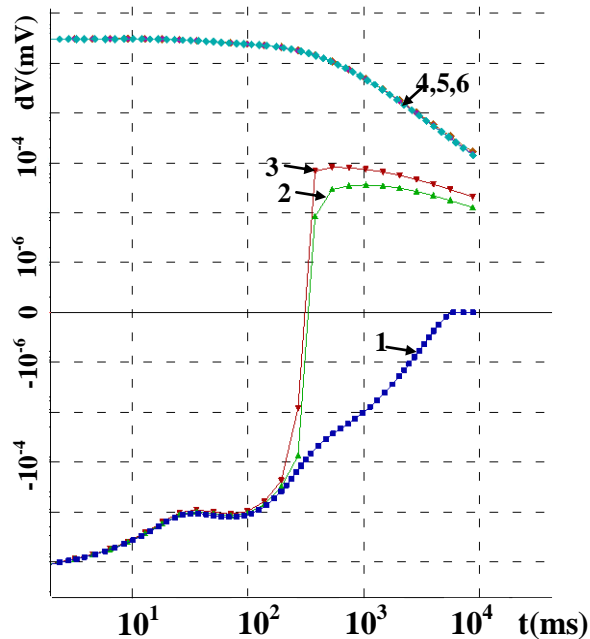


Рисунок 4.8 – Графики сигналов на приемной линии MN при расположении источника на дне моря

Шифр кривых: при возбуждении поля источником в виде КЭД:

1 – становление поля, 2 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 4,  
3 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 3;

при возбуждении поля источником в виде ГЭЛ:

4 – становление поля, 5 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 4,  
6 – суммарное поле (становление поля и ВП) для модели 3

В целом, можно сделать вывод, что влияние сигналов ВП довольно существенно для источника КЭД по сравнению с полем, возбуждаемым источником ГЭЛ. И это влияние сохраняется при увеличении глубины залегания объекта. Таким образом, полученные результаты создают очень хорошие предпосылки использования данной технологии для поиска объектов в шельфовой зоне арктического бассейна.

### 4.3. Мониторинг водонефтяного контакта на основе измерений электромагнитного поля КЭД

Оценим возможность решения задачи мониторинга водонефтяного контакта на основе измерений электрического поля, возбуждаемого круговым электрическим диполем. При этом рассмотрим как ситуацию, когда верхняя часть разреза представляет собой горизонтально-слоистую модель, так и ситуацию, когда верхняя часть разреза содержит трехмерные неоднородности. Соответствующие геоэлектрические модели приведены на рисунке 4.9.

Вначале рассмотрим геоэлектрическую модель, приведенную на рисунке 4.9а. Она представляет собой пятислойную горизонтально-слоистую среду, параметры которой приведены в таблице 4.2. В четвертый проводящий тридцатиметровый слой помещен целевой объект, который представляет собой набор из пятнадцати слабопроводящих ( $\rho=1000$  Ом·м) пластинок толщиной 1 м, разделенных проводящими слоями ( $\rho=1$  Ом·м) такой же толщины. Радиус КЭД выберем равным 1000 м, длину приемных линий MN – равной 400 м, а ток  $I^S$  в КЭД – 160 А.

Будем перемещать правую границу объекта в направлении источника, как это показано на рисунке 4.9. Оценим уровень влияния на измеряемый сигнал перемещения границы целевого объекта и уровень влияния процессов ВП.

Таблица 4.2 – Параметры среды

$i$	$h_i$ , м	$\rho_i$ , Ом·м
1	500	150
2	500	25
3	500	200
4	30	1
5	$\infty$	150

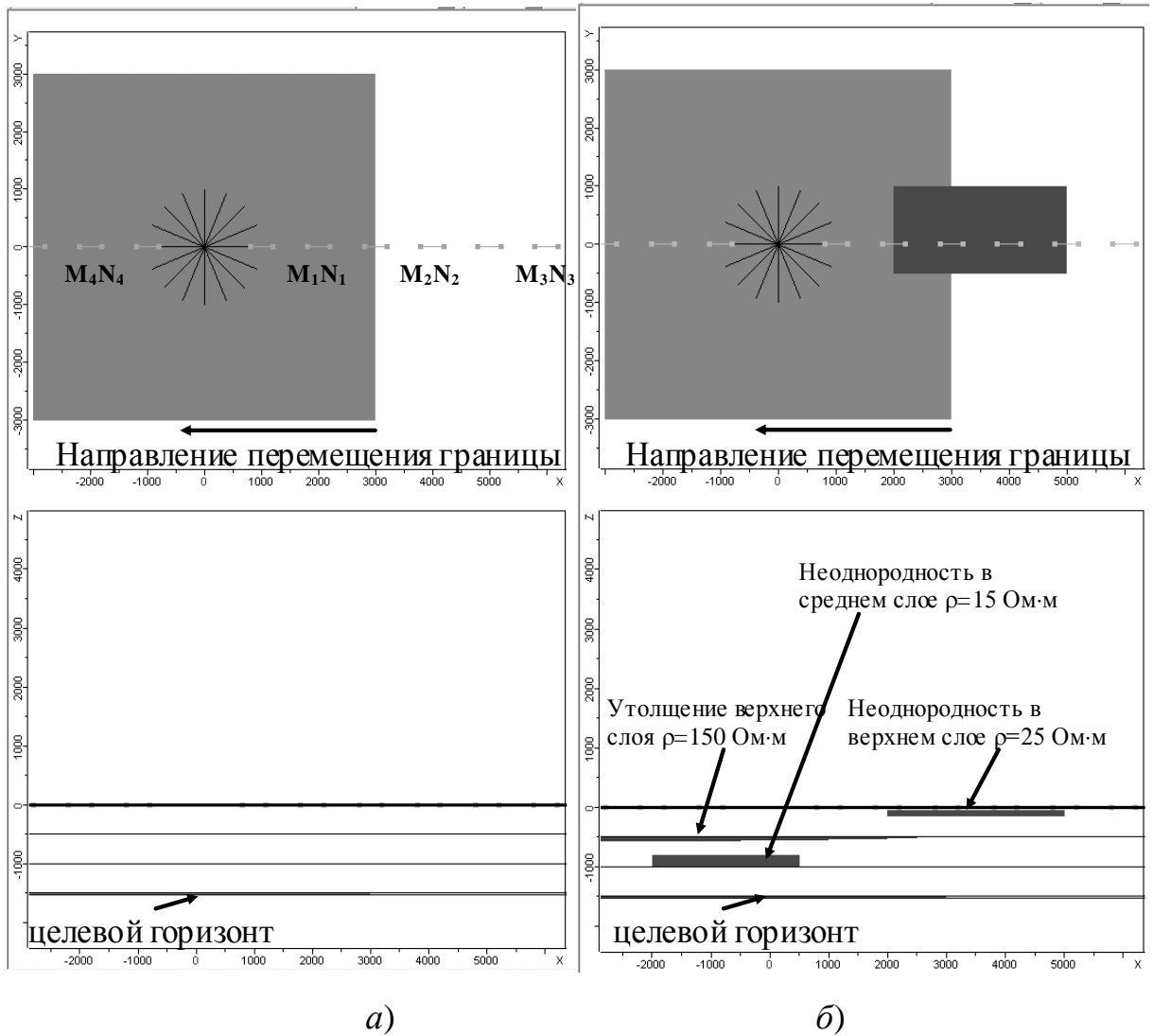


Рисунок 4.9 – Геоэлектрические модели: а) модель 1; б) модель 2

На рисунках 4.10 - 4.12 приведены графики сигналов на приемных линиях  $M_1N_1 - M_3N_3$  (расположение которых показано на рисунке 4.9а), удаленных от центра КЭД на расстояние 2000 м, 4000 м и 6000 м для геоэлектрической модели 1 (рисунок 4.9а) без учета влияния процессов ВП (рисунки 4.10а, 4.11а, 4.12а) и с учетом влияния ВП (рисунки 4.10б, 4.11б, 4.12б). При этом параметр начальной поляризации  $\alpha$  был взят равным 0.03 (3%), спад определялся формулой Комарова [8], в которой параметр  $T_0$  был взят равным 0.03, а  $B$  – равным 100.

