

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

НОС ОЛЕГ ВИКТОРОВИЧ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМ
С АКТИВНЫМИ СИЛОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ В
ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

05.09.03 – Электротехнические комплексы и системы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научные консультанты:

д-р техн. наук, проф. В.В. Панкратов

д-р техн. наук, проф. С.А. Харитонов

Новосибирск –2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	7
1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ В ЗАДАЧАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФАЗНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	26
1.1 Линейные ортогональные преобразования фазных переменных	26
1.2 Основные положения некоммутативной алгебры кватернионов	31
1.2.1 Алгебраическая и тригонометрическая формы записи гиперкомплексного числа	32
1.2.2 Геометрические свойства векторной части кватерниона в четырёхмерном гиперкомплексном пространстве	37
1.2.3 Кинематические параметры Родрига-Гамильтона	40
1.3 Линейное ортогональное преобразование базисов в алгебре кватернионов	43
1.4 Связь вещественных коэффициентов кватерниона с элементами матрицы направляющих косинусов	46
1.5 Кинематические параметры Кэли-Клейна	52
1.5.1 Комплексное двумерное uv -пространство	52
1.5.2 Линейный оператор с комплексными величинами Кэли-Клейна	58
1.6 Кинематические параметры вращения в виде углов Эйлера-Крылова	60
1.7 Применение алгебры кватернионов в задачах анализа процессов в электромеханических системах переменного тока	70
1.7.1 Математическая модель асинхронной машины в Q -базисе	70
1.7.2 Математическая модель асинхронной машины в комплексном двумерном uv -пространстве	75
1.7.3 Кинематические параметры преобразования фазных переменных при различных способах ориентации координатных осей	80
1.8 Выводы по главе	83

2 СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ

ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	85
2.1 Мгновенная мощность электрических цепей переменного тока	85
2.1.1 Математические модели однофазных линейных цепей с использованием среднеквадратичных значений	85
2.1.2 Линейное разложение мгновенного тока S. Fryze	89
2.2 Исходная $p-q$ теория активной и реактивной мгновенных мощностей трехфазной системы переменного тока	92
2.2.1 Основные положения исходной $p-q$ теории активной и реактивной мгновенных мощностей	92
2.2.2 Анализ мгновенных мощностей исходной $p-q$ теории	98
2.2.3 Выводы по разделу	111
2.3 Расширенная $p-q$ теория активной и реактивной мгновенных мощностей трехфазной системы переменного тока	112
2.4 Основные положения $p-q-r$ и $d-q$ теорий мгновенной мощности трехфазной системы переменного тока	118
2.5 Векторные формулировки теорий мгновенной мощности	127
2.5.1 Обобщенная теория мгновенной реактивной мощности	127
2.5.2 Теория мгновенной мощности с ортогональной декомпозицией трехмерного вектора напряжений	129
2.6 Выводы по главе	140
3 УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МГНОВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ	
ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	143
3.1 Кватернион мгновенных мощностей при гармоническом законе изменения фазных переменных	143
3.1.1 Линейная симметричная трехфазная нагрузка с нулевым проводом	143

3.1.2 Обобщенный случай линейной трехфазной нагрузки с параметрической асимметрией фазы A	146
3.1.3 Частные случаи линейной трехфазной нагрузки с параметрической асимметрией фазы A	159
3.2 Обобщенный случай асимметрии токов во всех трех фазах линейной нагрузки	161
3.3 Анализ уравнения баланса мгновенных мощностей нелинейной трехфазной нагрузки произвольного вида в гиперкомплексном пространстве H	173
3.3.1 Кватернион мгновенной мощности трехфазной системы с изолированной средней точкой	173
3.3.2 Кватернион мгновенной мощности трехфазной системы с нулевым проводом	175
3.4 Баланс мгновенных мощностей и электромагнитный момент асинхронного двигателя в кватернионном базисе	193
3.5 Заключение	197
4 МЕТОДЫ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ КОМПЕНСАЦИИ НЕАКТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ	199
4.1 Силовые полупроводниковые устройства активной фильтрации	199
4.1.1 Общие принципы построения активных силовых фильтров	199
4.1.2 Математическая модель силовой части активного силового фильтра ...	204
4.1.3 Синтез трехканального контура регулирования токов компенсации ...	207
4.2 Обобщенная задача минимизации евклидовой нормы алгебраического вектора токов	216
4.3 Синтез алгоритмов активной фильтрации на основе современных теорий мгновенной мощности	220
4.3.1 Общие цели и задачи компенсации	220

4.3.2 Синтез алгоритмов компенсации на базе исходной и расширенной $p-q$ теорий активной и реактивной мгновенных мощностей	223
4.3.3 Синтез алгоритмов компенсации с использованием $p-q-r$ и $d-q$ теорий мгновенной мощности	226
4.3.4 Синтез алгоритмов компенсации на основе векторных формулировок мгновенной мощности	230
4.3.5 Синтез алгоритмов активной фильтрации трехфазных напряжений	233
4.3.6 Выводы по разделу	238
4.4 Синтез алгоритмов управления активным силовым фильтром в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$	240
4.4.1 Гармонический анализ компенсируемых составляющих кватерниона мгновенной мощности	240
4.4.2 Кватернионы активного и реактивного мгновенных токов трехфазной нагрузки	247
4.4.3 Задача об условном экстремуме нормы кватерниона фазных токов	250
4.4.4 Синтез алгоритмов компенсации с использованием гиперкомплексных чисел	252
4.5 Техническая реализация синтезированных законов управления активными силовыми фильтрами	263
4.5.1 Динамические подсистемы оценки постоянных составляющих скалярной и мнимой частей кватерниона мгновенной мощности	263
4.5.2 Синтез астатического контура регулирования напряжения звена постоянного тока	265
4.5.3 Алгоритмы управления активным силовым фильтром в преобразованных координатах состояния	271
4.6 Методика синтеза алгоритмов управления токами компенсации в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$	273

5 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИЛОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	275
5.1 Основные цели и задачи экспериментального исследования	275
5.2 Описание экспериментальной установки	277
5.3 Исследование статических и динамических режимов работы активного силового фильтра	281
5.4 Выводы по результатам экспериментальных исследований	297
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	299
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	303
ПРИЛОЖЕНИЕ А	328
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	337

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время отечественное производство характеризуется высокой долей удельной энергоемкости, которая, как отмечено в “Энергетической стратегии России на период до 2020 г.”, в 2–3 раза превышает аналогичный показатель индустриально развитых зарубежных стран [22, 33]. Данный факт во многом объясняется технологической отсталостью промышленных предприятий, а также отсутствием системного подхода при практической реализации комплекса мер по ресурсо и энергосбережению, входящих в число приоритетных направлений развития науки, технологии и техники Российской Федерации (Указ Президента РФ от 7 июля 2011 г., № 899).

До недавнего времени одним из традиционных подходов к снижению количества потребляемой электрической энергии при металлообработке, выплавке стального проката и чугуна, переработке углеводородного сырья и т.д. являлась коррекция коэффициента мощности, технически реализуемая за счет подключения параллельно активно-реактивному потребителю конденсаторных батарей с тиристорными блоками коммутации. Данный способ повышения энергоэффективности трехфазных систем переменного тока, несмотря на относительно невысокую начальную стоимость, малые собственные потери и простоту в эксплуатации обладает большим количеством недостатков, к числу которых относятся [33, 59]:

- корректная работа только в случае постоянной или медленно изменяющейся линейной нагрузки;
- ступенчатость регулирования;
- большие массогабаритные показатели;
- пожароопасность;
- длительный временной интервал разряда при отключении;
- низкая стойкость по отношению перенапряжениям и высокочастотным помехам;

– возникновение резонансных явлений.

Так, например, в энергосистеме Японии с напряжением 6,6 кВ при снижении энергопотребления в ночные часы наблюдается увеличение амплитудного значения 5-ой гармоники на 7%, что объясняется колебательными процессами между индуктивностью элементов распределительной линии и емкостью конденсаторных батарей [127].

В связи с непрерывным улучшением динамических и эксплуатационных характеристик полупроводниковой элементной базы все большее распространение на практике при решении прикладных задач коррекции фазового сдвига получают статические синхронные компенсаторы СТАТКОМ (static synchronous compensator STATCOM) [131], реализованные по схеме автономного инвертора с емкостным накопителем электрической энергии [46], работающим в режиме источника реактивной мощности [103]. Принцип действия данного типа преобразовательного устройства, о возможности использования которого в качестве компенсатора было указано еще в 80-х годах прошлого века [30, 195], основан на генерации в систему электроснабжения гармонического тока с опережающим угловым смещением относительно соответствующего напряжения.

При этом также необходимо отметить, что различные способы несимметричного подключения силовых конденсаторов [99, 107] и применение специализированных алгоритмов управления СТАТКОМ [39] позволяют в дополнение к их основному функциональному назначению добиться исключения нулевой или обратной последовательности фаз токов нагрузки, коэффициенты несимметрии которых в вечернее время могут достигать величины 0,2–0,3, что соответствует увеличению потребления электроэнергии на 30-50% по отношению к номинальному режиму работы энергосистемы [45].

Как было отмечено выше, в целях повышения эффективности отечественного производства необходимо внедрение новых технических решений с использованием современного технологического оборудования, которое, как правило, включает в себя один или несколько силовых полупроводниковых преобразова-

тельных устройств, вызывающих в силу дискретного характера работы значительные искажения в гармонической форме токов и напряжений [25], а также несимметричную загрузку подводящих распределительных линий. Помимо этого, существенное влияние на качество электрической энергии оказывают мощные промышленные потребители, такие как сварочные установки и электролизеры [94], а также бытовые однофазные приемники, к числу которых относятся офисная оргтехника, мощные системы кондиционирования, люминесцентные лампы и т.д., доля которых в общем количестве потребляемой мощности непрерывно увеличивается [22, 53, 105]. Так, например, как следует из представленного в [117] экспериментального анализа номинального режима работы дуговой сталеплавильной печи мощностью 40 МВА, ее эксплуатация сопровождается изменением фазового сдвига в диапазоне $-10^\circ \dots -50^\circ$ с математическим ожиданием -30° , а также значительным искажением потребляемых токов, включающим в себя интергармонические составляющие.

Наличие в трехфазных системах переменного тока высокочастотных гармоник и параметрическая асимметрия цепей сопровождается широким спектром негативных явлений, основными из которых являются:

- снижение пропускной способности и неравномерная загрузка фаз линий электропередачи;
- амплитудные скачки напряжения, вызванные наличием субгармонических колебаний;
- интенсивное старение изоляции и, как следствие, снижение срока службы электротехнического оборудования;
- увеличение активных потерь, вызывающих рост расходов на электроэнергию и дополнительный нагрев элементов распределительной сети;
- ложные срабатывания элементов защитной автоматики и т.д.

Для оценки уровня искажения напряжений в системах электроснабжения общего назначения в Российской Федерации применяются нормированные показатели несинусоидальности до 40 порядкового номера гармоники, регламентиро-

ванные соответствующим стандартом [21], которым соответствуют зарубежные аналоги, такие как, например, Total Harmonic Distortion (суммарный коэффициент гармонических составляющих, %) [145]. При этом для описания качества электромагнитных процессов в устройствах силовой электроники могут также использоваться специализированные энергетические характеристики [31], к числу которых относятся коэффициент гармоник токов или иначе коэффициент несинусоидальности (current THD factor) [147], коэффициент мощности (power factor) [142], коэффициент сдвига тока по первой гармонике (displacement power factor) [137] и т.д.

Среди всего многообразия различных способов снижения влияния преобразовательной техники на качество электрической энергии можно выделить несколько основных направлений [101], из которых наиболее перспективными являются подходы, основанные на использовании внешних фильтрокомпенсирующих устройств. Традиционно, для обеспечения синусоидального закона изменения фазных переменных применяют пассивные узкополосные RLC-фильтры соответствующего порядка [51, 117, 120, 127, 183], осуществляющие шунтирование нагрузки по цепи прохождения пульсационных составляющих. Так, например, при последовательном включении нескольких резонансных контуров с настройкой на заданные компенсируемые гармоники, в трехфазной системе обеспечивается приемлемое качество фильтрации при относительно небольших первоначальных затратах, эффективность которой во многом определяется текущей нестационарностью, обусловленной температурным дрейфом, отклонениями напряжения сети от номинальных значений, технологическим разбросом параметров и старением элементов [98]. При этом корректирующие RLC-цепи имеют большие массогабаритные показатели, низкую добротность, функционируют только в ограниченном спектре частот [38, 104, 204] и могут вызывать резко колебательные процессы в энергосистеме [131].

По этим причинам за рубежом в широком диапазоне мощностей до 60 МВА применяются активные силовые фильтры (АСФ), серийно выпускаемые

ведущими мировыми производителями электротехнического оборудования, такими как, например, “ABB”, “Schneider Electric”, “Siemens”, “Danfoss” [16, 97, 103], которые предназначены для исключения высокочастотных гармоник, коррекции углового сдвига, уменьшения скачков напряжения, уравнивание потенциала нейтрали, демпфирования резонансных явлений и т.д. [63, 79, 101, 125, 127, 174, 198]. Принцип действия данного типа полупроводникового устройства, реализованного как и статический синхронный компенсатор СТАТКОМ по типовой схеме автономного инвертора напряжения с силовой емкостью, основывается на преднамеренной генерации в трехфазную систему компенсационных воздействий сложной периодической формы, осуществляющих заданное искажение потребляемых от источника несимметричной и/или нелинейной нагрузкой токов/напряжений, вследствие чего обеспечивается синусоидальный закон изменения данных переменных в совокупности с единичным или опережающим коэффициентом мощности при одновременном соблюдении условия симметрии по мгновенным значениям [63].

В качестве основных достоинств АСФ необходимо отметить низкий уровень собственных активных потерь, абсолютное значение которых, например, при выходных токах инвертора 10 А достигает 20 Вт [132], автоматическую подстройку к изменяющимся режимам работы электрооборудования и конфигурации питающей сети, что обеспечивает полную инвариантность к действию параметрических возмущений, а также отсутствие жестких требований к качественному составу электрической энергии, что полностью снимает какие-либо ограничения по области практического применения. При этом совместная комбинация методов активной фильтрации с пассивными корректирующими RLC-цепями позволяет существенно снизить установленную мощность автономного инвертора [93, 97, 98, 104], в связи с чем разделяют классические активные (pure) и гибридные (hybrid) фильтрокомпенсирующие устройства [127].

Конструктивное исполнение АСФ в сетях переменного тока общего назначения до 1 кВ основывается на бестрансформаторном варианте с двухуровне-

вым мостовым инвертором, которое применительно к трехфазным системам с глухозаземленной нейтралью может быть реализовано на схмотехнических решениях с подключением средней точки конденсаторной батареи к нулевому проводу (split-capacitor three-leg) [39, 205], за счет применения четвертой стойки (four-leg full-bridge) [131, 201] или их совместной комбинации [23, 90, 138]. Первый способ является менее затратным по причине более простой структуры силовой части, однако при этом имеет место неравномерное распределение напряжения на емкостных элементах звена постоянного тока, которое может приводить к искажению мгновенной формы компенсационных сигналов. В свою очередь второй вариант лишен данного недостатка и благодаря большему количеству полупроводниковых приборов обеспечивает качественную отработку внешних задающих воздействий, однако при этом требует более сложных законов коммутации в силу наличия дополнительного ограничения, связанного с линейной зависимостью выходных переменных [131].

Помимо систем электроснабжения общего назначения, силовые преобразовательные устройства активной фильтрации также широко применяются в высоковольтных линиях передачи электрической энергии на 110-750 кВ в рамках FACTS-технологии (Flexible AC Transmission System) [157], осуществляя стабилизацию напряжения, демпфирование качаний передаваемой мощности, повышение предельных показателей статической и динамической устойчивости и т.д. [43, 103, 131]. Базовые принципы данной концепции базируются на рациональном использовании распределительных линий и электрооборудования за счет совместного использования АСФ с традиционными средствами энергосбережения, к числу которых относятся:

- статический тиристорный компенсатор, состоящий из встречно-параллельных блоков полууправляемых вентилей с реакторами или конденсаторами [35];

- шунтирующие реакторы с подмагничиванием, вопросам проектирования и эксплуатации которых полностью посвящен первый номер 2003 г. журнала “Электротехника”;
- асинхронизированные синхронные генераторы [95];
- накопители электрической энергии, такие как, например, сверхпроводящие индуктивные устройства [34].