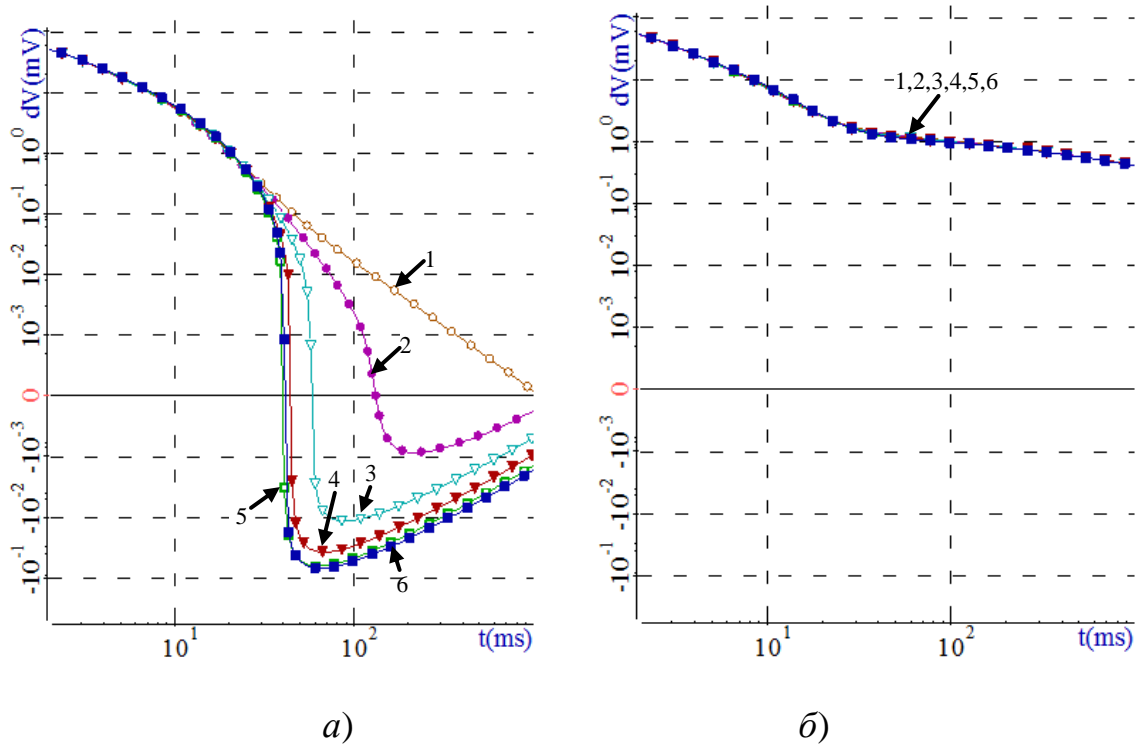


Рисунок 4.10 – Графики сигналов на приемной линии  $M_1N_1$  (расстояние от центра КЭД 2000 м) для геоэлектрической модели 1 без учета ВП (а) и с учетом ВП (б) шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД)

Из приведенных на рисунке 4.10 графиков видно, что на ближайшей из рассматриваемых линий  $M_1N_1$  (удаленной от центра КЭД на 2000 м) уровень ВП настолько высок, что изменений в измеряемом сигнале при перемещении границы практически не видно (рисунок 4.10б), хотя без учета ВП это влияние (в становлении поля) является довольно сильным (рисунок 4.10а).

В приемных же линиях, удаленных от центра КЭД на 4000 м и 6000 м, хотя влияние ВП остается довольно ощутимым, но все же изменения в суммарном сигнале при перемещении границы уже хорошо различимы даже на фоне процессов ВП (рисунки 4.11б и 4.12б).

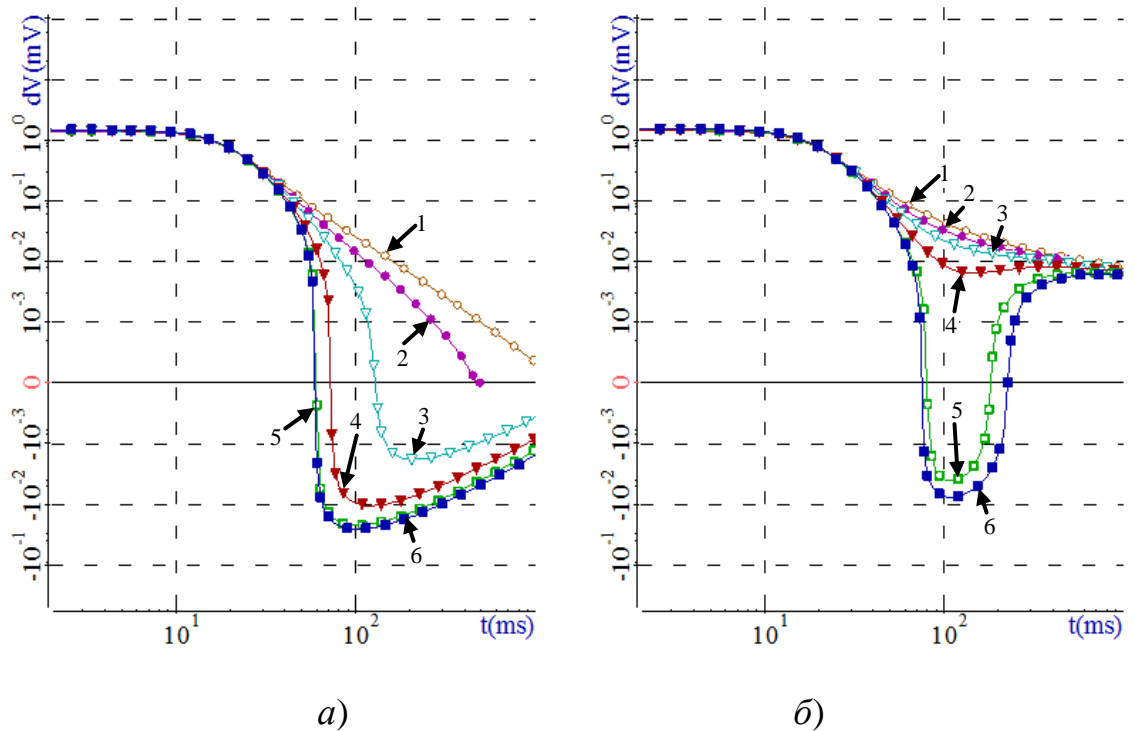


Рисунок 4.11 – Графики сигналов на приемной линии  $M_2N_2$  (расстояние от центра КЭД 4000 м) для геоэлектрической модели 1 без учета ВП (а) и с учетом ВП (б) шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД)

На рисунках 4.10 – 4.12 приведены графики сигналов для ситуации, когда граница перемещалась вдоль оси  $x$  от 3000 м до 0 м (см. рисунок 4.9 – значение  $x=0$  соответствует геоэлектрической модели, в которой правая (перемещаемая) граница объекта находится над центром КЭД). Из рисунков 4.10 – 4.12 видно, что аномальное поле от целевого объекта имеет отрицательный знак на рассматриваемых приемных линиях, и поэтому при приближении границы к центру КЭД сигнал постепенно уменьшается и даже меняет знак.

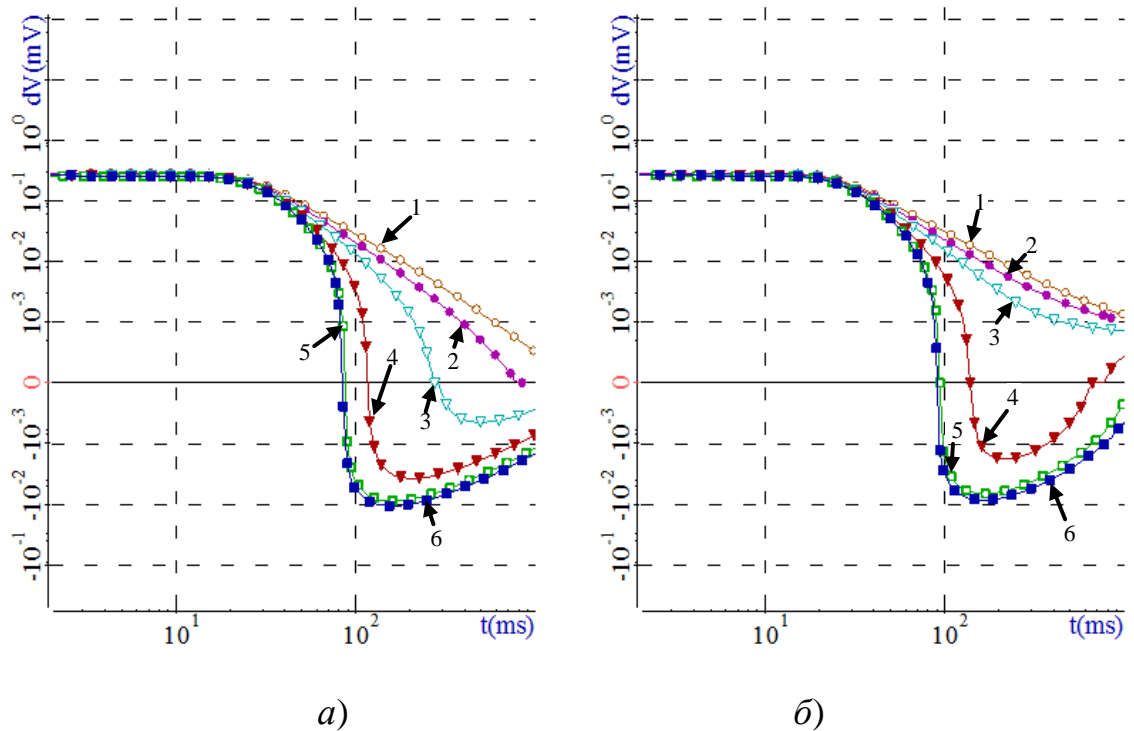


Рисунок 4.12 – Графики сигналов на приемной линии  $M_3N_3$  (расстояние от центра КЭД 6000 м) для геоэлектрической модели 1 без учета ВП (а) и с учетом ВП (б) шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД)

Максимум аномалии соответствует ситуации, когда центр КЭД находится непосредственно над границей объекта. При дальнейшем перемещении границы от центра КЭД влево (т.е. когда объект полностью находится с левой стороны от центра КЭД) аномалия уменьшается, и сигнал снова начинает расти. Соответствующие графики приведены на рисунке 4.13.

На рисунке 4.14 приведены графики на симметрично расположенной к  $M_2N_2$  линии MN (т.е. удаленной на 4000 м в левую сторону от объекта). Из рисунка 4.14 видно, что на этой приемной линии аномальное поле от целевого объекта другого знака (по сравнению с  $M_2N_2$ ), и поэтому при приближении  $x$ -координаты границы целевого объекта к центру КЭД сигнал постепенно увеличивается. Максимум аномалии также соответствует ситуации, когда центр КЭД находится над перемещаемой границей объекта. При дальнейшем перемещении границы от

центра КЭД (т.е. когда объект полностью находится с левой стороны от центра КЭД) аномалия уменьшается, и сигнал приближается к уровню нормального поля.

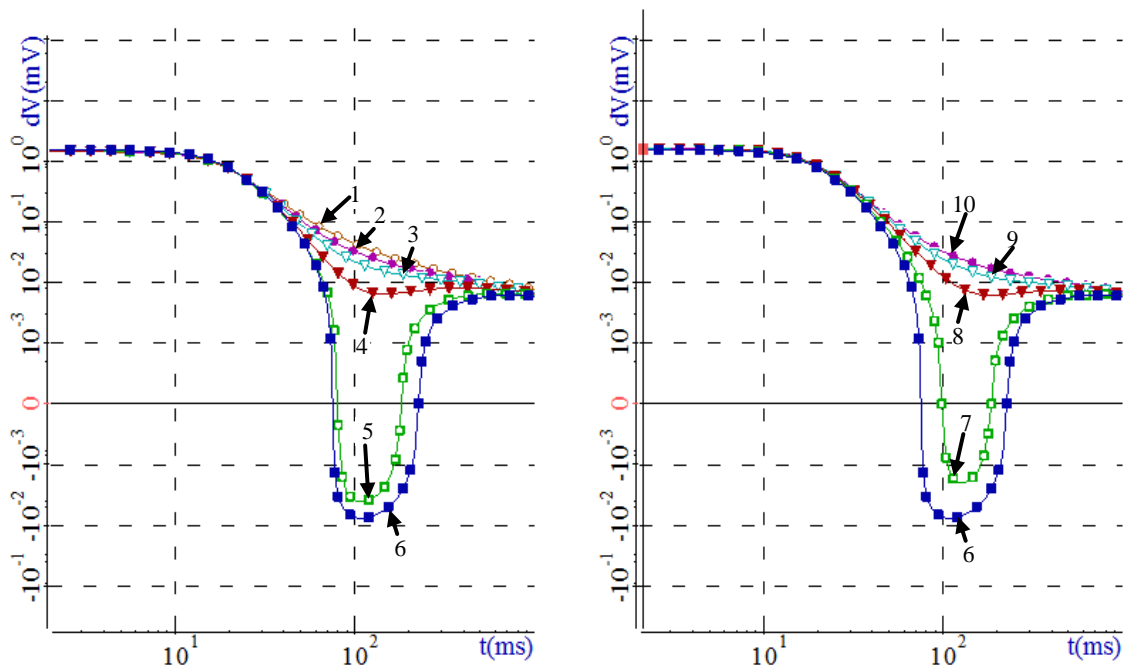


Рисунок 4.13 – Графики сигналов на приемной линии  $M_2N_2$  для геоэлектрической модели 1

шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД), 7 – -500 м, 8 – -1000 м, 9 – -1500 м, 10 – -2000 м

Из рисунков 4.13 и 4.14 видно, что ситуации, когда граница объекта приближается к центру КЭД (когда объект расположен по обе стороны от центра КЭД) и когда граница объекта удаляется от центра КЭД (когда объект полностью расположен с одной стороны от центра КЭД), практически симметричны. Поэтому чтобы определить, расположен объект под КЭД или он лежит с одной стороны от его центра, нужны измерения при другом положении источника.



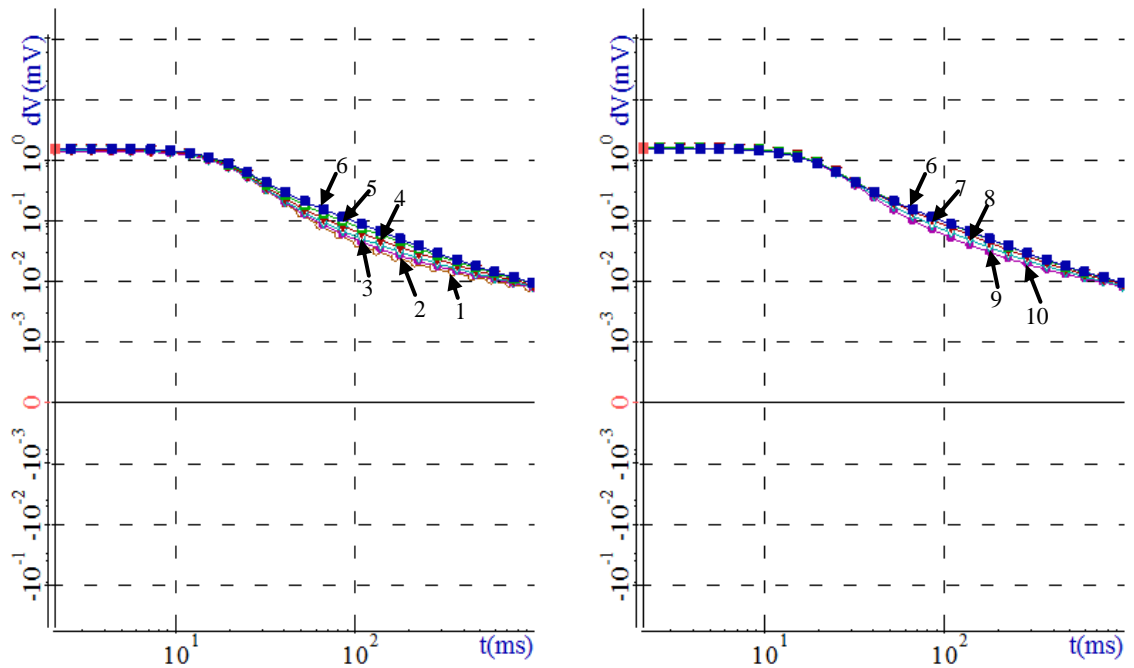


Рисунок 4.14 – Графики сигналов на приемной линии, удаленной на 4000 м влево от центра КЭД, для геоэлектрической модели 1  
 шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД), 7 – -500 м, 8 – -1000 м, 9 – -1500 м, 10 – -2000 м

Рассмотрим теперь геоэлектрическую модель, которая содержит в верхней части разреза трехмерные неоднородности. Эта геоэлектрическая модель приведена на рисунке 4.9б. Результаты расчетов для этой модели на приемной линии  $M_2N_2$ , удаленной вправо от центра КЭД на 4000 м, приведены на рисунке 4.15.

Из рисунка 4.15 видно, что тенденция уменьшения суммарного сигнала с приближением границы к центру КЭД сохраняется, но относительные изменения в суммарном сигнале при перемещении границы целевого объекта в этом случае становятся заметно меньшими по сравнению с ситуацией, когда верхняя часть разреза является однородной по латерали.