Применительно к FACTS-приложениям, силовая часть АСФ может быть построена по многоуровневой схеме с емкостным делителем (neutral-point-clamped converter) или с плавающими конденсаторами (flying capacitor converter), либо в виде последовательного соединения ячеек Н-мостов (cascaded H-bridge converter), что в конечном итоге позволяет использовать менее дорогие полупроводниковые приборы, рассчитанные на меньшее обратное напряжение [189, 203], в качестве которых могут выступать IGBT-модули (Insulated-Gate Bipolar Transistor), полностью управляемые тиристоры GTO (gate-turn-off), а также запираемые тиристоры с коммутацией по затвору GCT (Gate Commutated Thyristor) и их усовершенствованная модификация IGCT (Integrated Gate Commutated Thyristor) [131, 133]. При практическом использовании последнего типа полупроводниковых ключей в высоковольтных приложениях, благодаря интеграции драйвера с основной структурой кристалла, достигается высокое быстродействие процессов накопления заряда и спада тока, находящегося на уровне единиц микросекунд [34, 103].

Многолетний зарубежный опыт эксплуатации АСФ на предприятиях черной и цветной металлургии, тяговых подстанциях железнодорожного транспорта, объектах инфраструктуры городского коммунального хозяйства и т.д. [125, 127, 133] показал высокую эффективность алгоритмов активной фильтрации, большой вклад в становление и развитие которых внесли Ю. К. Розанов, Г. Г. Жемеров, Н. Akagi, A. Nabae, Н. Kim, F. Z. Peng, J.-S. Lai, J.-C. Montaño, P. Salmerón, R. S. Herrera, A. Ferrero, L. Cristaldi и т.д.

Алгоритмические принципы формирования компенсационных воздействий на выходе АСФ базируются на математическом описании процесса энергопотребления несимметричной и/или нелинейной трехфазной нагрузки в рамках геометрического [209–211], алгебраического [139, 140] и тензорного [152, 206] подходов, т.к. классические способы представления энергетических характеристик с использованием интегральных оценок и гармонического разложения [47, 96] даже при предельном быстродействии автономного инвертора принципиально не могут обеспечить полное исключение из состава электрической энергии всех неэффективных (неактивных) составляющих в силу применения действующих значений и ограниченности членов тригонометрического ряда Фурье [64]. Так, например, минимизация активных потерь на основе квадратичного критерия обобщенного тока S. Fryze [131] подразумевает под собой численный расчет усредненной за предыдущий период мгновенной мощности, что вносит дополнительное запаздывание в алгоритм активной фильтрации [29]. Наиболее полный системный анализ энергетического аспекта режимов работы многофазных систем с мультигармонической мгновенной формой электрических сигналов представлен в [32], в которой обобщены и классифицированы различные показатели энергоэффективности нелинейных потребителей с цепями произвольного вида и конфигурации.

В связи с тем, что алгебраические и тензорный методы анализа нелинейных цепей, базирующиеся на применении математических аппаратов четырехмерных гиперкомплексных чисел [153] и полилинейных форм [2] соответственно, не получили широкого распространения на практике, то далее кратко рассмотрим основные положения геометрического подхода, включающего в себя [154]:

- исходную p – q теорию активной и реактивной мгновенных мощностей [129, 130, 132];
- модифицированную (расширенную) формулировку p – q теории [171];
- p – q – r теорию мгновенной мощности [163];

- обобщенную или иначе кросс-векторную теорию мгновенной реактивной мощности [184];
- $d-q$ теорию мгновенной мощности с использованием линейного ортогонального преобразования R. H. Park [146];
- векторную формулировку, основанную на ортогональной декомпозиции пространственного вектора напряжений [193].

В соответствии с базовой концепцией вышеперечисленных способов математического описания процесса энергопотребления по мгновенным значениям, все потоки электрической энергии в единицу времени разделяются на несколько независимых компонент, определяемые как результаты скалярного и векторного произведений трехмерных векторов напряжений и токов во временной области с использованием различного рода линейных ортогональных преобразований, вследствие чего одна из мгновенных мощностей будет одновременно характеризоваться как евклидовой нормой, так и направляющими косинусами, что не соответствует классическим правилами представления данной физической величины, принятым, например, в механике [55].

Помимо данного теоретического противоречия, в исходной $p-q$ теории амплитуда результирующего вектора мощности не равна произведению евклидовых норм напряжений и тока, что не позволяет использовать данный количественный показатель в качестве аналога полной мгновенной мощности [161]. При этом наличие одного активного и трех реактивных токов в ее расширенной модификации приводит к их линейной зависимости и, как следствие, усложнению структуры системы управления АСФ [56], также как и в случае $d-q$ преобразования координат, в рамках которого три постулированные энергетические характеристики являются функцией комплексной переменной и не могут быть одновременно отображены в двумерном пространстве.

Более корректной с физической точки зрения является формулировка P. Salmerón и J. C. Montaño, основанная на предварительном разложении фазных напряжений по трем взаимно перпендикулярным осям, скалярное умножение ко-

торых на пространственный вектор токов нагрузки определяет три независимых мгновенных мощности [168]. Однако в случае трехфазной нелинейной нагрузки с изолированной нейтральной точкой, в которой отсутствуют нулевые составляющие в электрических переменных, данная ортогональная декомпозиция становится линейно-зависимой, вырождаясь в тривиальные расчетные соотношения.

Помимо этого, современные методы математического описания потоков электрической энергии в единицу времени не позволяют достаточно ясно объяснить физический смысл протекающих процессов в нелинейных цепях, а техническая реализация синтезированных на их основе алгоритмов активной фильтрации требует наличия высокоскоростной микропроцессорной элементной базы из-за необходимости перемножения координат трехмерных векторов и хранения 9-ти элементов матриц [41, 56]. Так, например, формирование компенсационных воздействий в рамках $p-q$ и $p-q-r$ теорий требует выполнения соответственно 50 и 70 математических операций типа произведение, а также 20 и 26 сложений с различными знаками [160]. В свою очередь отсутствие строгого определения правил векторного произведения применительно к матрицам-столбцам [121] может приводить к неоднозначности получаемых результатов, т.к. структура и численные значения элементов соответствующей квадратной матрицы размерностью $\dim 3 \times 3$ могут принимать произвольную форму, как, например, это имеет место в работах [155] и [202].

При этом также необходимо отметить, что техническая реализация алгоритмов активной фильтрации в рамках геометрического подхода основывается на первоначальном линейном ортогональном преобразовании исходного базиса или алгебраического вектора фазных переменных, которое согласно теореме Эйлера [12] соответствует математической операции типа вращение. Переход к новым координатам состояния, позволяющим отдельно выделить нулевую последовательность фаз, традиционно выполняется при помощи квадратной матрицы направляющих косинусов размерностью $\dim 3 \times 3$, девять элементов которой связаны между собой с помощью шести уравнений связи. В тоже время в классической

механике твердого тела, управлении летательными аппаратами и аэрокосмической навигации широко используются другие формы представления конечного поворота, к числу которых относятся три независимых угла Эйлера-Крылова, а также четыре кинематических параметра Родрига-Гамильтона и четыре комплексные величины Кэли-Клейна [12, 62], что дает возможность минимизировать вычислительные затраты при построении цифровой системы управления АСФ.

Описанные выше недостатки современных теорий можно исключить путем перехода к анализу режимов работы трехфазных систем переменного тока по мгновенным значениям с использованием некоммутативной алгебры кватернионов. В этом случае представляется возможным в рамках единого математического аппарата выделить в уравнении баланса мгновенных мощностей вещественную и мнимую составляющие, давая, таким образом, наглядную физическую интерпретацию “полезных” и неэффективных [47] потоков электрической энергии в единицу времени [56, 59]. При этом аналитические соотношения для расчета текущих значений вещественных коэффициентов кватерниона мгновенной мощности трехфазной линейной симметричной нагрузки полностью совпадают с классическими формулами для вычисления активной, реактивной и полной мощностей [63–65] и непосредственно получаются как результат произведения гиперкомплексных чисел без дополнительного интегрирования квадратичных зависимостей фазных токов и напряжений. В свою очередь процедура синтеза алгоритмов активной фильтрации в рамках данного математического аппарата не требует привлечения линейных ортогональных преобразований, что в конечном итоге позволяет сократить количество выполняемых математических действий и таким образом снизить требования по производительности и быстродействию, которые предъявляются к программно-аппаратной части системы управления АСФ [67].

Таким образом, целью диссертационной работы является развитие общих положений и методов теории активной и реактивной мгновенных мощностей трехфазных потребителей произвольного вида (нелинейных и несимметричных) в терминах алгебры гиперкомплексных чисел применительно к решению приклад-

ных задач повышения энергоэффективности процессов передачи, распределения и преобразования электрической энергии переменного тока на основе активных силовых фильтров.

Для достижения сформулированной цели требуется решение следующих задач:

1. Провести аналитическое исследование различных форм представления кинематических параметров линейных преобразований фазных переменных с соблюдением условия инвариантности скалярных величин.
2. Обобщить основные положения современных теорий мгновенной мощности несимметричных и/или нелинейных цепей переменного тока с целью выявления имеющих место различного рода недостатков и теоретических противоречий.
3. Проанализировать уравнение баланса мгновенных мощностей трехфазных нагрузок произвольного вида в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ с целью определения его компонент, не участвующих в процессе преобразования электрической энергии на стороне потребителя.
4. Рассмотреть структурно-алгоритмические принципы построения электротехнических и электромеханических систем переменного тока с АСФ, в которых достигается снижение или полное исключение активных потерь от действия неэффективных (неактивных) составляющих мгновенной мощности.
5. Выполнить синтез алгоритмов активной фильтрации в терминах гиперкомплексных чисел, которые могут быть реализованы на менее производительной программно-аппаратной базе или с более высоким быстродействием, чем традиционные системы управления силовыми преобразовательными устройствами компенсации.

Поставленные задачи решаются на основании использования специальных разделов высшей математики, методов анализа и синтеза теории автоматического управления, теории переходных процессов в электрических цепях переменного тока, математического моделирования и экспериментальных исследований.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

1. Теоретически и экспериментально обоснована целесообразность практического применения алгебры кватернионов для управления силовыми полупроводниковыми устройствами активной фильтрации при построении энергоэффективных электротехнических систем переменного тока с трехфазными потребителями произвольного вида.

2. Получены аналитические выражения, связывающие между собой различные формы представления кинематических параметров ортогональных преобразований фазных переменных E. Clarke и R. H. Park, которые в зависимости от класса решаемых задач позволяют существенно упростить процедуры анализа и синтеза электротехнических и электромеханических систем переменного тока.

3. На основании выделения в уравнении баланса мгновенных мощностей действительной и мнимой частей, расположенных в отдельных подпространствах, дана физическая интерпретация потоков электрической энергии переменного тока в единицу времени при параметрической асимметрии и нелинейности цепей трехфазного потребителя.

4. Разработан новый теоретический прием к разделению трехфазной системы негармонических токов на активную и реактивную составляющие, позволяющий без дополнительных промежуточных преобразований электрических величин определять компенсационные воздействия на выходе активных силовых фильтров по прямым измерениям напряжений и токов нагрузки.

5. Решена оптимальная задача минимизации нормы кватерниона потребляемых от источника фазных токов, техническая реализация которой в электротехнических и электромеханических системах позволит снизить активные потери от действия неактивных составляющих мгновенной мощности.

6. Синтезированы алгоритмы компенсации кватерниона мгновенной неэффективной мощности, позволяющие обеспечить в трехфазной системе с нагрузкой произвольного вида единичный или опережающий коэффициент мощности при

гармонической форме потребляемых от источника токов с одновременным включением обратной и нулевой последовательностей фаз.

Теоретическая и практическая значимость работы:

1. С единых позиций математического аппарата метода пространства состояний обобщены различные подходы к разделению трехфазной системы негармонических токов на активную и реактивную компоненты, которые базируются на современных теориях мгновенной мощности и элементах векторной алгебры.
2. Определены расчетные соотношения для нахождения координат эйлеровой оси вращения и конечного угла поворота вектора фазных переменных в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ при линейном ортогональном преобразовании исходного базиса E . Clarke.
3. Сформулированы области практического применения алгоритмов компенсации неактивных потоков электрической энергии переменного тока, синтезированных на основе различных современных теорий мгновенной мощности.
4. Разработана инженерная методика синтеза законов управления токами компенсации, основанная на предварительном формировании исключаемого при помощи активного силового фильтра кватерниона мгновенной неэффективной мощности.
5. Получена математическая модель электромагнитных процессов асинхронной машины двойного питания с использованием гиперкомплексных чисел, в которой в явном виде присутствуют вещественная и мнимая части уравнения баланса мгновенной мощности, что создает теоретические предпосылки к синтезу энергооптимальных алгоритмов векторного управления асинхронным двигателем.
6. Представлены формулы для определения параметров ПИ-регулятора астатического контура регулирования напряжения звена постоянного тока силового полупроводникового устройства активной фильтрации, позволяющего осуществлять предварительный заряд конденсаторной батареи с последующей стабилизацией выходной переменной на заданном уровне.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Обоснование практического применения математического аппарата алгебры кватернионов при построении трехфазных систем переменного тока с активными силовыми фильтрами.
2. Инвариантные относительно скалярных величин ортогональные преобразования фазных переменных с использованием кинематических параметров Родрига-Гамильтона.
3. Критерии энергоэффективности электротехнических систем в терминах гиперкомплексных чисел, описывающие качество процесса энергопотребления несимметричных и/или нелинейных нагрузок при произвольной мгновенной форме сигналов.
4. Аналитический метод выделения компенсируемых при помощи активных силовых фильтров неактивных потоков электрической энергии в кватернионном базисе, основанный на разделении уравнения баланса мгновенных мощностей на действительную и мнимую части.
5. Закон оптимального управления силовым преобразовательным устройством компенсации, в рамках которого достигается минимум нормы кватерниона потребляемых токов.
6. Методы синтеза алгоритмов активной фильтрации в четырехмерном гиперкомплексном пространстве, базирующиеся на предварительном искажении токов источника с целью обеспечения их гармонического закона изменения с желаемым угловым сдвигом относительно соответствующего напряжения.

Достоверность полученных в ходе выполнения диссертационного исследования результатов и выводов подтверждается корректной постановкой задач, адекватностью математического аппарата некоммутативной алгебры кватернионов, цифровым моделированием и экспериментальной верификацией.

Основное содержание работы и ее отдельные положения докладывались и обсуждались на международных конференциях “Актуальные проблемы электронного приборостроения” в 2008 г., 2010 г., 2012 г., 2014 г. (г. Новосибирск);

Научно-технической конференции с международным участием “Электротехника, электромеханика и электротехнологии” в 2009 г. (г. Новосибирск); Всероссийской научно-практической конференции “Автоматизированный электропривод и промышленная электроника” в 2012 г. (г. Новокузнецк); Международных конференциях по автоматизированному электроприводу в 2012 г. (г. Иваново) и 2014 г. (г. Саранск); Международной научно-технической конференции “Проблемы автоматизированного электропривода: теория и практика” в 2013 г. (Крым, Украина); Международных конференциях молодых специалистов по микро/нанотехнологиям и электронным приборам в 2012–2015 г.г. (Алтай, Эрлагол).

Диссертационная работа состоит из пяти глав, в первой из которых рассматриваются вопросы, связанные с линейными ортогональными преобразованиями Е. Clarke и R. H. Park применительно к линейно независимой системе трехфазных переменных, которые широко используются при анализе переходных процессов в электрических машинах переменного тока, разработке систем векторного управления частотой вращения ротора и магнитным состоянием синхронных и асинхронных электроприводов, формировании компенсационных воздействий на выходе силовых полупроводниковых устройств активной фильтрации и т.д. На основании свойства изоморфизма математической операции вращения в трехмерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ по отношению к подобному преобразованию в кватернионном Q -базисе, в работе получены расчетные соотношения для перехода от одной формы представления кинематических параметров к другой, позволяющие в зависимости от класса решаемых задач существенно упрощать последующие процедуры анализа или синтеза трехфазных электротехнических и электромеханических систем различного назначения.

Во второй главе с единых позиций метода пространства состояний изложены основные положения классических методов расчета линейных активно-реактивных цепей при гармонической форме сигналов, а также базовые принципы математического описания процесса энергопотребления трехфазных нагрузок общего вида во временной области, в рамках которых активная и реактивная

мгновенные мощности задаются соответственно как результат скалярного и векторного произведений трехмерных векторов напряжения и тока после различного рода линейных ортогональных преобразований исходного базиса. Представленный в данном разделе сравнительный анализ различных подходов к разделению потока электрической энергии в единицу времени позволил выявить ряд их теоретических и практических недостатков, основной из которых заключается в ошибочном представлении скалярной мгновенной мощности в форме пространственного вектора.

Третья глава пояснительной записки посвящена аналитическому исследованию кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ при различных видах трехфазных потребителей переменного тока, которые подключены к источнику с произвольной формой выходных напряжений. Как следует из представленных в данном разделе результатов, любое отличие в параметрах одной из фаз нагрузки по отношению к двум другим и/или искажение в гармонической форме сигналов по мгновенным значениям приводит к появлению мнимой составляющей $\mathbf{P}_{ABC}$ с одновременным возникновением периодических колебаний в вещественной части $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$, в связи с чем последние подлежат последующему исключению из общего потока электрической энергии посредством АСФ. В качестве графической иллюстрации временных законов изменения гиперкомплексных величин, описывающих процесс энергопотребления несимметричными активно-реактивными цепями, в данном разделе представлены соответствующие графические зависимости, полученные методом цифрового моделирования в программной среде “MATLAB” R2008b.