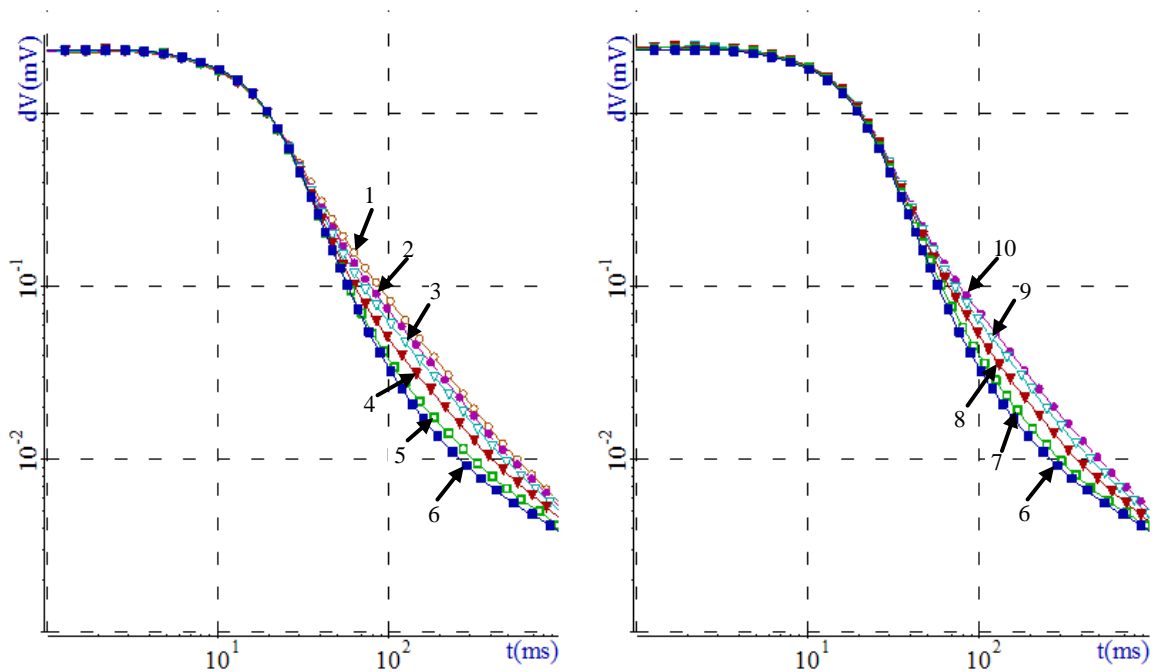


Рисунок 4.15 – Графики сигналов на приемной линии  $M_2N_2$  для геoeлектрической модели 2

шифр кривых соответствует уровню перемещению границы целевого объекта: 1 – граница объекта на 3000 м, 2 – 2000 м, 3 – 1500 м, 4 – 1000 м, 5 – 500 м, 6 – 0 (край объекта совпадает с центром КЭД), 7 – -500 м, 8 – -1000 м, 9 – -1500 м, 10 – -2000 м

Проведенные исследования для мониторинговых задач показали, что даже в среде с неоднородной верхней частью существует возможность слежения за перемещением границы водонефтяного контакта по измерениям электрических компонент поля от кругового электрического диполя. Тем не менее, в трехмерных средах с существенно неоднородной верхней частью, аномалия от перемещения границы может быть довольно слабой, и в этом случае измерения необходимо проводить с особой тщательностью, а при возможности использования скважины на исследуемом участке может оказаться более эффективным использование источника в виде вертикальной электрической линии или заземления КЭД на устье обсадной колонны труб. Очевидно, эти вопросы требуют дальнейших исследований.

#### 4.4. Оценка влияния анизотропии по коэффициенту начальной поляризации на получаемый сигнал ВП

В данной работе рассматривались ситуации возможной анизотропии трехмерной среды по параметру удельной электрической проводимости. Далее оценим, как анизотропный коэффициент начальной поляризации влияет на уровень сигнала ВП. Для этого рассмотрим следующую геоэлектрическую модель. В трехслойную горизонтально-слоистую среду поместим объект с размерами  $8 \times 10 \times 0.1 \text{ км}^3$  на глубину 4000 м. Объект состоит из пластинок с чередующимся коэффициентом начальной поляризации и одинаковым коэффициентом удельной электрической проводимости. На рисунке 4.16 приведен план и разрез геоэлектрической модели. Параметры среды приведены в таблице 4.3, а параметры пластинок – в таблице 4.4, где  $\sigma_i = 1 / \rho_i$ .

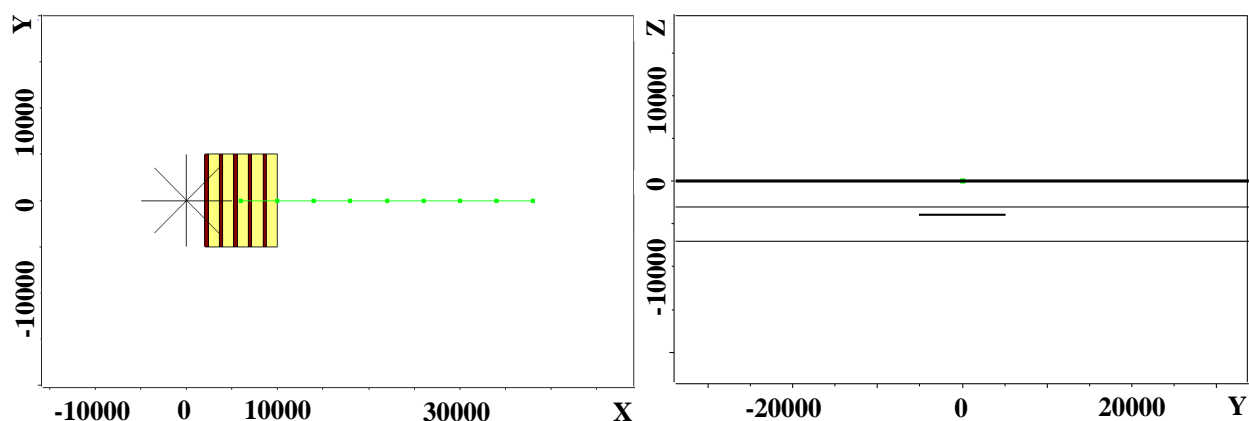


Рисунок 4.16 – План и разрез геоэлектрической модели (пластинки расположены вдоль оси X)

Будем также рассматривать "сплошную" модель. Эта модель аналогична модели с "пластинчатым" объектом, за исключением того, что пластинки объекта, помещенного в среду, имеют одинаковые коэффициенты начальной поляризации и удельной проводимости. Параметры пластинок приведены в таблице 4.5. При этом коэффициент начальной поляризации для каждой пластинки модели со "сплошным" объектом рассчитывается следующим образом:

$$\alpha = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \alpha_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \alpha_2.$$

Электромагнитное поле возбуждается источником с радиусом 5 км. Координаты приемных линий приведены в таблице 4.6. Сравним сигналы ВП в приемных линиях (расположение которых показанных на рисунке 4.16) для "пластинчатой" модели и модели со "сплошным" объектом.

Таблица 4.3 – Параметры среды

$i$	$h_i, \text{ м}$	$\rho_i, \text{ Ом}\cdot\text{м}$	$\alpha_i, \%$	$T_0$
1	3000	0.3	1	0.01
2	4000	2	1	0.01
3	$\infty$	1000	0	0.01

Таблица 4.4 – Параметры пластинок, расположенных вдоль оси X ("пластинчатая" модель)

$i$	$l_i, \text{ м}$	$\rho_i, \text{ Ом}\cdot\text{м}$	$\alpha_i, \%$	$T_0$
1	400	0.2	2	0.01
2	1200	0.2	8	0.01

Таблица 4.5 – Параметры пластинок, расположенных вдоль оси X ("сплошная" модель)

$i$	$l_i, \text{ м}$	$\rho_i, \text{ Ом}\cdot\text{м}$	$\alpha_i, \%$	$T_0$
1	400	0.2	6.5	0.01
2	1200	0.2	6.5	0.01

Кроме того, рассмотрим еще две геоэлектрические модели, пластинки в которых расположены вдоль осей Y (рисунок 4.17) и Z (рисунок 4.18).

Коэффициенты начальной поляризации пластинок выберем такие же, как и при расположении пластинок вдоль оси X.