Четвертый раздел диссертации связан с процедурой структурно-параметрического синтеза алгоритмов активной фильтрации, полученных на основании правил некоммутативной алгебры кватернионов и постулированных определений современных теорий мгновенной мощности, включающих в себя исходную и модифицированную $p-q$ теории, обобщенную, $p-q-r$ и $d-q$ теории, а также векторную формулировку J. C. Montaño и P. Salmerón. В зависимости от

того или иного подхода к математическому описанию энергетических характеристик, в работе сформулированы конечные цели повышения энергоэффективности трехфазных систем переменного тока, которые достигаются в рамках соответствующих законов компенсации, осуществляющих полное или частичное исключение из общего потока электрической энергии различного рода неактивных составляющих. В четвертой главе также подробно рассмотрены классификационные признаки и вопросы технической реализации АСФ, включающие в себя численный расчет параметров силовой схемы, типовые настройки динамических подсистем выделения постоянных и переменных составляющих в составе мгновенной мощности нагрузки, синтез быстродействующих трехканальных контуров регулирования выходных токов автономного инвертора в классе законов разрывного и непрерывного управления, методика определения коэффициентов передачи ПИ-регулятора напряжения силовой емкости и т.д.

В заключительной пятой главе представлены результаты экспериментального исследования синтезированных алгоритмов компенсации кватерниона мгновенной неэффективной мощности, выполненного на базе специализированной установки в составе персонального компьютера со встроенным многоканальным блоком ЦАП–АЦП, измерительной аппаратуры, понижающего трансформатора, общепромышленного силового преобразовательного устройства типа “ЭРАТОН–М4” с частотой коммутации IGBT-модулей 2,7 кГц, а также активно-реактивной несимметричной нагрузки с полупроводниковыми вентилями. Численный расчет компенсационных воздействий по мгновенным значениям производился на основании текущей информации с датчиков токов и напряжений при помощи управляющей программы на языке C++, которые в дальнейшем через АЦП поступали на вход непрерывного трехканального контура регулирования выходных токов АСФ, включающего в себя последовательное пропорционально-интегрирующее корректирующее устройство, двухуровневый мостовой автономный инвертор напряжения с конденсаторной батареей и выходные сглаживающие реакторы. Приведенные в данной главе экспериментальные зависимости потребляемых нели-

нейной нагрузкой токов до и после начала процесса компенсации наглядно иллюстрируют принцип действия и эффективность разработанных алгоритмов активной фильтрации, подтверждая, таким образом, правильность полученных ранее теоретических результатов.

Приложение структурно состоит из двух частей, в которых представлены промежуточные результаты вывода расчетных соотношений для определения текущих значений различных норм кватерниона мгновенной мощности применительно к несимметричным линейным RLC-нагрузкам, а также вещественных коэффициентов $\mathbf{P}_{ABC}$ при произвольных законах изменения фазных напряжений и токов с разложением каждой из гармоник в виде суммы прямой, обратной и нулевой последовательности фаз.

1 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ В ЗАДАЧАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФАЗНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Линейные ортогональные преобразования фазных переменных

При синтезе алгоритмов векторного управления частотой вращения и магнитным состоянием асинхронного двигателя [83, 86, 87], анализе процессов в электрических машинах переменного тока [13, 42, 84], формировании компенсационных воздействий на выходе силовых полупроводниковых устройств активной фильтрации [60, 129–132], распределении потоков трехфазной энергии в автономных системах генерации [112] и т.д., широко используются математические модели объекта, полученные на основании линейных ортогональных преобразований исходного базиса или алгебраического вектора фазных переменных. Например, данный подход к описанию процесса электромеханического преобразования энергии асинхронной машиной позволяет исключить из уравнений электрического равновесия и магнитных связей периодические коэффициенты, привести матрицы параметров к диагональному виду, более просто учесть нелинейность кривой намагничивания и т.д. [69, 72].

При традиционном векторно-матричном способе математического описания в пространстве состояний [17, 70, 85, 89] трехфазные переменные задаются в виде алгебраического вектора-столбца

$$\mathbf{x}_{ABC} = [x_A \quad x_B \quad x_C]^T, \quad (1.1)$$

где T – символ транспонирования; x_A, x_B, x_C – мгновенные или усредненные за период дискретизации значения фазных напряжений или токов, и при соблюдении условия симметрии

$$x_A + x_B + x_C = 0, \quad (1.2)$$

описываются следующей системой уравнений [54, 66, 180]

$$\begin{cases} x_A = x_m \cos \omega t, \\ x_B = x_m \cos(\omega t - 120^\circ), \\ x_C = x_m \cos(\omega t + 120^\circ), \end{cases} \quad (1.3)$$

где x_m – амплитуда гармонического сигнала с угловой частотой $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$.

В более общем случае, при наличии нейтрального проводящего контура в трехфазной системе, условие (1.2) принимает вид неравенства

$$x_A + x_B + x_C \neq 0, \quad (1.4)$$

которое можно учесть путем дополнения правой части каждого из уравнений (1.3) нулевой составляющей, которая находится как [10, 42]

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C). \quad (1.5)$$

При этом, как отмечается в [13], данную величину не следует отождествлять с нулевой последовательностью фаз, т.к. закон изменения во времени x_0 может подчиняться гораздо более сложной зависимости.

С учетом последнего алгебраического равенства и формулы разложения косинуса с аргументом в виде суммы (разности) двух углов [44, 116]

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad (1.6)$$

гармонические зависимости фазных переменных можно представить в виде [69, 179]

$$\begin{cases} x_A = x_m \cos \omega t + x_0, \\ x_B = x_m \cos(\omega t - 120^\circ) + x_0 = -\frac{1}{2} x_m \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} x_m \sin \omega t + x_0, \\ x_C = x_m \cos(\omega t + 120^\circ) + x_0 = -\frac{1}{2} x_m \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} x_m \sin \omega t + x_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Далее, примем в качестве “новых” координат состояния трехфазной системы следующие переменные

$$x_\alpha = x_m \cos \omega t, \quad x_\beta = x_m \sin \omega t, \quad x_o = x_0,$$

из которых в дальнейшем сформируем следующий алгебраический вектор-столбец

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_o \end{bmatrix}^T. \quad (1.8)$$

Используя векторно-матричную форму записи, система алгебраических уравнений (1.7) примет следующий вид

$$\mathbf{x}_{ABC} = \mathbf{L} \mathbf{x}_{\alpha\beta o},$$

где $\mathbf{L}$ – квадратная матрица размерностью $\dim \mathbf{L} = 3 \times 3$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

определитель которой отличен от нуля

$$\det \mathbf{L} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \frac{3}{2} \neq 0.$$

По своей сути данная квадратная матрица описывает линейное разложение исходного ортонормированного базиса фазных переменных $\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_C$ через некоторые неединичные векторы $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_o$ трехмерного вещественного пространства $\mathcal{R}^3$ при асимметрии вида (1.4), координаты которых представляют собой столбцы $\mathbf{L}$ и находятся как

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Как нетрудно заметить, базисные векторы являются ортогональными

$$\mathbf{e}_\alpha^T \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\beta^T \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^T \mathbf{e}_o = \mathbf{e}_o^T \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta^T \mathbf{e}_o = \mathbf{e}_o^T \mathbf{e}_\beta = 0,$$

т.е. являются линейно независимыми, а для их нормирования каждый элемент (1.9) разделим на собственную евклидову норму

$$\|\mathbf{e}_\alpha\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|\mathbf{e}_\beta\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|\mathbf{e}_o\| = \sqrt{3},$$

в результате чего окончательно получаем

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что матрица линейного разложения имеет единичный определитель $\det \mathbf{L} = 1$ и является ортогональной $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^T = \text{adj} \mathbf{L}$, т.е. скалярное произведение (евклидова норма векторов и косинус угла) в обоих ортонормированных базисах $\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_C$ и $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_o$ остаются неизменным, а обратное преобразование выполняется как [114]

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{P}_{\alpha\beta o} \mathbf{x}_{ABC}, \quad (1.10)$$

здесь $\mathbf{P}_{\alpha\beta o} = \mathbf{L}^{-1}$ – квадратная ортогональная матрица направляющих косинусов при переходе от фазных переменных к координатам состояния x_α, x_β, x_o

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta o} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

В качестве геометрической интерпретации данного линейного преобразования с квадратной матрицей $\mathbf{P}_{\alpha\beta o}$, носящего название Clarke Transformation [144], можно рассмотреть пространственное расположение координатных осей α, β, o на примере электрической машины переменного тока. В этом случае взаимно перпендикулярные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_\alpha$ и $\tilde{\mathbf{e}}_\beta$ находятся в плоскости поперечного сечения, причем $\tilde{\mathbf{e}}_\alpha$ направлена вдоль фазной обмотке A , а вектор $\tilde{\mathbf{e}}_o$ ориентируется вдоль вала. В этом случае компоненты алгебраического вектора вида (1.8) можно отождествить с проекциями пространственного вектора на соответствующие

щие координатные оси, угловое положение которого в плоскости $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$ трехмерного вещественного пространства $\mathbb{R}^3$ определяется как

$$\gamma = \arctg \frac{x_\beta}{x_\alpha} = \arctg \frac{x_m \sin \omega t}{x_m \cos \omega t} = \arctg(\tg \omega t) = \omega t, \quad (1.12)$$

т.е. осуществляется вращение $\mathbf{x}_{\alpha\beta o}$ с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки (положительное направление углов).

Таким образом, прямая $\mathbf{P}_{\alpha\beta o}$ и обратная $\mathbf{P}_{\alpha\beta o}^{-1}$ матрицы связаны между собой через математическую операцию транспонирования и инвариантны к скалярному произведению, в результате чего при обратный переход осуществляется как

$$\mathbf{x}_{ABC} = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^{-1} \mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{x}_{\alpha\beta o}. \quad (1.13)$$

В классической теории электрических машин переменного тока для исключения функциональной зависимости параметров математической модели объекта от угла поворота вала также широко используется дополнительный переход от собственных систем координат статора и ротора к единому базису $\mathbf{e}_d, \mathbf{e}_q, \mathbf{e}_o$ [66, 68, 80, 180] при помощи линейного преобразования, называемого в зарубежных источниках Park Transformation [42, 182], а в отечественной литературе Парка-Горева [13]

$$\mathbf{x}_{dqo} = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{P}_{\alpha\beta o} \mathbf{x}_{ABC}, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{x}_{dqo} = [x_d \ x_q \ x_o]^T$ – алгебраический вектор-столбец в едином базисе трехмерного евклидова пространства $\mathbf{x}_{dqo} \in \mathbb{R}^3$, у которого осуществляется вращение координатных осей d, q , направленных через $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$, а ось o остается неизменной; $\mathbf{A}(\Theta)$ – ортогональная матрица поворота плоскости α, β на произвольный угол Θ против хода часовой стрелки [179]

$$\mathbf{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

В силу ортогональности (1.14) можно записать следующие равенства, в соответствии с которыми осуществляется обратный переход к координатам состояния α, β, o [42, 69]

$$\mathbf{A}^{-1}(\Theta) = \frac{\text{adj} \mathbf{A}(\Theta)}{\det \mathbf{A}(\Theta)} = \mathbf{A}^T(\Theta) = \mathbf{A}(-\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{A}(\Theta) = \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1,$$

причем в частном случае, когда угловая скорость отсутствует и справедливо $\dot{\Theta} = \Theta = 0$, матрица преобразования $\mathbf{A}(\Theta)$ становится единичной, т.е.

$$\mathbf{A}(0^\circ) = \mathbf{E}.$$

В заключение необходимо отметить, что математическое представление линейных преобразований вида (1.10) и (1.14) с помощью матрицы направляющих косинусов является неединственным и может быть задано в форме других кинематических параметров.

1.2 Основные положения некоммутативной алгебры кватернионов

Согласно теореме Л. Эйлера [20], произвольное угловое движение твердого тела с неподвижной фиксированной точкой в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$ может быть задано в форме линейного преобразования типа вращения относительно некоторой оси, носящей название эйлеровой, на определенный угол. При этом в качестве кинематических величин для описания конечного поворота могут выступать девять направляющих косинусов с 6-ю уравнениями связей, три угла Эйлера-Крылова, а также четыре параметра Родрига-Гамильтона или Кэли-Клейна [62]. Последние два подхода основываются на математическом аппарате некоммутативной алгебры четырехмерных гиперкомплексных чисел (кватернионов), который позволяет в достаточно простой и удобной форме выполнить переход к новым координатам состояния, заданным с помощью соответствующей ортогональной матрицы направляющих косинусов размерностью $\dim 3 \times 3$.

1.2.1 Алгебраическая и тригонометрическая формы записи гиперкомплексного числа

В кинематических задачах ориентации и вращения твердого тела в трехмерном пространстве широко используются кватернионы (от лат. quaterni - по четыре), представляющие собой специальный математический объект, состоящий из одной действительной 1 и трех мнимых единиц $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ с вещественными коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [153]

$$\Lambda = \lambda_0 \circ 1 + \lambda_1 \circ \mathbf{q}_1 + \lambda_2 \circ \mathbf{q}_2 + \lambda_3 \circ \mathbf{q}_3, \quad (1.16)$$

где $\circ$ – символ умножения в алгебре кватернионов,
для которых постулируются 16 правил умножения [26]

$$1 \circ 1 = 1, \quad 1 \circ \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k \circ 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_k \circ \mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klm} \circ \mathbf{q}_m, \quad (1.17)$$

здесь $k, l, m = 1, 2, 3$ – нижний индекс, показывающий порядковый номер мнимой единицы; δ_{kl} – трехмерный символ Кронекера, симметричный по своим индексам $\delta_{kl} = \delta_{lk}$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = l, \\ 0, & \text{при } k \neq l; \end{cases}$$

ε_{klm} – антисимметричный по индексам трехмерный символ Леви-Чивиты [44], который удовлетворяет следующим равенствам

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$$

и равен нулю, если два или три индекса равны друг другу.

В качестве графической иллюстрации произведения $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ друг на друга на рисунке 1.1 изображена диаграмма, из которой видно, что при движении против часовой стрелки получается третья единица со знаком “+”, а если в обратном направлении, то с “–”.