Таблица 4.6 – Координаты приемных линий

$MN_1$	(6000, 0, 0)	(10000, 0, 0)
$MN_2$	(10000, 0, 0)	(14000, 0, 0)
$MN_3$	(14000, 0, 0)	(18000, 0, 0)
$MN_4$	(18000, 0, 0)	(22000, 0, 0)
$MN_5$	(22000, 0, 0)	(26000, 0, 0)
$MN_6$	(26000, 0, 0)	(30000, 0, 0)
$MN_7$	(30000, 0, 0)	(34000, 0, 0)
$MN_8$	(34000, 0, 0)	(38000, 0, 0)

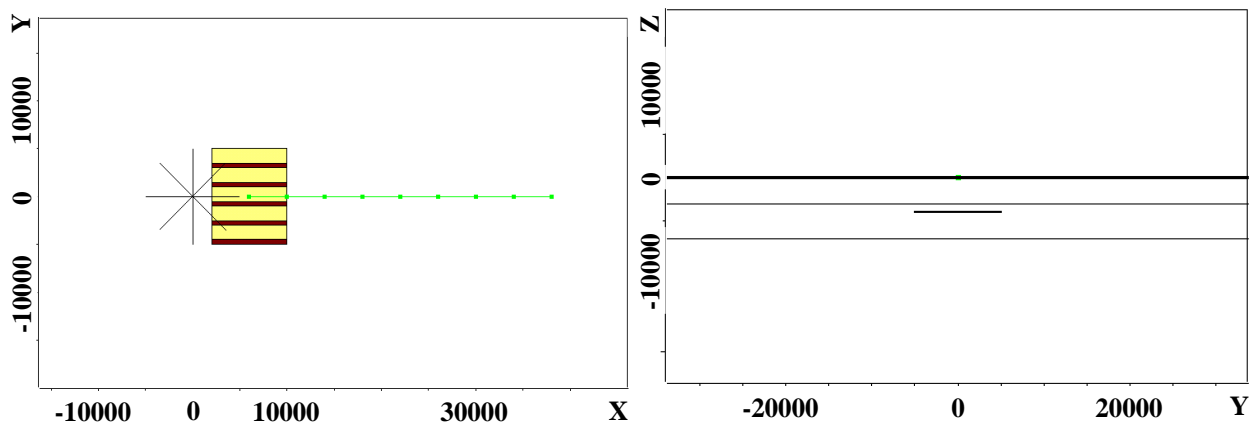


Рисунок 4.17 – План и разрез геоэлектрической модели (пластинки расположены вдоль оси Y)

Результаты расчетов на приемных линиях  $MN_1 - MN_8$  для "сплошных" и "пластинчатых" объектов представлены в таблицах 4.7 – 4.9. Из данных, приведенных в таблицах 4.7 – 4.9, видно, что во всех рассматриваемых приемных линиях результаты расчетов для "пластинчатых" и "сплошных" моделей

совпадают, и отличие "сплошного" от анизотропного ("пластинчатого") объекта не превышает 1%.

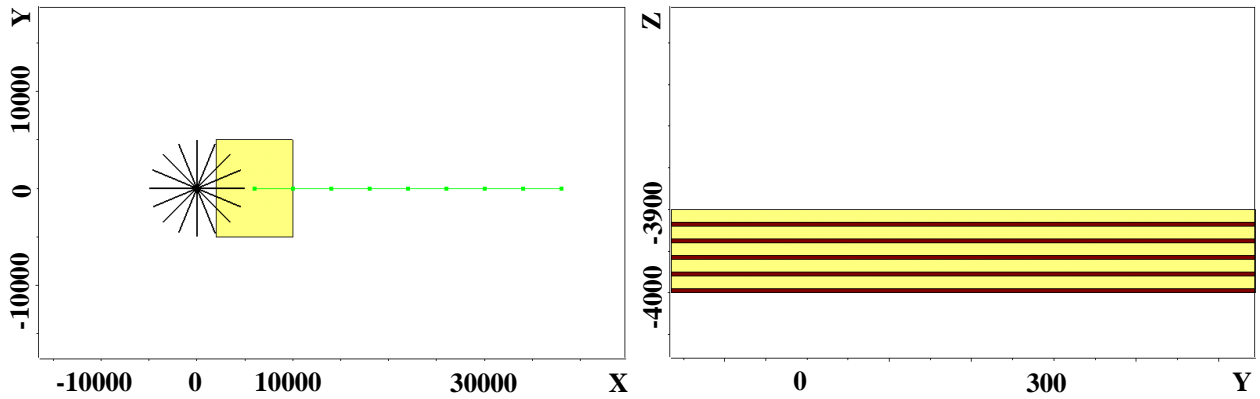


Рисунок 4.18 – План и разрез геоэлектрической модели (пластинки расположены вдоль оси Z)

Таблица 4.7 – Разность потенциалов на приемных линиях для модели, приведенной на рисунке 4.16

	Сплошной объект, мВ	"Пластинчатый" объект, мВ	Разница, %
$MN_1$	1.43038e-003	1.43024e-003	0.01
$MN_2$	4.845297e-005	4.85915e-005	0.29
$MN_3$	2.14415e-006	2.13895e-006	0.24
$MN_4$	-2.10916e-006	-2.105e-006	0.2
$MN_5$	-2.02515e-006	-2.019995e-006	0.26
$MN_6$	-1.56365e-006	-1.55425e-006	0.6
$MN_7$	-1.19209e-006	-1.18673e-006	0.45
$MN_8$	-9.3432e-007	-9.22065e-007	1

Таблица 4.8 – Разность потенциалов на приемных линиях для модели, приведенной на рисунке 4.17

	Сплошной объект, мВ	"Пластинчатый" объект, мВ	Разница, %
$MN_1$	1.43038-003	1.43026e-003	0.008
$MN_2$	4.845297e-005	4.84407e-005	0.18
$MN_3$	2.14415e-006	2.1392e-006	0.23
$MN_4$	-2.10916e-006	-2.11482e-006	0.26
$MN_5$	-2.02515e-006	-2.02854e-006	0.16
$MN_6$	-1.56365e-006	-1.56585e-006	0.14
$MN_7$	-1.19209e-006	-1.19364e-006	0.12
$MN_8$	-9.3432e-007	-9.35344e-007	0.1

Таблица 4.9 – Разность потенциалов на приемных линиях для модели, приведенной на рисунке 4.18

	Сплошной объект, мВ	"Пластинчатый" объект, мВ	Разница, %
$MN_1$	1.43038-003	1.43046e-003	0.01
$MN_2$	4.845297e-005	4.86088e-005	0.32
$MN_3$	2.14415e-006	2.1248e-006	0.91
$MN_4$	-2.10916e-006	-2.09997e-006	0.44
$MN_5$	-2.02515e-006	-2.00031e-006	0.29
$MN_6$	-1.56365e-006	-1.55404e-006	0.62
$MN_7$	-1.19209e-006	-1.18765e-006	0.37
$MN_8$	-9.3432e-007	-9.32648e-007	0.18

Таким образом, можно сделать вывод, что нет необходимости разрабатывать математические модели для учета анизотропности трехмерных объектов по коэффициенту начальной поляризации. Значение же поляризации объекта в этом случае следует брать пропорционально объему поляризуемого вещества.

#### 4.5. Выводы

1. Показана возможность использования источника КЭД и его преимущества для обнаружения нефтегазовых объектов, особенно в глубоководной части арктического бассейна.

2. Проведенные исследования для мониторинговых задач показали, что даже в среде с неоднородной верхней частью существует возможность слежения за перемещением границы водонефтяного контакта по измерениям электрических компонент поля от кругового электрического диполя.

3. Рассмотрено влияние анизотропии по параметру начальной поляризации при расчете поля ВП в среде, содержащей "пластинчатые" объекты. Показано, что нет необходимости в разработке математических моделей, учитывающих анизотропный коэффициент начальной поляризации, а значения поляризации соответствующих объектов в этих случаях следует брать пропорционально объему поляризуемого вещества.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных в диссертационной работе вычислительных экспериментов состоят в следующем.

1. Разработаны методы и вычислительные схемы конечноэлементного моделирования трехмерных стационарных и нестационарных геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых источником в виде КЭД в анизотропных средах. Проведена верификация вычислительных схем путем сравнения решений, полученных для анизотропных и "пластинчатых" (представляющих собой множество изотропных объектов) моделей.

2. Разработаны методы и вычислительные схемы 3D-моделирования полей вызванной поляризации, возбуждаемых источником КЭД в изотропных и анизотропных средах. Проведена верификация разработанных вычислительных схем на "пластинчатой" и анизотропной модели, а также проведено сравнение результатов расчета для идеального КЭД с результатами расчетов, полученных в виде суммы полей от ГЭЛ. Результаты верификации не только подтвердили правильность выполненных программных реализаций, но и показали вычислительные преимущества разработанных методов моделирования.

3. Разработанные вычислительные схемы реализованы в программном комплексе CED-MAR, который позволяет выполнять 3D-моделирование геоэлектромагнитных полей кругового электрического диполя в задачах морской электроразведки и при этом дает возможность учитывать анизотропию среды по параметру удельной проводимости и влияние процессов вызванной поляризации.

4. Показано, что при моделировании полей вызванной поляризации для источника в виде КЭД в анизотропных трехмерных средах учитывать нужно только анизотропию проводимости. Вместо учета анизотропии коэффициента начальной поляризации нужно учитывать объем поляризующейся среды.

5. Разработанный программный комплекс применялся для решения задач морской электроразведки в условиях арктического бассейна. Показаны возможности и преимущества технологии, использующей в качестве источника

КЭД для поиска нефтегазовых залежей в глубоководной части арктического бассейна.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Абрамов, М.В. Конечноэлементное моделирование электромагнитного поля горизонтальной электрической линии / М.В.Абрамов // Научный вестник НГТУ. – 2008. – № 1 (30). – С. 3-10.
2. Ваньян, Л.Л. Основы электромагнитных зондирований / Л.Л. Ваньян - М.: Недра, 1965. – 109 с.
3. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы. / Р. Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с.
4. Жданов, М.С. Электроразведка / М.С.Жданов - М.: Недра, 1986. - 316 с.
5. Жданов, М.С. Математическое моделирование электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах / М.С.Жданов, В.В Спичак. – М.:Наука, 1992.
6. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О.Зенкевич, К.Морган – М.: Мир, 1986.
7. Ильин, В.П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ, 2007. – 371 с.
8. Комаров, В.А. Электроразведка методом вызванной поляризации / В.А Комаров. - Л.: Недра, 1980.
9. Кормильцев, В.В. Переходные процессы при вызванной поляризации / В.В. Кормильцев – М.: Наука, 1980.
10. Митчел, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными/ Э.Митчел, Р.Уэйт – М.: Мир, 1981. – 216с
11. Могилатов, В.С. Круговой электрический диполь новый источник для электроразведки / В.С. Могилатов // Изв. РАН. Сер. Физика Земли, 1992. – № 6. – С. 97-105.
12. Могилатов, В.С. Зондирования вертикальными токами (ЗВТ) / В.С. Могилатов, Б.П. Балашов // Изв. РАН. Сер. Физика Земли, 1994. – № 6. – С. 73-79.
13. Могилатов, В.С. Поле кругового электрического диполя (КЭД) при постоянном токе / В.С.Могилатов, А.В.Злобинский // Изв. РАН. Сер. Физика Земли, 1995. – № 11. – С. 25-29.

14. Могилатов, В.С. Импульсная электроразведка / В.С.Могилатов // Учебное пособие. – Новосибирск: НГУ, 2002.
15. Моисеев, В.С. Математическое моделирование при разработке технологий для метода вызванной поляризации / В.С.Моисеев, М.Э. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.Г. Токарева // Сибирский журнал индустриальной математики, 1999. – Т.2. – №2(4). – С. 135-146.
16. Моисеев, В.С. Метод вызванной поляризации при поисках нефтеперспективных площадей/ В.С. Моисеев // Новосибирск: Наука, 2002. – 136 с.
17. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов / Д.Норри, де Фриз Ж. – М.: Мир, 1981.
18. Персова, М.Г. Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, М.В. Абрамов // Сибирский журнал индустриальной математики – 2009. – № 4(40). – С. 106-119.
19. Персова, М.Г. Компьютерное моделирование геоэлектромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович // Физика Земли, 2011. – № 2. – С. 3–14.
20. Персова, М.Г. О сравнении двух подходов к 3D-инверсии данных электромагнитных зондирований во временной области / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, Е.И. Симон, Т.Г. Шашкова // Материалы VI Всероссийской школы-семинара по электромагнитным зондированиям Земли имени М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна (ЭМЗ-2013), [Электронное издание]. – Новосибирск: ИНГГ СО РАН, 2013. – <http://ems2013.ipgg.sbras.ru>
21. Персова, М.Г. Применение векторного МКЭ для моделирования процессов становления поля и поля вызванной поляризации от кругового электрического диполя в трехмерных средах / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Токарева, Ю.В. Тракимус, Т.Г. Шашкова // Доклады АН ВШ РФ, Новосибирск. – 2012. – №1(18). – С.123-133.

22. Персова, М.Г. Решение трехмерных задач магнитотеллурики в сложных средах с использованием метода конечных элементов / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, П.А. Домников, Т.Г. Шашкова, М.В. Абрамов, Ю.И. Кошкина // Научный вестник НГТУ. – 2013. – №1(50). – С.78-83.
23. Персова, М.Г. Сравнение вычисления полей вызванной поляризации для идеальной установки круговой электрический диполь и восьми лучевой установки, составленной из ГЭЛ / М.Г. Персова, Т.Г. Шашкова // Материалы XI международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП 2012), Новосибирск: НГТУ. – 2010. – Т.6 . – С.94-96.
24. Персова, М.Г. Учет и оценка влияния рельефа дна при решении задач морской электроразведки на основе конечноэлементного 3D-моделирования / М.Г. Персова, Д.В. Вагин, М.Г. Токарева, Т.Г. Шашкова // Доклады АН ВШ РФ, Новосибирск. – 2012. – №1 (19). – С.106-111.
25. Сабоннадьер, Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР: пер. с франц. / Ж.-К. Сабоннадьер, Ж.-Л. Кулон – М.: Мир, 1989.
26. Светов, Б.С. Основы геоэлектрики / Б.С.Светов // М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 256 с.
27. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд – М.: Мир, 1979. – 392 с.
28. Сильвестер, П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари // М.: Мир, 1986. – 229 с.
29. Соловейчик, Ю.Г. Конечноэлементное моделирование электромагнитного поля для кругового электрического диполя в трехмерных средах / Ю.Г.Соловейчик, М.Г.Персова, М.Э.Рояк, Г.М.Тригубович // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7. - № 1(17) – С. 114-129.
30. Соловейчик, Ю.Г. Конечноэлементное моделирование электрического и магнитного полей вызванной поляризации в трехмерной среде / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.В. Абрамов, М.Г. Токарева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV. – № 3(47). – С. 112-124.

31. Соловейчик, Ю. Г. Математическое моделирование на базе метода конечных элементов трехмерных электрических полей в задачах электроразведки / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, В. С. Моисеев, А. В. Васильев // Физика Земли. – 1997. – № 9. – С. 67–71.
32. Соловейчик, Ю. Г. МКЭ-моделирование трехмерных нестационарных электромагнитных полей / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, В. С. Моисеев, Г. М. Тригубович // Физика Земли. – 1998. – № 10. – С. 78-84.
33. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова // Учебное пособие. Сер. «Учебники НГТУ». – Новосибирск: НГТУ, 2007. - 899с.
34. Соловейчик, Ю.Г. CED-MAR – 3D-моделирование геоэлектромагнитных полей кругового электрического диполя для решения задач морской электроразведки / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.В. Абрамов, Д.В. Вагин, П.А. Домников, Т.Г. Шашкова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618432 от 17.09.2012. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). – 2012.
35. Шашкова, Т.Г. Конечноэлементное моделирование полей вызванной поляризации для кругового электрического диполя / Т.Г. Шашкова // Информатика и проблемы телекоммуникаций. Российская научно-техническая конференция. Материалы конференции. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. Т. 1 – С. 126-129.
36. Шашкова, Т.Г. Моделирование полей вызванной поляризации для кругового электрического диполя в анизотропных средах / Т.Г. Шашкова // Обработка информационных сигналов и математическое моделирование. Российская научно-техническая конференция. Материалы конференции. Новосибирск. – 2013. – С. 110-113.
37. Шашкова, Т.Г. Моделирование процессов становления поля кругового электрического диполя в анизотропных средах / Т.Г. Шашкова // Сборник научных трудов НГТУ, Новосибирск. – 2013. – №1(71) . – С.59-64.