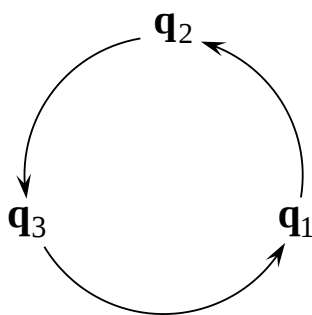


Рисунок 1.1 – Геометрическая интерпретация произведения
трех мнимых единиц кватерниона

Как следует из 16-ти постулированных правил (1.17), произведение двух кватернионов некоммутативно, причем в данной алгебре, обозначаемой как Q [26], справедливы следующие правила [3]

– коммутативности по сложению (переместительный закон)

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_2 + \Lambda_1;$$

– ассоциативности по сложения (сочетательный закон)

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \Lambda_3 = \Lambda_1 + (\Lambda_2 + \Lambda_3);$$

– ассоциативности по умножению

$$(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) \circ \Lambda_3 = \Lambda_1 \circ (\Lambda_2 \circ \Lambda_3);$$

– дистрибутивности

$$\Lambda_1 \circ (\Lambda_2 + \Lambda_3) = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 + \Lambda_1 \circ \Lambda_3.$$

Множитель перед единицей носит название скалярной (действительной) части кватерниона $\text{scal}\Lambda = \lambda_0 \circ 1$, а линейная комбинация с мнимыми единицами относится к векторной составляющей

$$\text{vect}\Lambda = \lambda_1 \circ \mathbf{q}_1 + \lambda_2 \circ \mathbf{q}_2 + \lambda_3 \circ \mathbf{q}_3.$$

В данной Q -алгебре, относящейся к группе “очень хороших” [27], также используются определения сопряженного кватерниона [12, 26, 36, 109]

$$\hat{\Lambda} = \text{scal}\Lambda - \text{vect}\Lambda = \lambda_0 \circ 1 - \lambda_1 \circ \mathbf{q}_1 - \lambda_2 \circ \mathbf{q}_2 - \lambda_3 \circ \mathbf{q}_3,$$

откуда

$$\text{scal}\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda + \hat{\Lambda}), \quad \text{vect}\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda - \hat{\Lambda});$$

модуля

$$|\Lambda| = \sqrt{\Lambda \circ \hat{\Lambda}} = \sqrt{\hat{\Lambda} \circ \Lambda} = \sqrt{\sum_{k=0}^3 \lambda_k^2},$$

или иначе нормы

$$\|\Lambda\| = |\Lambda|^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2, \tag{1.18}$$

а также обратного кватерниона

$$\Lambda^{-1} = \frac{\widehat{\Lambda}}{\|\Lambda\|} = \frac{\widehat{\Lambda}}{|\Lambda|^2}. \quad (1.19)$$

В целях упрощения изложения дальнейшего материала, представим (1.16) как [12]

$$\Lambda = |\Lambda| \circ \left(\frac{\text{scal}\Lambda}{|\Lambda|} + \frac{\text{vect}\Lambda}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| \circ \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{|\Lambda|} \circ \xi \right),$$

где ξ – единичный трехмерный вектор, направленный по $\text{vect}\Lambda$

$$\xi = \frac{\text{vect}\Lambda}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = \frac{\lambda_1 \circ \mathbf{q}_1 + \lambda_2 \circ \mathbf{q}_2 + \lambda_3 \circ \mathbf{q}_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = \xi_1 \circ \mathbf{q}_1 + \xi_2 \circ \mathbf{q}_2 + \xi_3 \circ \mathbf{q}_3, \quad (1.20)$$

являющийся аналогом мнимой единицы $j = \sqrt{-1}$ в функции комплексной переменной применительно к четырехмерному гиперкомплексному пространству $\mathbf{H}$ [26], для которого также справедливо равенство

$$\xi \circ \xi = -1. \quad (1.21)$$

Учитывая тот факт, что сумма квадратов скалярной части и коэффициента перед ξ равна единице, то окончательно произвольный кватернион можно представить в тригонометрической форме как

$$\Lambda = |\Lambda| \circ \left(\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \circ \xi \right) = |\Lambda| \circ \left(\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \circ (\xi_1 \circ \mathbf{q}_1 + \xi_2 \circ \mathbf{q}_2 + \xi_3 \circ \mathbf{q}_3) \right), \quad (1.22)$$

здесь $\gamma/2$ – некоторый угол, который связан с вещественными коэффициентами кватерниона на основании следующей зависимости

$$\frac{\gamma}{2} = \text{arctg} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\lambda_0}. \quad (1.23)$$

Остановимся более подробно на произведении двух кватернионов без скалярных частей [36]

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = (\lambda_{11} \circ \mathbf{q}_1 + \lambda_{21} \circ \mathbf{q}_2 + \lambda_{31} \circ \mathbf{q}_3) \circ (\lambda_{12} \circ \mathbf{q}_1 + \lambda_{22} \circ \mathbf{q}_2 + \lambda_{32} \circ \mathbf{q}_3),$$

в результате чего в соответствии с (1.17) получаем

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = -(\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32}) + \det \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

или иначе

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \text{scal}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) + \text{vect}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2).$$

Если воспользоваться определениями скалярного и векторного произведений, то

$$\text{scal}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) = -(\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32}) = -|\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| \cdot \cos \varphi,$$

здесь φ – угол между Λ_1 и Λ_2 ,

а $\text{vect}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)$ представляет собой вектор ортогональный плоскости, проведенной через Λ_1 и Λ_2 , имеющий модуль

$$|\text{vect}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)| = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| \sin \varphi.$$

Если, например, принять $\Lambda_1 = \mathbf{q}_1$ и $\Lambda_2 = \mathbf{q}_2$, то результатом произведения в соответствии с постулированными правилами (1.17) будет равенство $\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$, т.е. мнимые единицы $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ являются взаимно ортогональными векторами с единичным модулем $|\mathbf{q}_k| = 1$, в результате чего их можно отождествить с ортами, образующими правый базис трехмерного пространства [26, 102]. Помимо этого, перемена мест сомножителей в (1.24) оставляет без изменения скалярную часть и меняет между собой вторую и третью строки в определителе [12]

$$\text{scal}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) = \text{scal}(\Lambda_2 \circ \Lambda_1), \quad \text{vect}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) = -\text{vect}(\Lambda_2 \circ \Lambda_1), \quad (1.25)$$

т.е. изменяется направление векторной составляющей кватерниона [44], в результате чего

$$2\text{vect}(\Lambda_1 \circ \Lambda_2) = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 - \Lambda_2 \circ \Lambda_1, \quad (1.26)$$

или применительно к операции сопряжения результата произведения

$$\Lambda_1 \overset{\circ}{\circ} \Lambda_2 = \widehat{\Lambda}_2 \circ \widehat{\Lambda}_1, \quad (1.27)$$

а также выделения нормы

$$\|\Lambda_1 \circ \Lambda_2\| = (\Lambda_1 \circ \Lambda_2) \circ \left(\Lambda_1 \overset{\circ}{\circ} \Lambda_2 \right) = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \widehat{\Lambda}_2 \circ \widehat{\Lambda}_1,$$

$$\|\Lambda_1 \circ \Lambda_2\| = \Lambda_1 \circ \|\Lambda_2\| \circ \widehat{\Lambda}_1 = \|\Lambda_2\| \circ \Lambda_1 \circ \widehat{\Lambda}_1 = \|\Lambda_2\| \circ \|\Lambda_1\| = \|\Lambda_1\| \circ \|\Lambda_2\|. \quad (1.28)$$

1.2.2 Геометрические свойства векторной части кватерниона в четырехмерном гиперкомплексном пространстве

Рассмотрим геометрические свойства векторной части кватерниона в четырехмерном гиперкомплексном пространстве $\mathbb{H}$

$$\mathbf{R} = r_1 \circ \mathbf{q}_1 + r_2 \circ \mathbf{q}_2 + r_3 \circ \mathbf{q}_3,$$

применительно к подобному линейному преобразованию [75]

$$\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}, \quad (1.29)$$

где Λ – произвольный кватернион, представленный в тригонометрической форме (1.22); Λ^{-1} – обратный кватернион, определяемый по формуле (1.19)

$$\Lambda^{-1} = |\Lambda|^{-1} \circ \left(\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \circ \xi \right);$$

$\mathbf{R}'$ – кватернион после линейного преобразования (1.29), который после раскрытия скобок находится как

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + (\xi \circ \mathbf{R} - \mathbf{R} \circ \xi) \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - (\xi \circ \mathbf{R} \circ \xi) \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

На основании (1.21) и (1.26), а также правила дистрибутивности, можно записать, что

$$\xi \circ \mathbf{R} \circ \xi = \text{scal}(\xi \circ \mathbf{R}) \circ \xi + \frac{1}{2} (\xi \circ \mathbf{R} - \mathbf{R} \circ \xi) \circ \xi,$$

$$\xi \circ \mathbf{R} \circ \xi = 2 \text{scal}(\xi \circ \mathbf{R}) \circ \xi + \mathbf{R},$$

откуда принимая во внимание (1.25), а также тригонометрические формулы разложения синуса и косинуса в функции половинного угла [44, 116]

$$\cos \gamma = \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\|\Lambda\|}, \quad (1.30)$$

$$\sin \gamma = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2 \lambda_0 \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\|\Lambda\|}, \quad (1.31)$$

причем

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = \|\Lambda\|^{-2} \left(\sum_{k=0}^3 \lambda_k^4 + 2(\lambda_0^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_2^2 \lambda_3^2) \right),$$

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = \|\Lambda\|^{-2} (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 = 1,$$

получаем

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} \cos \gamma + \text{vect}(\xi \circ \mathbf{R}) \sin \gamma - 2 \text{scal}(\xi \circ \mathbf{R}) \circ \xi \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

или с учетом формулы (1.30)

$$\mathbf{R}' = -\text{scal}(\xi \circ \mathbf{R}) \circ \xi + (\mathbf{R} + \text{scal}(\xi \circ \mathbf{R}) \circ \xi) \cos \gamma + \text{vect}(\xi \circ \mathbf{R}) \sin \gamma, \quad (1.32)$$

т.е. получившийся кватернион сохраняет нулевую скалярную часть и линейно раскладывается на три составляющие [74, 75]

$$\mathbf{R}' = r'_1 \circ \mathbf{q}_1 + r'_2 \circ \mathbf{q}_2 + r'_3 \circ \mathbf{q}_3 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \cos \gamma + \mathbf{R}_3 \sin \gamma, \quad (1.33)$$

где $\mathbf{R}_1 = |\mathbf{R}| \cos \varphi \circ \xi$ – вектор, совмещенный с ξ ; $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ – взаимно ортогональные векторы с модулем

$$|\mathbf{R}_2| = |\mathbf{R}_3| = |\mathbf{R}| \sin \varphi,$$

образующие плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{R}_1$, или иначе, к $\text{vect} \Lambda$.

Как видно из рисунка 1.2, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ геометрическим образом образуют правую тройку векторов, определяющих пространственное положение $\mathbf{R}'$ в функции γ . Так, например, если выбрать $\gamma/2 = 0$, то исходный вектор остается без изменения

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{R},$$

а при соблюдении условия $\gamma/2 = 90^\circ$ становится справедливым

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2,$$

т.е. вектор $\mathbf{R}$ поворачивается по конусу с осью ξ на угол π .

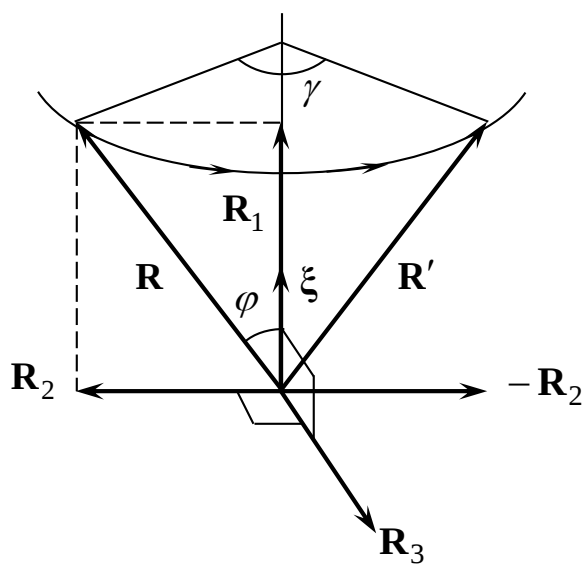


Рисунок 1.2 – Геометрическая интерпретация линейного преобразования векторного кватерниона $\mathbf{R}$ вида (1.29) при $\gamma/2 = 90^\circ$

Таким образом, математическая операция (1.29) в четырехмерном гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ осуществляет инвариантное относительно скалярной величины (модуля или нормы) линейное преобразование чисто векторного кватерниона $\mathbf{R}$ путем его вращения против хода часовой стрелки на удвоенный угол $\gamma/2$ относительно эйлеровой оси $\text{vect}\mathbf{\Lambda}$, или иначе оси ξ с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 , которая не изменяет своего положения

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda} \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} &= \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \circ \mathbf{\Lambda} \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} \circ \widehat{\mathbf{\Lambda}} = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \circ (\lambda_0 \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} - \|\text{vect}\mathbf{\Lambda}\|) \circ \widehat{\mathbf{\Lambda}}, \\ \mathbf{\Lambda} \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} &= \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \circ (\lambda_0^2 \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} + \lambda_0 \circ \|\text{vect}\mathbf{\Lambda}\| - \lambda_0 \circ \|\text{vect}\mathbf{\Lambda}\| + \|\text{vect}\mathbf{\Lambda}\| \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda}), \\ \mathbf{\Lambda} \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} &= \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \circ \|\mathbf{\Lambda}\| \circ \text{vect}\mathbf{\Lambda} = \text{vect}\mathbf{\Lambda},\end{aligned}\tag{1.34}$$

т.е. может рассматриваться в качестве аналога линейного ортогонального преобразования применительно к трехмерному пространству вещественных чисел $\mathfrak{R}^3$ [12].

1.2.3 Кинематические параметры Родрига-Гамильтона

Как видно из представленного выше теоретического материала, применение алгебры четырехмерных гиперкомплексных чисел позволяет достаточно просто описать линейное преобразование координат состояния типа вращение. Помимо данного подхода к математическому описанию углового движения твердого тела, в векторной алгебре широко используется формула Родрига [11], которая основывается на кватернионе специального вида [4]

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \circ \mathbf{q}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \circ \mathbf{q}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \circ \mathbf{q}_3 \right) = \lambda_0 \left(1 + \frac{1}{2} \circ \mathbf{\Xi} \right),$$

где $\mathbf{\Xi}$ – вектор конечного поворота [12]

$$\mathbf{\Xi} = 2 \frac{\text{vect}\mathbf{\Lambda}}{\lambda_0} = 2 \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\lambda_0} \frac{\text{vect}\mathbf{\Lambda}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}},$$

В этом случае при соблюдении условия нормирования

$$\|\Lambda\| = |\Lambda|^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2 = 1 \quad (1.35)$$

и учете формул (1.20) и (1.23) становится справедливым

$$\Xi = 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \circ \xi = 2 \xi_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \circ \mathbf{q}_1 + 2 \xi_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \circ \mathbf{q}_2 + 2 \xi_3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \circ \mathbf{q}_3,$$

в результате чего кватернионная норма (1.18) в силу того, что $|\xi|=1$, находится как

$$\|\Xi\| = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой разложения тангенса применительно к $\|\Xi\|$ можно записать, что [50]

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \frac{1}{4} \|\Xi\| = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

в тоже время в соответствии с (1.23) и (1.35) имеем

$$1 + \frac{1}{4} \|\Xi\| = 1 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_0^2} = 1 + \frac{1 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

в результате чего, приравнивая результаты двух последних соотношений между собой, окончательно получаем

$$\lambda_0 = \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \|\Xi\|}}, \quad (1.36)$$

а вещественные коэффициенты Ξ перед мнимыми единицами находятся как

$$\theta_k = \frac{2\lambda_k}{\lambda_0} = 2\xi_k \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2\xi_k}{\lambda_0} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Учитывая выражение (1.34) можно записать, что

$$\Lambda \circ \Xi \circ \hat{\Lambda} = \Lambda \circ 2 \frac{\operatorname{vect} \Lambda}{\lambda_0} \circ \hat{\Lambda} = \frac{2}{\lambda_0} \Lambda \circ \operatorname{vect} \Lambda \circ \hat{\Lambda} = \frac{2}{\lambda_0} \operatorname{vect} \Lambda = \Xi,$$

т.е. кватернион Ξ не преобразуется после (1.29) и также как ξ является эйлеровой осью вращения, а его координаты θ_k с ограничением на норму вида (1.35) и

учете формулы (1.36) представляют собой так называемые кинематические параметры Родрига-Гамильтона [50]

$$\lambda_0 = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \lambda_1 = \cos \varphi_1 \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \lambda_2 = \cos \varphi_2 \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \varphi_3 \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (1.37)$$

где $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3$ – направляющие косинусы вектора конечного поворота Ξ [12]

$$\cos \varphi_1 = \frac{2\xi_1}{\lambda_0}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{2\xi_2}{\lambda_0}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{2\xi_3}{\lambda_0}.$$

В заключение необходимо отметить, что применение алгебры кватернионов позволяет достаточно просто описать конечный результирующий поворот, получаемый путем последовательно выполняемых вращений относительно различных несовпадающих осей [36]. Так, например, для линейного преобразования вида (1.29)

$$\mathbf{R}'' = \Lambda_2 \circ \mathbf{R}' \circ \Lambda_2^{-1},$$

где $\mathbf{R}'$ – векторный кватернион, полученный после операции вращения $\mathbf{R}$ на двойной угол $\gamma_1/2$ относительно $\text{vect}\Lambda_1$

$$\mathbf{R}' = \Lambda_1 \circ \mathbf{R} \circ \Lambda_1^{-1},$$

выражение, связывающее между собой исходный $\mathbf{R}$ и результирующий $\mathbf{R}''$ векторы находится как

$$\mathbf{R}'' = \Lambda_2 \circ \mathbf{R}' \circ \Lambda_2^{-1} = \Lambda_2 \circ (\Lambda_1 \circ \mathbf{R} \circ \Lambda_1^{-1}) \circ \Lambda_2^{-1} = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1) \circ \mathbf{R} \circ (\Lambda_1^{-1} \circ \Lambda_2^{-1}).$$

Учитывая формулы (1.19), (1.27) и (1.28), на основании которых [12]

$$\Lambda_1^{-1} \circ \Lambda_2^{-1} = \frac{\hat{\Lambda}_1 \circ \hat{\Lambda}_2}{\|\Lambda_1\| \circ \|\Lambda_2\|} = \frac{\left(\Lambda_1 \overset{\circ}{\circ} \Lambda_2 \right)}{\|\Lambda_2 \circ \Lambda_1\|} = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1)^{-1}, \quad (1.38)$$

окончательно получаем, что первое Λ_1 и последующее Λ_2 вращения эквивалентны одному $(\Lambda_2 \circ \Lambda_1)$

$$\mathbf{R}'' = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1) \circ \mathbf{R} \circ (\Lambda_2 \circ \Lambda_1)^{-1}. \quad (1.39)$$

При этом если выполнить следующие преобразования

$$\Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ (\hat{\Lambda}_2 \circ \Lambda_2) = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \hat{\Lambda}_2) \circ \Lambda_2,$$

или

$$\Lambda_2 \circ \Lambda_1 = (\Lambda_1 \circ \hat{\Lambda}_1) \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ (\hat{\Lambda}_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1),$$

то результирующее вращение может реализовываться путем выполнения второго поворота, а затем первого относительно преобразованной эйлеровой оси, либо вторым поворотом вокруг оси, полученной после обратного первого углового движения с последующим первым вращением относительно начального положения.

1.3 Линейное ортогональное преобразование базисов в алгебре кватернионов

Математическая операция (1.29) осуществляет поворот трехмерного вектора относительно соответствующей оси в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$, в котором задана операция умножения кватернионов, и по этой причине не может непосредственно применяться для перехода от одного произвольного базиса к другому в форме линейного разложения каждой орты через направляющие косинусы

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \circ \mathbf{q}_k.$$

В тоже время на основании формальной аналогии в алгебре кватернионов разработана процедура, позволяющая выполнять преобразование систем координат с использованием гиперкомплексных отображений. В качестве примера рассмотрим проекции неизменного пространственного трехмерного вектора $\mathbf{R}$ на координатные оси, проведенные через орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ [12]

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 r_{je} \circ \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 r_k \circ \mathbf{q}_k. \quad (1.40)$$

Далее, в четырехмерном пространстве $\mathbf{H}$ введем два кватерниона без скалярных частей, составленных из мнимых единиц и вещественных коэффициентов r_{je} и r_k

$$\mathbf{R}_e = r_{1e} \circ \mathbf{q}_1 + r_{2e} \circ \mathbf{q}_2 + r_{3e} \circ \mathbf{q}_3, \mathbf{R}_q = r_1 \circ \mathbf{q}_1 + r_2 \circ \mathbf{q}_2 + r_3 \circ \mathbf{q}_3,$$

которые называются гиперкомплексными отображениями вектора $\mathbf{R}$ на базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{q}$ соответственно, или иначе Q -векторы [26].

Допустим, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ имеют одну общую точку начала координат, т.е. согласно теореме Л. Эйлера связаны между собой математической операцией типа вращение с соответствующей ортогональной матрицей направляющих косинусов размерностью $\dim 3 \times 3$, в результате чего в силу изоморфизма данного вида линейного преобразования его можно представить как [12]

$$\mathbf{e} = \mathbf{S} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{S}^{-1}, \quad (1.41)$$

здесь $\mathbf{S}$ – кватернион, осуществляющий линейное преобразование вектора вида (1.29), который ставит в соответствие единичным компонентам $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ новые орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

В этом случае гиперкомплексное отображение на мнимые единицы совпадает с самим вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_q$ или после подстановки (1.41) в (1.40)

$$\mathbf{R}_q = \sum_{j=1}^3 r_{je} \circ \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 r_{je} \mathbf{S} \circ \mathbf{q}_j \circ \mathbf{S}^{-1} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{S} \circ (r_{je} \circ \mathbf{q}_j) \circ \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \circ \mathbf{R}_e \circ \mathbf{S}^{-1}, \quad (1.42)$$

в результате чего окончательно получаем

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R}_q \circ \mathbf{S}. \quad (1.43)$$

Таким образом, если смена базиса выполняется в виде математической операции типа вращение, то преобразование координат неизменного вектора $\mathbf{R}$ задается обратной операцией в кватернионах, выполняемым над Q -векторами, причем, с учетом того, что $\mathbf{S} = \mathbf{S}_q$, гиперкомплексные отображения $\mathbf{S}$ на базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{q}$ также равны друг другу

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S}_q \circ \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{S} = \|\mathbf{S}\|^{-1} \circ (\widehat{\mathbf{S}} \circ \mathbf{S}) \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} = \mathbf{S}_q. \quad (1.44)$$

Если воспользоваться формулой (1.43), то можно получить выражения для координат вектора $\mathbf{R}'$ после линейного преобразования (1.29) не только при помощи задания правой упорядоченной тройки в виде $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, но и в произвольном базисе, например, образованным ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. По аналогии с (1.40), представим векторы как

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 r_{j\mathbf{e}} \circ \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 r_k \circ \mathbf{q}_k = \mathbf{R}_q,$$

$$\mathbf{R}' = \sum_{j=1}^3 r'_{j\mathbf{e}} \circ \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 r'_k \circ \mathbf{q}_k = \mathbf{R}'_q.$$

Учитывая тот факт, что $\mathbf{R}'_q$ и $\mathbf{R}_q$ изначально представлены в Q -базисе, то на основании (1.29) и (1.43) становится справедливым

$$\mathbf{R}'_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R}'_q \circ \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \circ (\Lambda \circ \mathbf{R}_q \circ \Lambda^{-1}) \circ \mathbf{S},$$

или при обратном переходе от $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ к гиперкомплексным отображениям на базис $\mathbf{e}$ с учетом (1.38) и (1.42)

$$\mathbf{R}'_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{R}_{\mathbf{e}} \circ \mathbf{S}^{-1} \circ \Lambda^{-1} \circ \mathbf{S} = (\mathbf{S}^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \circ \mathbf{R}_{\mathbf{e}} \circ (\mathbf{S}^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{S})^{-1},$$

$$\mathbf{R}'_{\mathbf{e}} = \Lambda_{\mathbf{e}} \circ \mathbf{R}_{\mathbf{e}} \circ \Lambda_{\mathbf{e}}^{-1}, \quad (1.45)$$

где $\Lambda_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}$ – гиперкомплексное отображение кватерниона Λ на $\mathbf{e}$.

Таким образом, линейное преобразование типа вращения в кватернионах вида (1.29) может быть представлено в любом произвольном базисе, причем скалярная часть $\Lambda_{\mathbf{e}}$ на основании (1.18) останется неизменной

$$\text{scal} \Lambda_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}^{-1} \circ \text{scal} \Lambda \circ \mathbf{S} = \text{scal} \Lambda \circ \|\mathbf{S}\|^{-1} \circ (\widehat{\mathbf{S}} \circ \mathbf{S}) = \text{scal} \Lambda, \quad (1.46)$$

а векторная составляющая находится как $\text{vect} \Lambda_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}^{-1} \circ \text{vect} \Lambda \circ \mathbf{S}$, т.е. $\text{vect} \Lambda$ меняется по тому же правилу, что и гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{R}_q$ и $\mathbf{R}'_q$.

На основании вышеизложенного можно заключить, что математическая операция вида (1.29) будет инвариантна относительно линейного преобразования

базиса только в том случае, если все векторные кватернионы и Λ будут представлены в форме гиперкомплексных отображений на тот же базис [12].

Далее, по аналогии с (1.45), проанализируем линейное преобразование любого из базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в соответствующие орты $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ применительно к их гиперкомплексным отображениям на $\mathbf{e}$

$$(\mathbf{e}'_k)_\mathbf{e} = \Lambda_\mathbf{e} \circ (\mathbf{e}_k)_\mathbf{e} \circ \hat{\Lambda}_\mathbf{e} = (\hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \circ (\mathbf{e}_k)_\mathbf{e} \circ \left(\hat{\mathbf{S}} \circ \hat{\Lambda} \circ \mathbf{S} \right),$$

в результате чего при учете (1.43) становится справедливым

$$\Lambda_{\mathbf{e}'} = \hat{\Lambda}_\mathbf{e} \circ \Lambda_\mathbf{e} \circ \Lambda_\mathbf{e} = \hat{\Lambda}_\mathbf{e} \circ (\text{scal}\Lambda + \text{vect}\Lambda_\mathbf{e}) \circ \Lambda_\mathbf{e} = \hat{\Lambda}_\mathbf{e} \circ \text{sqal}\Lambda \circ \Lambda_\mathbf{e} + \hat{\Lambda}_\mathbf{e} \circ \text{vect}\Lambda_\mathbf{e} \circ \Lambda_\mathbf{e}.$$

В итоге, учитывая (1.34) и (1.46) окончательно получаем

$$\Lambda_{\mathbf{e}'} = \text{sqal}\Lambda + \text{vect}\Lambda_\mathbf{e} = \hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} = \Lambda_\mathbf{e},$$

т.е. получили аналогичный (1.44) результат, причем в силу равенства компонент $\hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}$ в двух системах координат $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$, данное гиперкомплексное число является собственным кватернионом линейного преобразования и обозначается как

$$\Lambda^* = \Lambda_\mathbf{e} = \Lambda_{\mathbf{e}'}.$$

Применительно к случаю двух последовательно выполняемых угловых движений вектора вида (1.39) в Q -базисе, определяемых как

$$\Lambda_3 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1,$$

собственный кватернион результирующего поворота в $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяется в виде произведения сомножителей в обратном порядке [12]

$$\begin{aligned} \Lambda_3^* &= \Lambda_{3\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda_3 \circ \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} \circ (\Lambda_1 \circ (\mathbf{S} \circ \hat{\mathbf{S}}) \circ \hat{\Lambda}_1) \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \mathbf{S}, \\ \Lambda_3^* &= (\hat{\mathbf{S}} \circ \Lambda_1 \circ \mathbf{S}) \circ (\hat{\mathbf{S}} \circ \hat{\Lambda}_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \mathbf{S}) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*. \end{aligned}$$

1.4 Связь вещественных коэффициентов кватерниона с элементами матрицы направляющих косинусов

Запишем выражение (1.33) в форме Гамильтона (1.16) как [75]

$$\sum_{k=1}^3 r'_k \circ \mathbf{q}_k = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 a_{kl} r_l \right) \circ \mathbf{q}_k ,$$

или представив мнимые единицы в виде алгебраического вектора-столбца [110]

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3]^T ,$$

в векторно-матричной форме записи [70]

$$\mathbf{r}'\mathbf{q} = \mathbf{L}\mathbf{r}\mathbf{q} , \quad (1.47)$$

где $\mathbf{r} = \text{diag}(r_k)_{k=1}^3$ – диагональная матрица координат $\mathbf{R}$ в правом ортонормированном Q -базисе, образованном мнимыми единицами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ гиперкомплексного пространства $\mathbf{H}$; $\mathbf{r}' = \text{diag}(r'_k)_{k=1}^3$ – диагональная матрица преобразованных координат вектора $\mathbf{R}'$ в том же базисе; $\mathbf{L}$ – квадратная матрица размерностью $\dim 3 \times 3$, описывающая линейное преобразование типа вращение вида (1.29)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} .$$

На следующем этапе получим в общем виде формулы, связывающие между собой элементы $\mathbf{L}$ с компонентами кватерниона в тригонометрической форме записи на основании следующего равенства [74]

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{q}\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{q} , \quad (1.48)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион линейного преобразования типа вращение вида (1.22),

или в развернутом виде

$$\mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} .$$

Воспользовавшись формулами (1.25) и (1.32), представим левую часть как

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{q}\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{scal}(\xi \cdot \mathbf{q}) \cdot \xi \cdot (\cos \gamma - 1) + \mathbf{q} \cos \gamma - \text{vect}(\mathbf{q} \cdot \xi) \sin \gamma ,$$

в результате чего предварительно вычислив произведение вида

$$\xi \cdot \mathbf{q} = (\xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_2 \mathbf{q}_2 + \xi_3 \mathbf{q}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \mathbf{q}_3 + \xi_3 \mathbf{q}_2 \\ \xi_1 \mathbf{q}_3 - \xi_3 \mathbf{q}_1 \\ -\xi_1 \mathbf{q}_2 + \xi_2 \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

и учитывая (1.47), можно записать следующее матричное равенство

$$\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} = (1 - \cos \gamma) \begin{bmatrix} \xi_1 (\xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_2 \mathbf{q}_2 + \xi_3 \mathbf{q}_3) \\ \xi_2 (\xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_2 \mathbf{q}_2 + \xi_3 \mathbf{q}_3) \\ \xi_3 (\xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_2 \mathbf{q}_2 + \xi_3 \mathbf{q}_3) \end{bmatrix} + \cos \gamma \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} - \sin \gamma \begin{bmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}.$$

Далее, произведем умножение (1.48) на $\mathbf{q}^T$, в результате чего правая часть преобразуется к виду [62]

$$\mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{q}^T = \mathbf{L}(\Theta - \mathbf{E}) = \mathbf{L}\Theta - \mathbf{L},$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерностью $\dim 3 \times 3$; Θ – бесследовая кососимметрическая квадратная матрица, составленная из мнимых единиц кватерниона

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{q}_3 & -\mathbf{q}_2 \\ -\mathbf{q}_3 & 0 & \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 & -\mathbf{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

и по аналогии для левой части (1.48) после выполнения необходимых математических операций

$$\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} \mathbf{q}^T = \text{scal}(\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} \mathbf{q}^T) + \text{vect}(\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} \mathbf{q}^T),$$

где скалярная часть находится как

$$-\text{scal}(\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} \mathbf{q}^T) = (1 - \cos \gamma) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} + \mathbf{E} \cos \gamma + \sin \gamma \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix},$$

а векторная составляющая

$$\begin{aligned} \text{vect}(\Lambda \mathbf{q} \Lambda^{-1} \mathbf{q}^T) = & (1 - \cos \gamma) \begin{bmatrix} \xi_1 \xi_3 \mathbf{q}_2 - \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}_3 & \xi_1^2 \mathbf{q}_3 - \xi_1 \xi_3 \mathbf{q}_1 & \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}_1 - \xi_1^2 \mathbf{q}_2 \\ \xi_2 \xi_3 \mathbf{q}_2 - \xi_2^2 \mathbf{q}_3 & \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}_3 - \xi_2 \xi_3 \mathbf{q}_1 & \xi_2^2 \mathbf{q}_1 - \xi_1 \xi_2 \mathbf{q}_2 \\ \xi_3^2 \mathbf{q}_2 - \xi_2 \xi_3 \mathbf{q}_3 & \xi_1 \xi_3 \mathbf{q}_3 - \xi_3^2 \mathbf{q}_1 & \xi_2 \xi_3 \mathbf{q}_1 - \xi_1 \xi_3 \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \\ & + \Theta \cos \gamma + \sin \gamma \begin{bmatrix} \xi_2 \mathbf{q}_2 + \xi_3 \mathbf{q}_3 & -\xi_2 \mathbf{q}_1 & -\xi_3 \mathbf{q}_1 \\ -\xi_1 \mathbf{q}_2 & \xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_3 \mathbf{q}_3 & -\xi_3 \mathbf{q}_2 \\ -\xi_1 \mathbf{q}_3 & -\xi_2 \mathbf{q}_3 & \xi_1 \mathbf{q}_1 + \xi_2 \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В итоге, приравнивая скалярные величины в различных формах представления линейного преобразования типа вращение, ортогональная матрица размерностью $\dim 3 \times 3$ раскладывается на три слагаемых [44]

$$\mathbf{L} = (1 - \cos \gamma) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} + \cos \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \gamma \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

которые связывают между собой координаты вектора ξ и угол поворота γ с элементами $\mathbf{L}$.