38. Шашкова, Т.Г. О подходе к повышению точности расчета процессов становления поля при решении трехмерных задач электроразведки / Т.Г. Шашкова // Наука. Технологии. Инновации. Материалы всероссийской студенческой конференции молодых ученых. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. Часть 1 – С. 109-111.
39. Эпов, М. И. Прямые задачи электромагнитных зондирований с учетом частотной дисперсии геоэлектрических параметров / М. И. Эпов, М. Ю. Антонов // Физика Земли. – 1999. – № 4. – С. 298–305.
40. Эпов, М. И. Прямые и обратные задачи индуктивной геоэлектрики в одномерных средах / М. И. Эпов, И. Н. Ельцов – Новосибирск, 1992. – 31 с. (препр./объедин. ин.- геол., геофиз. и минерал. СО РАН).
41. Alcocer, J. Reducing uncertainty by integrating 3D CSEM in the Mexican deepwater exploration workflow / J. Alcocer, M.V. García, H.S. Soto, D. Baltar, V.R. Paramo, P.T. Gabrielsen, F. Roth // First break, volume 31, April 2013, p.75-79.
42. Badea, E. A. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials / E. A. Badea, M. E. Everett, G. A. Newman, O. Biro // Geophysics, 2001. vol. 66. – no. 3. – pp. 786-799.
43. Barker, N.D. Optimizing EM data acquisition for continental shelf exploration / N.D. Barker, J.P. Morten, D.V. Shantsev // The Leading Edge, November 2012, p. 1276-1284.
44. Beran, L. Estimation of Cole-Cole parameters from time-domain electromagnetic data. / L. Beran, D. Oldenburg //SEG Technical Program Expanded Abstracts 2008: 569-573.
45. Bhuyian, A.H. 3D CSEM modeling and time-lapse sensitivity analysis for subsurface CO<sub>2</sub> storage / A.H. Bhuyian, M. Landrø, S.E. Johansen.// GEOPHYSICS, VOL. 77, NO. 5 (SEPTEMBER-OCTOBER 2012); P. E343–E355.
46. Blaschek, R. A new sensitivity-controlled focusing regularization scheme for the inversion of induced polarization data based on the minimum gradient support / R. Blaschek, A. Hördt, A. Kemna.// GEOPHYSICS Mar 2008, Vol. 73, No. 2, pp. F45-F54.

47. Bossavit, A. Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements / A. Bossavit – Academic Press (Boston), 1998
48. Bossavit, A. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism / A. Bossavit // IEE Proc., 135, Pt.A, 1988. – pp.493-500
49. Commer, M. 3D induced-polarization data inversion for complex resistivity / M. Commer, G.A. Newman, K.H. Williams, S.S. Hubbard // GEOPHYSICS May 2011, Vol. 76, No. 3, pp. F157-F171.
50. Commer, M. Three-dimensional inversion of spectral induced polarization data resistivity / M. Commer, G.A. Newman, K.H. Williams, S.S. Hubbard // SEG Denver 2010 Annual Meeting, p.624-628.
51. Constable, S. Marine electromagnetic methods – A new tool for offshore exploration. / S. Constable // THE LEADING EDGE. – APRIL 2006 – P.438-444.
52. Cox, L. 3D inversion of airborne electromagnetic data. / L. Cox, G. Wilson, M. Zhdanov // Geophysics – 2012. Vol. 77. №4. P. WB59-WB69.
53. Dell'Aversana, P. Accurate detection of resistivity anomalies using the symmetry attribute and inversion of marine CSEM data / P. Dell'Aversana // The Leading Edge, June 2010, p.662-671.
54. Dell'Aversana, P. Improving interpretation of CSEM in shallow water / P. Dell'Aversana // The Leading Edge, March 2007, p.332-335.
55. Dell'Aversana, P. CSEM data interpretation constrained by seismic and gravity data: an application in a complex geological setting / P. Dell'Aversana, S. Colombo, B. Ciurlo, J. Leutscher, J. Seldal // First break, volume 30, November 2012, p.43-52.
56. Fiandaca, G. Time-domain-induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters / G. Fiandaca, E. Auken, A. V. Christiansen, A. Gazoty // GEOPHYSICS May 2012, Vol. 77, No. 3, pp. E213-E225.
57. Flekkøy, E.G. Comparison of the low-frequency variations of the vertical and horizontal components of the electric background field at the sea bottom / E.G. Flekkøy,



K. J. Måløy // GEOPHYSICS, VOL. 77, NO. 6 (NOVEMBER-DECEMBER 2012); P. E391–E396.

58. Flekkoy, E. Hydrocarbon detection through induced polarization: Case study from the Frigg area. / E. Flekkoy, P. Legeydo, E. Heland, G. Drivenes, J. Kjerstad // The 2nd International CSEM Conference. CSEM in hydrocarbon exploration and exploitation, Oslo, May 14 – 15, 2013.

59. Flekkoy, E. Using DNME technology in Nord Sea: Case history / E. Flekkoy, P. Legeydo // The 2nd International CSEM Conference. CSEM in hydrocarbon exploration and exploitation, Oslo, May 14 – 15, 2013.

60. Fonarev, G.A. Electromagnetic Studies in the Central Arctic Water Basin / G.A. Fonarev, I.L. Trofimov, V.S. Shneer // Geomagnetism and Aeronomy, 2009, Vol. 49, No. 6, pp. 813–815.

61. Frolov, I.E. The Arctic Basin. Results from the Russian Drifting Stations. / I.E.Frolov, Z.M.Gudkovich, V.F.Radionov, A.V.Shirochkov, L.A.Timokhov // Praxis Publishing. Chichester, UK, 2005, 313 p.

62. Gabrielsen, P.T. Exploring frontier areas using 2D seismic and 3D CSEM data, as exemplified by multi-client data over the Skrugard and Havis discoveries in the Barents Sea / P.T. Gabrielsen, P. Abrahamson, M. Panzner, S. Fanavoll, S. Ellingsrud // First break, volume 31, January 2013, p. 63-71.

63. Grigoriev, V.F. The results of marine electromagnetic sounding with a high-power remote source in the Kola Bay in the Barents Sea / V.F. Grigoriev, S.M. Korotaev, M.S. Kruglyakov, D.A. Orekhova, I.V. Popova, E.D. Tereshchenko, P.E. Tereshchenko, Yu.G. Schors // Izvestiya, Physics of the Solid Earth, May 2013, Volume 49, Issue 3, pp 373-383.

64. Harris, P. Joint interpretation of seismic and CSEM data using well log constraints: an example from the Luva Field / P. Harris, Z. Du, L. MacGregor, W. Olsen, R. Shu, R. Cooper // First break, volume 27, May 2009, p. 73-81.

65. Helwig, S.L. Vertical dipole CSEM: technology advances and results from the Snøhvit field / S.L. Helwig, A. W. El Kaffas, T. Holten, Ø. Frafjord, K. Eide // First break, volume 31, April 2013, p. 63-68.

66. Hesthammer, J. Use of CSEM data to aid a revised interpretation from the Norwegian Sea / J. Hesthammer, J. I. Rykkelid, S. Sperrevik, D. Cumming // First break, volume 29, September 2011, p. 57-66.
67. Holten, T. Vertical source, vertical receiver, electromagnetic technique for offshore hydrocarbon exploration / T. Holten, E. G. Flekkøy, B. Singer, E. M. Blixt, A. Hanssen, K. J. Måløy // First break, volume 27, May 2009, p. 89-93.
68. Höning, M. 1D and 2D Cole-Cole-inversion of time-domain induced-polarization data / M. Höning, B. Tezkan// Geophysical Prospecting Vol 55, No 1, January 2007 pp. 117 - 133.
69. Ingeman-Nielsen, T. Numerical modelling of complex resistivity effects on a homogenous half-space at low frequencies / T. Ingeman-Nielsen, F. Baumgartner // Geophysical Prospecting, 2006, 54, 261–271.
70. Jang, H. Step-off, vertical electromagnetic responses of a deep resistivity layer buried in marine sediments / H. Jang, K. H. Lee, H. J. Kim // J. Geophys. Eng., vol. 10 (2013), 025011 (7p).
71. Karaoulis, M. Time-lapse three-dimensional inversion of complex conductivity data using an active time constrained (ATC) approach. / M. Karaoulis, A. Revil, D. D. Werkema, B. J. Minsley, W. F. Woodruff , A. Kemna.//Geophys. J. Int. (2011) 187, 237–251
72. Key, K. Marine Electromagnetic Studies of Seafloor Resources and Tectonics / K. Key // Surv Geophys (2012) 33:135–167.
73. Kozhevnikov, N.O. Fast-decaying IP in frozen unconsolidated rocks and potentialities for its use in permafrost-related TEM studies / N.O. Kozhevnikov, E.Y. Antonov // Geophysical Prospecting, 2006, 54, 383–397.
74. Korotaev, S.M. Prospects of magnetotelluric Sounding in Some Large Structures in the Arctic Ocean / S.M. Korotaev, M. S. Zhdanov, D. A. Orekhova, M. S. Kruglyakov, I. L. Trofimov, V. S. Shneyer, Yu. G. Schors // Izvestiya, Physics of the Solid Earth, 2010, Vol. 46, No. 9, pp. 772–779.
75. Korotaev, S.M. Study of the Possibility of the Use of the Magnetotelluric Sounding Method in the Arctic Ocean with Quantitative Modeling / S.M. Korotaev,