Обратный переход от квадратной матрицы $\mathbf{L}$, которой соответствуют два кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ [12], к кинематическим параметрам вращения можно осуществить, если воспользоваться следом

$$\text{tr} \mathbf{L} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = (1 - \cos \gamma)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + 3 \cos \gamma = 1 + 2 \cos \gamma,$$

откуда

$$\gamma = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{L} - 1}{2}, \quad (1.50)$$

или применительно к разности симметричных относительно главной диагонали элементов

$$\xi_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \gamma}, \quad \xi_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \gamma}, \quad \xi_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \gamma}. \quad (1.51)$$

В итоге, выражая тригонометрическую функцию синуса угла поворота вектора в общем виде

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{\sqrt{3 - \text{tr}^2 \mathbf{L} + 2 \text{tr} \mathbf{L}}}{2},$$

окончательно получаем

$$\xi_k = \frac{\varepsilon_{klm}(a_{ml} - a_{lm})}{\sqrt{3 - \text{tr}^2 \mathbf{L} + 2 \text{tr} \mathbf{L}}}.$$

По аналогии, если в последних соотношениях на основании формул (1.30) и (1.31) осуществить замену $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$, то вещественные коэффициенты (1.16) будут находиться как [62]

$$\lambda_0 = |\Lambda| \cos \frac{\gamma}{2} = \pm |\Lambda| \frac{\sqrt{\text{tr} \mathbf{L} + 1}}{2}, \quad (1.52)$$

$$\lambda_1 = \|\Lambda\| \frac{a_{32} - a_{23}}{4\lambda_0} = |\Lambda| \frac{a_{32} - a_{23}}{4 \cos \frac{\gamma}{2}} = \pm |\Lambda| \frac{a_{32} - a_{23}}{2\sqrt{\text{tr} \mathbf{L} + 1}}, \quad (1.53)$$

$$\lambda_2 = \|\Lambda\| \frac{a_{13} - a_{31}}{4\lambda_0} = |\Lambda| \frac{a_{13} - a_{31}}{4 \cos \frac{\gamma}{2}} = \pm |\Lambda| \frac{a_{13} - a_{31}}{2\sqrt{\text{tr} \mathbf{L} + 1}}, \quad (1.54)$$

$$\lambda_3 = \|\Lambda\| \frac{a_{21} - a_{12}}{4\lambda_0} = |\Lambda| \frac{a_{21} - a_{12}}{4 \cos \frac{\gamma}{2}} = \pm |\Lambda| \frac{a_{21} - a_{12}}{2\sqrt{\text{tr} \mathbf{L} + 1}}, \quad (1.55)$$

или в общем виде для нижнего индекса $k=1,2,3$

$$\lambda_k = \|\Lambda\| \frac{\varepsilon_{klm}(a_{ml} - a_{lm})}{4\lambda_0} = |\Lambda| \frac{\varepsilon_{klm}(a_{ml} - a_{lm})}{4 \cos \frac{\gamma}{2}} = \pm |\Lambda| \frac{\varepsilon_{klm}(a_{ml} - a_{lm})}{2\sqrt{\text{tr} \mathbf{L} + 1}}.$$

Как видно из линейного разложения (1.49), элементы $\mathbf{L}$ при равенстве порядковых номеров строки k и столбца l определяются по формуле [74]

$$a_{kk} = \xi_k^2(1 - \cos \gamma) + \cos \gamma,$$

а вне главной диагонали $k \neq l$

$$a_{kl} = \xi_k \xi_l(1 - \cos \gamma) - \varepsilon_{klm} \xi_m \sin \gamma,$$

или иначе с учетом (1.22)

$$a_{kk} = \|\Lambda\|^{-1} \frac{\lambda_k^2(1 - \cos \gamma)}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \cos \gamma = \frac{\lambda_k^2(1 - \cos \gamma)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} + \cos \gamma,$$

$$a_{kl} = \frac{\|\Lambda\|^{-1} \lambda_k \lambda_l(1 - \cos \gamma)}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} - \varepsilon_{klm} \frac{|\Lambda|^{-1} \lambda_m}{\sin \frac{\gamma}{2}} \sin \gamma = \frac{\lambda_k \lambda_l(1 - \cos \gamma)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} - \frac{\varepsilon_{klm} \lambda_m}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \sin \gamma.$$

Таким образом, воспользовавшись тригонометрическими формулами (1.30), (1.31) окончательно получаем следующие выражения, связывающие между собой вещественные коэффициенты кватерниона в Гамильтоновой форме (1.16) с компонентами $\mathbf{L}$ [62]

$$a_{kk} = \|\Lambda\|^{-1}(\lambda_0^2 + \lambda_k^2 - \lambda_l^2 - \lambda_m^2), \quad a_{kl} = 2\|\Lambda\|^{-1}(\lambda_k \lambda_l - \varepsilon_{klm} \lambda_0 \lambda_m),$$

откуда

$$\mathbf{L} = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

При этом если модуль кватерниона равен единице $|\mathbf{\Lambda}|=1$, то все направляющие косинусы подчиняются только одной зависимости [11]

$$a_{kl} = 2 \left(\lambda_k \lambda_l + \left(\lambda_0^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_{kl} - \varepsilon_{klm} \lambda_0 \lambda_m \right).$$

В целях анализа собственных свойств квадратной матрицы (1.56), далее получим формулу для нахождения численных значений определителя в функции вещественных коэффициентов кватерниона, которая имеет следующий вид

$$\det \mathbf{L} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13},$$

где $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ – дополнительные миноры [52], составленные из оставшихся элементов $\mathbf{L}$ после вычеркивания соответствующих нижним индексам номера строки и столбца

$$\Delta_{11} = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-2} (\lambda_0^4 + \lambda_1^4 - \lambda_2^4 - \lambda_3^4 + 2(\lambda_0^2\lambda_1^2 - \lambda_2^2\lambda_3^2)) = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2),$$

$$\Delta_{12} = 2\|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} (\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2), \quad \Delta_{13} = 2\|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} (\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3),$$

т.е. каждая компонента равна своему алгебраическому дополнению, или окончательно после выполнения необходимых математических операций

$$\det \mathbf{L} = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-2} (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 = 1.$$

По аналогии, прямыми вычислениями можно убедиться, что присоединенная (союзная) матрица имеет вид

$$\text{adj} \mathbf{L} = \|\mathbf{\Lambda}\|^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T,$$

откуда

$$\mathbf{L}^{-1} = \text{adj} \mathbf{L} = \mathbf{L}^T,$$

т.е. осуществляется ортогональное преобразование, сохраняющее неизменным скалярное произведение, или иначе, евклидову норму вектора, что подтверждает выводы предыдущего раздела. При этом по своему физическому смыслу квадратная матрица $\mathbf{L}$ является матрицей направляющих косинусов ξ , ориентированного по $\text{vect}\mathbf{A}$ и одновременно являющегося собственным вектором $\mathbf{L}$ [12].

Таким образом, математическая операция (1.29) в четырехмерном гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ является изоморфной по отношению к линейному преобразованию типа вращения в трехмерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ вида (1.47), заданному ортогональной матрицей размерностью $\dim 3 \times 3$, причем $\mathbf{L}$ одновременно соответствуют прямой и обратный кватернионы, которые однозначно определяются друг другом [12].

1.5 Кинематические параметры Кэли-Клейна

1.5.1 Комплексное двумерное uv -пространство

Форма записи кватернионов вида (1.16), предложенная У. Гамильтоном, является не единственной. Так, например, любую из мнимых единиц $\mathbf{A}$ можно представить в алгебре матриц размерностью $\dim 2 \times 2$ со следом равным нулю [26]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d & e \\ f & -d \end{bmatrix}.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что если ввести соотношения вида

$$\mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}, \quad \mathbf{q}_l = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\det \mathbf{B}}}, \quad (1.57)$$

то данные математические объекты, являющиеся эквивалентами мнимых единиц $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, будут удовлетворять всем 16-ти правилам Q -алгебры вида (1.17), т.е.

$$\frac{\mathbf{A}^2}{\det \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{B}^2}{\det \mathbf{B}} = -\mathbf{I},$$

здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерностью $\dim 2 \times 2$, выступающая аналогом вещественной 1 в алгебраической форме записи кватернионов (1.16);

$$\mathbf{q}_k \mathbf{q}_l = \frac{\mathbf{AB}}{\sqrt{\det \mathbf{A} \det \mathbf{B}}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{AB})}} \begin{bmatrix} ad + bf & ae - bd \\ cd - af & ec + ad \end{bmatrix} = \mathbf{q}_m,$$

причем должно выполняться требование [26]

$$\text{tr} \mathbf{q}_m = 2ad + bf + ec = 0.$$

Если след произвольной матрицы вида

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

не равен нулю и она удовлетворяет условию унимодулярности

$$\det \mathbf{Q} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (1.58)$$

то ее можно разложить на основании линейной комбинации

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha + \delta}{2} + \frac{\alpha - \delta}{2} & \beta \\ \gamma & \frac{\alpha + \delta}{2} - \frac{\alpha - \delta}{2} \end{bmatrix} = \frac{\alpha + \delta}{2} \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha - \delta}{2} & \beta \\ \gamma & -\frac{\alpha - \delta}{2} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (1.57) второе слагаемое в правой части последнего равенства представим в форме мнимой единицы кватерниона, предварительно с учетом (1.58) вычислив определитель

$$\det(\cdot) = 1 - \left(\frac{\alpha + \delta}{2} \right)^2 = \frac{4\alpha\delta - 4\beta\gamma - \alpha^2 - 2\alpha\delta - \delta^2}{4} = -\left(\frac{\alpha - \delta}{2} \right)^2 - \beta\gamma,$$

откуда

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \delta}{2} \right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\alpha - \delta}{2} & \beta \\ \gamma & -\frac{\alpha - \delta}{2} \end{bmatrix},$$

т.е. квадратная матрица $\mathbf{Q}$ является кватернионом со скалярной частью

$$\mathbf{Q} = \frac{\alpha + \delta}{2} \mathbf{I} + \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \delta}{2} \right)^2} \mathbf{q}_k.$$

Последнее матричное представление четырехмерного гиперкомплексного числа является не единственным. Так, например, если воспользоваться мнимой единицей $j = \sqrt{-1}$, то $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ можно выразить как [26, 179]

$$\mathbf{q}_1 = -j\mathbf{S}_1 = -j \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = -j\mathbf{S}_2 = -j \cdot \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = -j\mathbf{S}_3 = -j \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

где $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ – спиновые матрицы Паули [20, 24, 92],

которые являются:

– эрмитовыми [89] и унитарными [19]

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^+ = \mathbf{S}_k^{-1},$$

здесь $\mathbf{S}_k^+$ – эрмитово-сопряженная матрица, составленная из комплексно-сопряженных элементов исходной матрицы $\mathbf{S}_k$ с последующим транспонированием,

следствием чего является равенство [102]

$$\mathbf{S}_k^2 = \mathbf{I};$$

– бесследовыми [92]

$$\text{tr} \mathbf{S}_k = 0;$$

– антикоммутирующими

$$\mathbf{S}_k \mathbf{S}_l = -\mathbf{S}_l \mathbf{S}_k,$$

откуда [8]

$$\mathbf{S}_k \mathbf{S}_l + \mathbf{S}_l \mathbf{S}_k = 2\delta_{kl} \mathbf{I};$$

– унимодулярными с обратным знаком [26]

$$\det \mathbf{S}_k = -1,$$

а комбинация вида

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} \pm \mathbf{S}_k),$$

образует идемпотентные матрицы, для которых справедливо [7]

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A},$$

где n – целое вещественное число.

Матрицы Паули совместно с единичной $\mathbf{I}$ образуют аддитивный базис в четырехмерном линейном пространстве [24], т.к. являются линейно независимыми, т.е. произвольная матрица $\dim 2 \times 2$ может быть представлена в виде их линейной комбинации как [102]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) \cdot \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cdot \mathbf{S}_1 + \frac{1}{2}j(\beta - \gamma) \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{1}{2}(\alpha - \delta) \cdot \mathbf{S}_3, \quad (1.60)$$

или в более компактной форме записи [8]

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{I} + \sum_{k=1}^3 \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{S}_k) \cdot \mathbf{S}_k \right),$$

причем, если ее след равен нулю

$$\text{tr} \mathbf{Q} = \alpha + \delta = 0, \quad (1.61)$$

то исключается первое слагаемое в правой части с $\mathbf{I}$, а если она является эрмитовой

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+,$$

то коэффициенты перед $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ представляют собой действительные числа [102].

Замена в (1.59) мнимой единицы квадратной матрицей, заданной в виде [27]

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = j\mathbf{S}_2,$$

позволяет представить кватернионы в форме чисто вещественных блочных квадратных матриц размерностью $\dim 4 \times 4$ [118]

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -\mathbf{j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ – нулевая квадратная матрица размерностью $\dim 2 \times 2$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для перехода к мнимым единицам $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, как это видно из (1.59), необходимо в линейной комбинации (1.60) осуществить умножение каждого слагаемого с матрицей Паули в правой части на величину

$$j \cdot j^{-1} = -j \cdot j = 1,$$

в результате чего получаем матричную форму записи кватерниона [110]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{1}{2}(\alpha + \delta)\mathbf{I} + \frac{j}{2}(\beta + \gamma)(-j\mathbf{S}_1) - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)(-j\mathbf{S}_2) + \frac{j}{2}(\alpha - \delta)(-j\mathbf{S}_3), \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \lambda_0\mathbf{I} - \lambda_1j\mathbf{S}_1 - \lambda_2j\mathbf{S}_2 - \lambda_3j\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 - j\lambda_3 & -j\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - j\lambda_1 & \lambda_0 + j\lambda_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Учитывая тот факт, что $\mathbf{\Lambda}$ зависит только от 4-х вещественных коэффициентов, то в алгебре матриц размерностью $\dim 2 \times 2$ четырехмерное гиперкомплексное число можно представить в функции только двух комплексных величин [14, 15]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

здесь $\bar{(\cdot)}$ – верхний символ, обозначающий комплексно-сопряженную величину.

В итоге, воспользовавшись (1.62) и (1.63), можно определить формулы, связывающие между собой $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ с компонентами произвольной квадратной матрицы вида (1.60) [62, 74]

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}), \quad \lambda_1 = \frac{j}{2}(\beta + \gamma) = \frac{j}{2}(\beta - \bar{\beta}), \quad (1.64)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = -\frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta}), \quad \lambda_3 = \frac{j}{2}(\alpha - \delta) = \frac{j}{2}(\alpha - \bar{\alpha}). \quad (1.65)$$

В свою очередь, приравнивая компоненты (1.62) к элементам исходной формы записи $\mathbf{Q}$ с учетом (1.63), обратный переход выполняется как

$$\alpha = \lambda_0 - j\lambda_3, \quad \beta = -(\lambda_2 + j\lambda_1), \quad (1.66)$$

$$\gamma = -\bar{\beta} = \lambda_2 - j\lambda_1, \quad \delta = \bar{\alpha} = \lambda_0 + j\lambda_3, \quad (1.67)$$

причем в случае нормированного кватерниона вида (1.35), матрица $\mathbf{Q}$ становится унимодулярной

$$\det \mathbf{Q} = \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = |\mathbf{\Lambda}|^2 = \|\mathbf{\Lambda}\| = 1.$$

Если в выражении (1.56) с учетом последнего равенства выразить вещественные коэффициенты через компоненты матричного представления кватерниона в комплексном двумерном uv -пространстве, то квадратная матрица примет вид

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 - \gamma^2 - \beta^2) & \frac{j}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{j}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \beta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \beta^2) & -j(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & j(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{bmatrix},$$

или иначе

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 - \beta^2) & \frac{j}{2}(\bar{\beta}^2 - \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2) & -(\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) \\ \frac{j}{2}(\alpha^2 + \bar{\beta}^2 - \bar{\alpha}^2 - \beta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \beta^2) & -j(\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta}) \\ \beta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} & j(\beta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta}) & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \end{bmatrix}.$$

Для определения связи параметров комплексного представления кватерниона (1.62) с элементами матрицы направляющих косинусов воспользуемся процедурой, используемой ранее для вычисления параметров $\mathbf{L}$ в тригонометрической форме записи. Так, например, с учетом выражения для определителя (1.58) при $\det \mathbf{Q} \neq 1$ можно записать, что [74]

$$\alpha\delta = \frac{\det \mathbf{Q}}{2}(a_{33} + 1),$$

а если просуммировать другие элементы матрицы $\mathbf{L}$, то

$$\alpha\gamma = -\frac{\det \mathbf{Q}}{2}(a_{31} + ja_{32}), \quad \gamma\delta = \frac{\det \mathbf{Q}}{2}(a_{13} + ja_{23}),$$

в результате чего окончательно получаем [62]

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{\det \mathbf{Q}(a_{33} + 1)(a_{31} + ja_{32})}{2(a_{13} + ja_{23})}}. \quad (1.68)$$

По аналогии, учитывая равенства

$$\beta\gamma = \frac{\det \mathbf{Q}}{2}(a_{33} - 1), \quad \beta\delta = \frac{\det \mathbf{Q}}{2}(a_{31} - ja_{32}),$$

становится справедливым

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\det \mathbf{Q}(a_{33} - 1)(a_{31} - ja_{32})}{2(a_{13} + ja_{23})}}, \quad (1.69)$$

а остальные элементы $\mathbf{Q}$ в соответствии с (1.63) находятся как

$$\delta = \bar{\alpha} = \pm \sqrt{\det \mathbf{Q}(a_{11} + a_{22}) - \alpha^2} = \pm \sqrt{\det \mathbf{Q}(a_{22} + ja_{21}) - \beta^2}, \quad (1.70)$$

$$\gamma = -\bar{\beta} = \pm \sqrt{\beta^2 - \det \mathbf{Q}(ja_{12} + ja_{21})} = \pm \sqrt{\alpha^2 - \det \mathbf{Q}(a_{11} + ja_{12})}. \quad (1.71)$$

1.5.2 Линейный оператор с комплексными величинами Кэли-Клейна

Как указывалось в заключительной части раздела 1.1, при математическом описании ортогональных преобразований фазных переменных типа вращение могут также использоваться отличные от направляющих косинусов кинематические параметры, одними из которых являются комплексные величины Кэли-Клейна, вводимые в анализ посредством проектирования сферы на плоскость [50, 108] или при помощи унитарного линейного преобразования [12, 20]. Остановимся более подробно на втором подходе, рассматривая в комплексном двумерном uv -пространстве оператор (вектор) специальной структуры, представленный как [92, 102]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -jr_3 & -(r_2 + jr_1) \\ r_2 - jr_1 & jr_3 \end{bmatrix} = r_1(-j\mathbf{S}_1) + r_2(-j\mathbf{S}_2) + r_3(-j\mathbf{S}_3), \quad (1.72)$$

где r_1, r_2, r_3 – вещественные коэффициенты, которые можно интерпретировать как координаты некоторой материальной точки в трехмерном пространстве, причем квадратная матрица $\mathbf{R}$ является эрмитовой и удовлетворяет равенству (1.61), т.е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^+, \quad \text{tr} \mathbf{R} = 0. \quad (1.73)$$

Далее, по аналогии с (1.29), осуществим подобное унитарное преобразование вектора (1.72) в следующем виде [19]

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^+, \quad (1.74)$$

где $\mathbf{Q}$ – кватернион в матричной форме записи вида (1.62), который для исключения влияния $\det \mathbf{Q}$ на вектор $\mathbf{R}'$ является нормированным [26].

В силу унитарности преобразования становится справедливым

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}^+\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

в результате чего воспользовавшись последним матричным равенством, можно составить систему из четырех алгебраических уравнений [12, 20]

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1,$$

$$\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} = \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0$$

и таким образом определить элементы $\mathbf{Q}^+$. Так, например, выразив

$$\beta = -\frac{\alpha\bar{\gamma}}{\bar{\delta}},$$

в соответствии с условием унимодулярности (1.58)

$$\alpha\delta + \frac{\alpha\bar{\gamma}}{\bar{\delta}}\gamma = \frac{\alpha}{\bar{\delta}}(\delta\bar{\delta} + \gamma\bar{\gamma}) = 1,$$

окончательно получаем

$$\bar{\delta} = \alpha.$$

По аналогии, выполняя необходимые математические преобразования для трех оставшихся величин $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, элементы эрмитово-сопряженной (обратной) матрицы находятся как [15]

$$\mathbf{Q}^+ = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Четыре параметра $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, удовлетворяющие (1.75) и условию унимодулярности, из которых в силу (1.58) только три являются независимыми [26, 118], носят название кинематических параметров Кэли-Клейна и содержат в себе восемь неизвестных величин, т.к. они являются функциями комплексной переменной.

Унитарное преобразование (1.74) является инвариантным по отношению к условиям (1.73), в результате чего преобразованный вектор должен иметь вид [12, 14]

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} -jr'_3 & -(r'_2 + jr'_1) \\ r'_2 - jr'_1 & jr'_3 \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

где r'_1, r'_2, r'_3 – некоторые вещественные коэффициенты, определяемые при помощи матричного произведения

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^+ = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -jr_3 & -(r_2 + jr_1) \\ r_2 - jr_1 & jr_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} -j(\alpha\delta + \beta\gamma)r_3 + \alpha r_+ + \beta\delta r_- & j2\alpha\beta r_3 - \alpha^2 r_+ - \beta^2 r_- \\ -j2\gamma\delta r_3 + \gamma^2 r_+ + \delta^2 r_- & j(\alpha\delta + \beta\gamma)r_3 - \alpha r_+ - \beta\delta r_- \end{bmatrix}, \quad (1.77)$$

здесь $r_+ = r_2 + jr_1$, $r_- = r_2 - jr_1$ – элементы исходной матрицы $\mathbf{R}$ в упрощенной форме записи [20].

В силу унитарности матрицы $\mathbf{Q}$ остается неизменным скалярное произведение векторов [19], т.е.

$$\det \mathbf{R} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \det \mathbf{R}' = (r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2,$$

на основании чего можно заключить, что $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^+$ в комплексном двумерном uv -пространстве ставится в соответствие некоторая квадратная матрица размерностью $\dim 3 \times 3$, осуществляющая линейное ортогональное преобразование типа вращение в трехмерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Таким образом, выполнение математической операции в соответствии с формулой (1.74) сопровождается “коллективным” линейным преобразованием всех мнимых единиц кватерниона по единому закону [26].

1.6 Кинематические параметры вращения в виде углов Эйлера-Крылова

Как известно из классической механики твердого тела [55], произвольное угловое движение материального объекта с неподвижной точкой может быть

описано с помощью трех последовательных вращений вокруг различных несовпадающих осей [12].

В настоящее время разработано несколько обобщенных форм представления ортогональной матрицы направляющих косинусов размерностью $\dim 3 \times 3$ [26], допускающих ее разложение в виде произведения двух или трех составляющих более простой структуры, например, заданное как

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} d & x & z \\ -\frac{xb + yzd}{1 - z^2} & \frac{bd - xyz}{1 - z^2} & y \\ \frac{xy - zbd}{1 - z^2} & -\frac{yd + xzb}{1 - z^2} & b \end{bmatrix}, \quad (1.78)$$

где x, y, z – независимые переменные; b, d – нелинейные функции вида

$$b = \sqrt{1 - z^2 - y^2}, \quad d = \sqrt{1 - z^2 - x^2},$$

или иначе

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{1 - z^2}} & \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}} \\ 0 & \frac{-y}{\sqrt{1 - z^2}} & \frac{b}{\sqrt{1 - z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - z^2} & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & \sqrt{1 - z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{\sqrt{1 - z^2}} & \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}} & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - z^2}} & \frac{d}{\sqrt{1 - z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что определитель и сумма квадратов любой строки или столбца равна единице, а каждый элемент равен собственному алгебраическому дополнению [26], т.е. $\mathbf{L}$ принадлежит к подгруппе специальных ортогональных матриц трехмерного вещественного пространства $SO(3, R)$.

Если в качестве величин x, y, z принять тригонометрические функции

$$x = -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3, \quad y = -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad z = \sin \varphi_2, \quad (1.79)$$

то после выполнения необходимых подстановок становится справедливым

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - z^2} &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \cos \varphi_2, \\ b &= \sqrt{1 - z^2 - y^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{1 - z^2 - x^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_3} = \cos \varphi_2 \cos \varphi_3,$$

откуда окончательно получаем [62]

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из последнего равенства, данное разложение соответствует трем последовательно выполняемым поворотам относительно взаимно перпендикулярных базисных векторов, реализуемых в кинематических задачах ориентации твердого тела при помощи карданова подвеса. Применительно к Q -базису, первоначально осуществляется вращение вектора относительно $\mathbf{q}_3$ на угол курса (рыскания) φ_3 , затем вокруг орты $\mathbf{q}_2$ на угол крена φ_2 и окончательно поворот через $\mathbf{q}_1$ на угол тангажа φ_1 [12]. Ортогональную матрицу $\mathbf{L}$ результирующего вращения в функции $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$, носящих название углов А. Н. Крылова [50], можно получить непосредственно при помощи подстановки в (1.78) переменных x, y, z вида (1.79) или после выполнения следующей последовательности математических операций:

1. линейное преобразование $\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2$ [76]

$$\mathbf{L}_2(\varphi_2) \mathbf{L}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{L}_2(\varphi_2) \mathbf{L}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}; \quad (1.81)$$

2. линейное преобразование $\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{q}_3$

$$\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \mathbf{L}_1(\varphi_1) \mathbf{L}_2(\varphi_2) \mathbf{L}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \mathbf{L}_2(\varphi_2) \mathbf{L}_3(\varphi_3), \quad (1.82)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

В итоге, учитывая последнюю форму представления $\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$, угол крена с учетом того, что синус является нечетной тригонометрической функцией, находится как [62, 76]

$$\varphi_2 = \arcsin(a_{13}), \quad (1.83)$$

откуда на основании промежуточного равенства

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2},$$

углы тангажа φ_1 и курса φ_3 определяются в соответствии с формулами

$$\varphi_1 = \arcsin(-a_{23} \cos^{-1} \varphi_2), \quad (1.84)$$

$$\varphi_3 = \arcsin(-a_{12} \cos^{-1} \varphi_2). \quad (1.85)$$

По аналогии с вышеизложенным выразим углы Л. Эйлера [14, 24, 44, 50], задающие результирующее линейное преобразование типа вращение путем последовательно выполняемых первоначального поворота на угол прецессии ψ относительно $\mathbf{q}_3$, затем на угол нутации θ через $\mathbf{q}_2$ и окончательно на собственный угол вращения φ вокруг $\mathbf{q}_3$ [12, 55], в результате чего с учетом (1.81) получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_3(\varphi) \mathbf{L}_2(\theta) \mathbf{L}_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(\psi, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix},$$

откуда данные величины подчиняются следующим зависимостям [62, 76]

$$\psi = \arctg(-a_{32} a_{31}^{-1}), \quad (1.86)$$

$$\theta = \arcsin(-a_{31} \cos^{-1} \psi), \quad (1.87)$$

$$\varphi = \arcsin(a_{23} \sin^{-1} \theta). \quad (1.88)$$

Помимо вышерассмотренных комбинаций осей вращения, углы А. Н. Крылова могут задаваться в виде последовательности $\mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{q}_1$ [52], $\mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_3$ [50] или $\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{q}_3$ [26], а углы Л. Эйлера с помощью реализации конечных поворотов $\mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_3$ [15].

Основным недостатком данной формы кинематических параметров является невозможность их практического использования при определенных комбинациях конечных поворотов, например, когда $\theta = \pm 90^\circ$, что соответствует вырождению углового движения вектора только во вращение относительно $\mathbf{q}_3$ [14].

Для представления ортогонального преобразования типа вращение в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ в функции углов А. Н. Крылова $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ или Л. Эйлера ψ, θ, φ , воспользуемся равенствами (1.52)–(1.55). В этом случае при повороте вектора $\mathbf{R}$ на угол $\gamma_k \in (0 \dots \pm \pi)$ относительно $\mathbf{q}_k$, кинематические параметры Родрига-Гамильтона (1.37) с учетом тригонометрических функций синуса и косинуса половинного угла вида (1.30) и (1.31) и преобразованного равенства (1.50)

$$\text{tr} \mathbf{L}_k(\gamma_k) = 2 \cos \gamma_k + 1,$$

совпадают с формулами (1.52)–(1.55) и находятся как

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{\text{tr} \mathbf{L}_k(\gamma_k) + 1}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cos \gamma_k + 2}}{2} = \frac{\sqrt{2 \left(2 \cos^2 \frac{\gamma_k}{2} - 1 \right) + 2}}{2} = \cos \frac{\gamma_k}{2},$$

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon_{klm} (a_{ml} - a_{lm})}{2 \sqrt{\text{tr} \mathbf{L}_k(\gamma_k) + 1}} = \frac{\sin \gamma_k}{\sqrt{2 \cos \gamma_k + 2}} = \frac{2 \cos \frac{\gamma_k}{2} \sin \frac{\gamma_k}{2}}{2 \cos \frac{\gamma_k}{2}} = \sin \frac{\gamma_k}{2},$$

$$\lambda_l = \frac{\varepsilon_{klm} (a_{kl} - a_{lk})}{2 \sqrt{\text{tr} \mathbf{L}_k(\gamma_k) + 1}} = \lambda_m = \frac{\varepsilon_{klm} (a_{km} - a_{mk})}{2 \sqrt{\text{tr} \mathbf{L}_k(\gamma_k) + 1}} = 0,$$

откуда нормированный кватернион конечного поворота относительно k -ой мнимой единицы [62]

$$\mathbf{\Lambda}_k = \lambda_0 + \lambda_k \circ \mathbf{q}_k = \cos \frac{\gamma_k}{2} + \sin \frac{\gamma_k}{2} \circ \mathbf{q}_k. \quad (1.89)$$

Кинематические параметры Кэли-Клейна вычисляются по соотношениям (1.66), (1.67) и при угловом движении относительно $\mathbf{q}_3$ находятся как

$$\alpha = \lambda_0 - j\lambda_3 = \cos \frac{\gamma_3}{2} - j \sin \frac{\gamma_3}{2} = \bar{\delta}, \quad \beta = \gamma = 0, \quad (1.90)$$

при повороте через мнимую единицу $\mathbf{q}_2$

$$\alpha = \delta = \cos \frac{\gamma_2}{2}, \quad \beta = -\gamma = -(\lambda_2 + j\lambda_1) = -\sin \frac{\gamma_2}{2}, \quad (1.91)$$

а в случае вращения вокруг $\mathbf{q}_1$

$$\alpha = \delta = \cos \frac{\gamma_1}{2}, \quad \beta = \gamma = -j \sin \frac{\gamma_1}{2}. \quad (1.92)$$

Таким образом, матричная форма записи кватерниона при угловом движении относительно мнимой единицы $\mathbf{q}_k$ в комплексном двумерном uv -пространстве примет следующий вид [14, 15, 26]

$$\mathbf{Q}_3(\gamma_3) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma_3}{2} - j \sin \frac{\gamma_3}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\gamma_3}{2} + j \sin \frac{\gamma_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j \frac{\gamma_3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j \frac{\gamma_3}{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2(\gamma_2) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma_2}{2} & -\sin \frac{\gamma_2}{2} \\ \sin \frac{\gamma_2}{2} & \cos \frac{\gamma_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1(\gamma_1) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma_1}{2} & -j \sin \frac{\gamma_1}{2} \\ -j \sin \frac{\gamma_1}{2} & \cos \frac{\gamma_1}{2} \end{bmatrix},$$

т.е. итоговый поворот в функции углов А. Н. Крылова $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ задается результатом последовательно выполняемых матричных произведений

$$\mathbf{Q}_2(\varphi_2)\mathbf{Q}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_2}{2} & -\sin \frac{\varphi_2}{2} \\ \sin \frac{\varphi_2}{2} & \cos \frac{\varphi_2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j \frac{\varphi_3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j \frac{\varphi_3}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cdot e^{-j \frac{\varphi_3}{2}} & -\sin \frac{\varphi_2}{2} \cdot e^{j \frac{\varphi_3}{2}} \\ \sin \frac{\varphi_2}{2} \cdot e^{-j \frac{\varphi_3}{2}} & \cos \frac{\varphi_2}{2} \cdot e^{j \frac{\varphi_3}{2}} \end{bmatrix},$$

или окончательно

$$\mathbf{Q}(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \mathbf{Q}_1(\varphi_1)\mathbf{Q}_2(\varphi_2)\mathbf{Q}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_1}{2} & -j \sin \frac{\varphi_1}{2} \\ -j \sin \frac{\varphi_1}{2} & \cos \frac{\varphi_1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2(\varphi_2)\mathbf{Q}_3(\varphi_3),$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - j \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) e^{-j \frac{\varphi_3}{2}} & - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} + j \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \right) e^{j \frac{\varphi_3}{2}} \\ \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} - j \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \right) e^{-j \frac{\varphi_3}{2}} & \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + j \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) e^{j \frac{\varphi_3}{2}} \end{bmatrix}.$$

При переходе в последнем равенстве от показательной формы функции комплексной переменной к ее тригонометрическому виду, действительные и мнимые составляющие кинематических параметров Кэли-Клейна в функции углов А. Н. Крылова находятся как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) &= \operatorname{Re} \delta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2}, \\ \operatorname{Im} \alpha(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) &= -\operatorname{Im} \delta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} \right), \\ \operatorname{Re} \beta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) &= -\operatorname{Re} \gamma(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2}, \\ \operatorname{Im} \beta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) &= \operatorname{Im} \gamma(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} \right), \end{aligned}$$

а величины Родрига-Гамильтона в соответствии с (1.64) и (1.65) [62]

$$\lambda_0(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \operatorname{Re} \alpha(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \operatorname{Re} \delta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1), \quad (1.93)$$

$$\lambda_1(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \frac{j}{2}(\beta + \gamma) = -\operatorname{Im} \beta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = -\operatorname{Im} \gamma(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1), \quad (1.94)$$

$$\lambda_2(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = -\operatorname{Re} \beta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \operatorname{Re} \gamma(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1), \quad (1.95)$$

$$\lambda_3(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \frac{j}{2}(\alpha - \delta) = -\operatorname{Im} \alpha(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \operatorname{Im} \delta(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1). \quad (1.96)$$

Далее, получим расчетные соотношения для определения вещественных коэффициентов кватерниона результирующего поворота в функции $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ при линейном преобразовании векторного кватерниона $\mathbf{R}$ в Q -базисе вида (1.29), на основании которого получаем

$$\Lambda_2(\varphi_2) \circ \Lambda_3(\varphi_3) = \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \circ \mathbf{q}_2 \right) \circ \left(\cos \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_3}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right),$$

$$\Lambda_2 \circ \Lambda_3 = \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} \circ \mathbf{q}_1 + \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} \circ \mathbf{q}_2 + \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right),$$

$$\Lambda(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \Lambda_1(\varphi_1) \circ \Lambda_2(\varphi_2) \circ \Lambda_3(\varphi_3) = \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \circ \mathbf{q}_1 \right) \circ \Lambda_2(\varphi_2) \circ \Lambda_3(\varphi_3),$$

в результате чего после выполнения всех необходимых математических операций и переходе к Гамильтоновой форме записи становится справедливым

$$\Lambda(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \lambda_0(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) + \sum_{k=1}^3 \lambda_k(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) \circ \mathbf{q}_k,$$

в котором кинематические параметры Родрига-Гамильтона находятся как

$$\lambda_0(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

$$\lambda_1(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2},$$

$$\lambda_2(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

$$\lambda_3(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

Как нетрудно заметить из последних равенств, вещественные коэффициенты нормированного кватерниона $\Lambda(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$ результирующего поворота вектора $\mathbf{R}$ полностью совпадают с формулами (1.93)–(1.96).