- M.S. Zhdanov, D.A. Orekhov, M. S. Kruglyakov, I. L. Trofimov, Yu. G. Schors, V.S. Shneyer // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2010, Vol. 46, No. 9, pp. 759–771.
76. Lee, K.H. Sensitivity analysis of marine controlled-source electromagnetic methods to a shallow gas-hydrate layer with 1D forward modeling / K.H. Lee, H. Jang, H. Jang, H. J. Kim // *Geosciences Journal*, Vol. 15, No. 3, September 2011, p. 297 – 303.
77. Li, Y. Transient electromagnetic in shallow water: insights from 1D modeling / Y. Li, S. Constable // *Chin J Geophys Ch* 53(3):737–742.
78. Li, Y. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: part 2 – the effect of bathymetry/ Y. Li, S. Constable // *Geophysics* 72(2):WA63–WA71.
79. Li, Y., Key K. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: part 1— an adaptive finite element algorithm / Y. Li, K. Key // *Geophysics* 72(2):WA51–WA62
80. Liu, C. Study of ELF electromagnetic fields from a submerged horizontal electric dipole positioned in a sea of finite depth / C. Liu, L.G. Zheng, Y. Li // *Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications*, 2009 3rd IEEE International Symposium on, 27-29 Oct. 2009, p.152 - 157.
81. Liu, L. Radiation From a Vertical Electric Dipole in the Presence of a Three-Layered Region / L. Liu, K. Li // *IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION*, VOL. 55, NO. 12, DECEMBER 2007, p. 3469-3475.
82. Loke, M.H. Inversion of 2D spectral induced polarization imaging data / M.H. Loke, J.E. Chambers, R.D. Ogilvy // *Geophysical Prospecting*. Vol 54, No 3, May 2006 pp. 287 - 301.
83. Maaø, F. Fast finite difference time domain modeling for subsurface electromagnetic problems. / F. Maaø // *GEOPHYSICS*, VOL. 72, NO. 2 □MARCH-APRIL 2007; P. A19–A23.
84. Marchant, D. 3D modeling of IP effects on electromagnetic data in the time domain. / D. Marchant, E. Haber, L. Beran, D. W. Oldenburg. //SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012: 1-5.
85. Marchant, D. Inductive source induced polarization / D. Marchant, E. Haber, D.W. Oldenburg // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012: 1-5.

86. Mittet, R. The marine controlled-source electromagnetic method in shallow water / R. Mittet, J. P. Morten // *GEOPHYSICS*, VOL. 78, NO. 2 (MARCH-APRIL 2013); P. E67–E77.
87. Mittet, R. High-order finite-difference simulations of marine CSEM surveys using a correspondence principle for wave and diffusion fields. / R. Mittet // *Geophysics* 75(1):F33–F50.
88. Mittet, R. Decomposition in upgoing and downgoing fields and inversion of marine CSEM data / R. Mittet, P. T. Gabrielsen // *GEOPHYSICS*, VOL. 78, NO. 1 (JANUARY-FEBRUARY 2013); P. E1–E17.
89. Mogilatov, V. A new method of geoelectrical prospecting by vertical electric current soundings / V. Mogilatov, B. Balashov // *Journal of Applied Geophysics* – 1996. Vol. 36, 31-41.
90. Myer, D. Marine CSEM of the Scarborough gas field, Part 1: Experimental design and data uncertainty / D. Myer, S. Constable, K. Key, M. E. Glinsky, G. Liu // *GEOPHYSICS*, VOL. 77, NO. 4 (JULY-AUGUST 2012); P. E281–E299.
91. Niu, J. On the Air–Sea Boundary in Transient Marine CSEM Detection Modeling of Subseafloor Hydrocarbon Reservoirs / J. Niu, J.J. Simpson // *IEEE ANTENNAS AND WIRELESS PROPAGATION LETTERS*, VOL. 11, 2012, p.651-654.
92. Nordsiek, S. A new approach to fitting induced-polarization spectra / S. Nordsiek, A. Weller // *GEOPHYSICS* Nov 2008, Vol. 73, No. 6, pp. F235-F245.
93. Oldenburg, D. Three dimensional inversion of multi-source time domain electromagnetic data. / D. Oldenburg, E. Haber, R. Shekhman // *Geophysics* – 2013. Vol. 78. №1. P. E47-E57.
94. Pardo, D. Simulation of marine controlled source electromagnetic measurements using a parallel fourier hp-finite element method / D. Pardo, M.J. Nam, C. Torres-Verdin, M.G. Hoversten, I. Garay // *Comput Geosci* (2011) 15:53–67.
95. Sasaki, Y. 3D inversion of marine CSEM and MT data: An approach to shallow-water problem / Y. Sasaki // *GEOPHYSICS*, VOL. 78, NO. 1 (JANUARY-FEBRUARY 2013); P. E59–E65.

96. Streich, R. 3D finite-difference frequency-domain modeling of controlled-source electromagnetic data: direct solution and optimization for high accuracy / R. Streich // *Geophysics* 74(5):F95–F105.
97. Trofimov, I.L. Anomalous magnetic field of the Lomonosov Rise according to data of the north pole 19 drifting station / I.L. Trofimov, V.S. Shneer, A.A. Khalezov. // *Geomagnetism and Aeronomy*, 2006, Vol. 46, No. 2, pp. 261–265.
98. Um, E.S. 3D time-domain simulation of electromagnetic diffusion phenomena: A finite-element electric-field approach / E.S. Um, J.M. Harris, D. L. Alumbaugh // *GEOPHYSICS*, VOL. 75, NO. 4 JULY-AUGUST 2010; P. F115–F126.
99. Veeken, P.C. Benefits of the induced polarization geoelectrical method to hydrocarbon exploration / P.C. Veeken, P. Legeydo, Yu. Davidenko, E. Kudryavceva, S. Ivanov, A. Chuvaev // *GEOPHYSICS*, VOL. 74, NO. 2, MARCH-APRIL 2009; pp. B47-B59.
100. Weiss, C. The fallacy of the "shallow-water problem" in marine CSEM exploration. / C. Weiss // *Geophysics* 72(6):A93–A97.
101. Weiss, C. Mapping thin resistors in the marine environment, part II: modeling and analysis in 3D / C. Weiss, S. Constable // *Geophysics* 71(6):G321–G332.
102. Yoshioka, K. Three-dimensional nonlinear regularized inversion of the induced polarization data based on the Cole-Cole model / K. Yoshioka, M.S. Zhdanov // *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 150 (2005) 29-43.
103. Zhanxiang, H. On reservoir boundary detection with marine CSEM / H. Zhanxiang, K. Strack, Y. Gang, W. Zhigang // *APPLIED GEOPHYSICS*, Vol.5, No.3 (September 2008), P. 181 - 188.
104. Zhdanov, M.S. Iterative electromagnetic migration for 3D inversion of marine controlled-source electromagnetic data / M. S. Zhdanov, M. Cuma, G. A. Wilson, E. P. Velikhov, N. Black, A. V. Gribenko // *Geophysical Prospecting*, 2011, 59, 1101–1113.
105. Zhdanov, M. S. Generalized effective-medium theory of induced polarization / M. S. Zhdanov // *GEOPHYSICS* Sep 2008, Vol. 73, No. 5, pp. F197-F211.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ  
ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ, АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ  
НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

# РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2012618432

**SED-MAR - 3D-моделирование геоэлектромагнитных полей кругового электрического диполя для решения задач морской электроразведки**

Правообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет» (НГТУ) (RU)*

Автор(ы): *Соловейчик Юрий Григорьевич, Персова Марина Геннадьевна, Абрамов Михаил Владимирович, Вагин Денис Владимирович, Домников Петр Александрович, Шашкова Татьяна Геннадьевна (RU)*

Заявка № 2012616243

Дата поступления 20 июля 2012 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ  
17 сентября 2012 г.

*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'B.P. Simonov', is written over a light-colored background.

Б.П. Симонов





## АКТ

об использовании результатов научных исследований, выполненных соискателем Шашковой Т.Г. в диссертационной работе "**Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей для кругового электрического диполя в изотропных и анизотропных трехмерных средах**", в задачах разведочной геофизики

Программный комплекс, реализующий 3D-моделирование геоэлектромагнитных полей от кругового электрического диполя, использовался при проектировании электроразведочных работ методом ЗВТ (зондирований вертикальными токами) и при обработке данных на участках Байтахский и Лиственничный. Участок Байтахский находится в пределах Алакит-Мархинского кимберлитового поля в Мирнинском районе Республики САХА ( Якутия ) в 15 км от поселка Айхал. Работы на участке Байтахский проводились в октябре 2012 года. Участок Лиственничный находится в Мало-Ботуобинском алмазоносном районе в Мирнинском районе Республики САХА ( Якутия ) в 40 км от г. Мирный. Работы на участке Лиственничный проводились в сентябре 2013 года.

Генеральный Директор  
ООО «Научно-Техническая Компания ЗаВеТ-ГЕО»



Злобинский Аркадий Владимирович  
02/12/2013