Учитывая тот факт, что в случае рассмотрения неизменного вектора в различных системах координат каждая строка ортогональной матрицы $\mathbf{L}$ формируется из коэффициентов линейного разложения преобразованной орты по исходному трехмерному базису [26], то элементы на главной диагонали будут представлять собой направляющие косинусы между одноименными осями, в результате чего угол между $\mathbf{q}_1$ и гиперкомплексным отображением $\mathbf{e}_1$, например, при переходе к α, β, γ координатам состояния с помощью матричного равенства (1.11) равен [75]

$$\chi_1(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \arccos(a_{11}) = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 35,264^\circ,$$

между $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{e}_2$

$$\chi_2(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \arccos(a_{22}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ,$$

между $\mathbf{q}_3$ и $\mathbf{e}_3$

$$\chi_3(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1) = \arccos(a_{33}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,736^\circ.$$

В случае задания математической операции типа вращение при помощи углов Л. Эйлера ψ, θ, φ , кинематические параметры Кэли-Клейна с учетом условия унимодулярности (1.58) определяются на основании формул (1.68) и (1.69) [62]

$$\alpha(\psi, \theta, \varphi) = \pm \sqrt{-\frac{(a_{33} + 1)(a_{31} + ja_{32})}{2(a_{13} + ja_{23})}} = \pm \sqrt{\frac{(\cos\theta + 1)}{2} \cdot \frac{(\cos\psi - j\sin\psi)}{(\cos\varphi + j\sin\varphi)}},$$

$$\beta(\psi, \theta, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{(a_{33} - 1)(a_{31} - ja_{32})}{2(a_{13} + ja_{23})}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)}{2} \cdot \frac{(\cos\psi + j\sin\psi)}{(\cos\varphi + j\sin\varphi)}},$$

откуда при использовании показательной формы записи функции комплексной переменной и тригонометрических формул разложения косинуса (1.30) и синуса (1.31) половинного угла окончательно получаем

$$\alpha(\psi, \theta, \varphi) = \pm \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j(\psi+\varphi)}} = \pm \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} \left(e^{-j\frac{\psi+\varphi}{2}} \right)^2} = \pm \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j\frac{\psi+\varphi}{2}} = \bar{\delta}(\psi, \theta, \varphi),$$

$$\beta(\psi, \theta, \varphi) = \pm \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot e^{j(\psi-\varphi)}} = \pm \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} \left(e^{j\frac{\psi-\varphi}{2}} \right)^2} = \pm \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{j\frac{\psi-\varphi}{2}} = -\bar{\gamma}(\psi, \theta, \varphi).$$

Неоднозначность в выборе знака параметров Кэли-Клейна можно исключить, если непосредственно определить результирующую матрицу вращения путем выполнения следующей последовательности произведений [14]

$$\mathbf{Q}(\psi, \theta, \varphi) = \mathbf{Q}_3(\varphi)\mathbf{Q}_2(\theta)\mathbf{Q}_3(\psi) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j\frac{\psi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j\frac{\psi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(\psi, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j \frac{\psi + \varphi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{j \frac{\psi - \varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{-j \frac{\psi - \varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{j \frac{\psi + \varphi}{2}} \end{bmatrix}.$$

Для выражения вещественных коэффициентов нормированного кватерниона через углы Л. Эйлера воспользуемся формулами (1.64) и (1.65), откуда [62]

$$\lambda_0(\psi, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}(\alpha(\psi, \theta, \varphi) + \delta(\psi, \theta, \varphi)) = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad (1.97)$$

$$\lambda_1(\psi, \theta, \varphi) = \frac{j}{2}(\beta(\psi, \theta, \varphi) + \gamma(\psi, \theta, \varphi)) = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad (1.98)$$

$$\lambda_2(\psi, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}(\gamma(\psi, \theta, \varphi) - \beta(\psi, \theta, \varphi)) = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad (1.99)$$

$$\lambda_3(\psi, \theta, \varphi) = \frac{j}{2}(\alpha(\psi, \theta, \varphi) - \delta(\psi, \theta, \varphi)) = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \quad (1.100)$$

В целях проверки правильности полученных результатов (1.97)–(1.100), воспользуемся формулами вида (1.89) и определим нормированный кватернион суммарного поворота в функции ψ, θ, φ как результат произведения в Q -алгебре

$$\Lambda_2(\theta) \circ \Lambda_3(\psi) = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \circ \mathbf{q}_2 \right) \circ \left(\cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right),$$

$$\Lambda_2(\theta) \circ \Lambda_3(\psi) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \circ \mathbf{q}_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \circ \mathbf{q}_2 + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right),$$

или окончательно

$$\Lambda(\psi, \theta, \varphi) = \Lambda_3(\varphi) \circ \Lambda_2(\theta) \circ \Lambda_3(\psi) = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right) \circ \Lambda_2(\theta) \circ \Lambda_3(\psi),$$

где кинематические параметры Родрига-Гамильтона

$$\lambda_0(\psi, \theta, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\lambda_1(\psi, \theta, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\lambda_2(\psi, \theta, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\lambda_3(\psi, \theta, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right),$$

которые при учете (1.6) и тригонометрической формулы разложения синуса с аргументом в виде суммы (разности) двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (1.101)$$

преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \lambda_0(\psi, \theta, \varphi) &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1(\psi, \theta, \varphi) &= -\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}, \\ \lambda_2(\psi, \theta, \varphi) &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, & \lambda_3(\psi, \theta, \varphi) &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \end{aligned}$$

полностью совпадающим с (1.97)–(1.100).

В заключение необходимо отметить, на основании представленных выше аналитических выражений для определения численных значений различных кинематических параметров линейных ортогональных преобразований фазных переменных Е. Clarke и R. Н. Park [144, 182] можно в зависимости от класса решаемых задач существенно упростить соответствующие процедуры анализа или синтеза трехфазных систем переменного тока различного назначения.

1.7 Применение алгебры кватернионов в задачах анализа процессов в электромеханических системах переменного тока

1.7.1 Математическая модель асинхронной машины в Q-базисе

В качестве практического примера использования четырехмерного гиперкомплексного пространстве $\mathbf{H}$ при анализе статических и динамических режимов работы электромеханических систем, в данном разделе будут представлены математические модели электромагнитных процессов в асинхронной машине двойного питания, которые получены после линейных ортогональных преобразований Е. Clarke и R. Н. Park [144, 182].

При общепринятых допущениях [69] дифференциальные уравнения электрического равновесия неподвижной и вращающейся частей имеют следующий вид [68, 80]

$$\mathbf{U}_{ABC}^i = R_i \mathbf{I}_{ABC}^i + \frac{d\mathbf{\Psi}_{ABC}^i}{dt}, \quad (1.102)$$

где i – индекс, указывающий на принадлежность кватерниона или его вещественных коэффициентов к статору s или ротору r ; R_i – активное сопротивление соответствующей фазной обмотки; $\mathbf{U}_{ABC}^i, \mathbf{I}_{ABC}^i, \mathbf{\Psi}_{ABC}^i$ – векторные кватернионы соответственно напряжений, токов и потокосцеплений [78, 79, 176]

$$\mathbf{X}_{ABC}^i = x_A^i \circ \mathbf{q}_1 + x_B^i \circ \mathbf{q}_2 + x_C^i \circ \mathbf{q}_3, \quad (1.103)$$

здесь x_A^i, x_B^i, x_C^i – мгновенные или средние за период дискретизации значения электромагнитных переменных неподвижной и вращающейся частей электрической машины.

В целях упрощения последующего математического описания электромеханической системы, выполним Clarke Transformation вида (1.10) путем умножения всех элементов (1.102) слева на прямой $\Lambda_{\alpha\beta o}$, а справа на обратный $\Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}$ нормированные кватернионы

$$\Lambda_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{U}_{ABC}^i \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} = R_i \Lambda_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{I}_{ABC}^i \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} + \Lambda_{\alpha\beta o} \circ \frac{d\mathbf{\Psi}_{ABC}^i}{dt} \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}. \quad (1.104)$$

Прежде чем непосредственно перейти к анализу отдельных составляющих правой части (1.104), первоначально определим численные значения кинематических параметров в различных формах представления, соответствующих ортогональной матрице Е. Clarke (1.11). При данной ориентации трехфазных переменных x_A^i, x_B^i, x_C^i в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$, при которой ось абсцисс совмещена с $\mathbf{q}_1$, ось ординат с $\mathbf{q}_2$, а ось аппликат с $\mathbf{q}_3$, вещественные величины Родрига-Гамильтона в соответствии с формулами (1.52)–(1.55) равны [74, 78]

$$\lambda_0 = 0,8805, \lambda_1 = 0,3647, \lambda_2 = -0,2798, \lambda_3 = 0,1159, \quad (1.105)$$

а угол поворота γ и координаты эйлеровой оси вращения ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\gamma = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{L} - 1}{2} = \arccos \left(\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \right) = 0,9879 = 56,6^\circ,$$

$$\xi_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \gamma} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = 0,7693,$$

$$\xi_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \gamma} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = -0,5903,$$

$$\xi_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \gamma} = (2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ)^{-1} = 0,2445.$$

В свою очередь после выполнения необходимых математических вычислений комплексные величины Кэли-Клейна равны [62, 179]

$$\alpha = \lambda_0 - j\lambda_3 = 0,8805 - j0,1159, \quad \beta = -(\lambda_2 + j\lambda_1) = 0,2798 - j0,3647,$$

$$\gamma = -\bar{\beta} = \lambda_2 - j\lambda_1 = -0,2798 - j0,3647, \quad \delta = \bar{\alpha} = \lambda_0 + j\lambda_3 = 0,8805 + j0,1159,$$

причем вектор в комплексном двумерном uv -пространстве после подобного унитарного преобразования (1.74) и соблюдении условия симметрии (1.2) будет являться функцией только одной комплексной переменной

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta 0}^i = \begin{bmatrix} 0 & -(x_\beta^i + jx_\alpha^i) \\ x_\beta^i - jx_\alpha^i & 0 \end{bmatrix}.$$

При математическом представлении Clarke Transformation в форме трех конечных поворотов относительно несовпадающих осей, углы А. Н. Крылова вычисляются по формулам (1.83)–(1.85) и равны [76]

$$\varphi_2 = \arcsin(a_{13}) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -24,095^\circ,$$

$$\varphi_1 = \arcsin(-a_{23} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 50,769^\circ,$$

$$\varphi_3 = \arcsin(-a_{12} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 26,565^\circ,$$

а численные значения углов Л. Эйлера

$$\psi = \arctg(-a_{32}a_{31}^{-1}) = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \arctg(-1) = -45^\circ,$$

$$\theta = \arcsin(-a_{31} \cos^{-1} \psi) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2}\right) = \arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -54,736^\circ,$$

$$\varphi = \arcsin(a_{23} \sin^{-1} \theta) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ.$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования произведения двух кватернионов [26], первоначально представим $\dot{\Psi}_{\alpha\beta o}^i$ в виде следующей комбинации

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_{\alpha\beta o} \Psi_{ABC}^i \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}) = \frac{d\Lambda_{\alpha\beta o}}{dt} \Psi_{ABC}^i \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} + \Lambda_{\alpha\beta o} \frac{d\Psi_{ABC}^i}{dt} \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} + \Lambda_{\alpha\beta o} \Psi_{ABC}^i \frac{d\Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}}{dt},$$

откуда при использовании промежуточного равенства $\Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} \circ \Lambda_{\alpha\beta o} = 1$ становится справедливым

$$\Lambda_{\alpha\beta o} \circ \frac{d\Psi_{ABC}^i}{dt} \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} = \frac{d\Psi_{\alpha\beta o}^i}{dt} - \frac{d\Lambda_{\alpha\beta o}}{dt} \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} \circ \Psi_{\alpha\beta o}^i - \Psi_{\alpha\beta o}^i \circ \Lambda_{\alpha\beta o} \circ \frac{d\Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}}{dt}. \quad (1.106)$$

В итоге, учитывая тот факт, что вещественные коэффициенты прямого $\Lambda_{\alpha\beta o}$ и обратного $\Lambda_{\alpha\beta o}^{-1}$ кватернионов вращения являются постоянными величинами, то уравнения электрического равновесия статора и ротора (1.102) в координатах состояния $x_\alpha^i, x_\beta^i, x_o^i$ принимают следующий вид

$$U_{\alpha\beta o}^i = R_i I_{\alpha\beta o}^i + \frac{d\Psi_{\alpha\beta o}^i}{dt}. \quad (1.107)$$

В заключение также необходимо отметить, что при данном способе математического описания электромагнитных процессов в асинхронной машине двойного питания на основе Q -алгебры можно также выполнить последующее линейное ортогональное преобразование с квадратной матрицей вида (1.15), осуществляющей поворот $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ относительно эйлеровой оси $\mathbf{q}_3$ на угол Θ_3^i . Так, например, в соответствии с (1.89) нормированный кватернион вращения в данном случае имеет следующий вид

$$\Lambda_3 = \cos \frac{\Theta_3^i}{2} + \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3, \quad (1.108)$$

откуда переходя к формуле (1.107)

$$\Lambda_3 \circ \mathbf{U}_{\alpha\beta o}^i \circ \Lambda_3^{-1} = R_i \Lambda_3 \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta o}^i \circ \Lambda_3^{-1} + \Lambda_3 \circ \frac{d\Psi_{\alpha\beta o}^i}{dt} \circ \Lambda_3^{-1},$$

в которой по аналогии с (1.106) последнее слагаемое в правой части находится как

$$\Lambda_3 \circ \frac{d\Psi_{\alpha\beta o}^i}{dt} \circ \Lambda_3^{-1} = \frac{d\Psi_{dqo}^i}{dt} - \frac{d\Lambda_3}{dt} \circ \Lambda_3^{-1} \circ \Psi_{dqo}^i - \Psi_{dqo}^i \circ \Lambda_3 \circ \frac{d\Lambda_3^{-1}}{dt},$$

здесь $\mathbf{X}_{dqo}^i$ – кватернион вида (1.103) с координатами состояния d, q, o , являющийся аналогом трехмерного алгебраического вектора-столбца в $\mathfrak{R}^3$, полученного после двукратного линейного ортогонального преобразования x_A^i, x_B^i, x_C^i с квадратными матрицами направляющих косинусов вида (1.11) и (1.15)

$$\mathbf{X}_{dqo}^i = \Lambda_3 \circ \mathbf{X}_{\alpha\beta o}^i \circ \Lambda_3^{-1} = x_d^i \circ \mathbf{q}_1 + x_q^i \circ \mathbf{q}_2 + x_o^i \circ \mathbf{q}_3.$$

После выполнения промежуточных математических операций

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_3}{dt} \circ \Lambda_3^{-1} &= \frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \left(-\sin \frac{\Theta_3^i}{2} + \cos \frac{\Theta_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right) \circ \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} - \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right) = \frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3, \\ \Lambda_3 \circ \frac{d\Lambda_3^{-1}}{dt} &= -\frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} + \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right) \circ \left(\sin \frac{\Theta_3^i}{2} + \cos \frac{\Theta_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3 \right) = -\frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3, \end{aligned}$$

становится справедливым

$$\Lambda_3 \circ \frac{d\Psi_{\alpha\beta o}^i}{dt} \circ \Lambda_3^{-1} = \frac{d\Psi_{dqo}^i}{dt} - \frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \mathbf{q}_3 \circ \Psi_{dqo}^i + \frac{\dot{\Theta}_3^i}{2} \circ \Psi_{dqo}^i \circ \mathbf{q}_3,$$

в результате чего уравнения электрического равновесия фазных обмоток статора и ротора в координатах состояния x_d^i, x_q^i, x_o^i при использовании (1.26) окончательно принимают следующий вид

$$\mathbf{U}_{dqo}^i = R_i \mathbf{I}_{dqo}^i + \frac{d\Psi_{dqo}^i}{dt} + \dot{\Theta}_3^i \circ \text{vect}(\Psi_{dqo}^i \circ \mathbf{q}_3). \quad (1.109)$$

В свою очередь, воспользовавшись равенством (1.89), нормированный кватернион вращения относительно оси аппликат $-j\mathbf{S}_3$ в матричной форме представления (1.62) имеет следующий вид

$$\mathbf{Q}_3 = \cos \frac{\Theta_3^i}{2} \mathbf{I} - j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \mathbf{S}_3, \quad \mathbf{Q}_3^+ = \cos \frac{\Theta_3^i}{2} \mathbf{I} + j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \mathbf{S}_3,$$

в результате чего преобразованный вектор $\mathbf{X}_{dco}^i = \mathbf{Q}_3 \mathbf{X}_{\alpha\beta o}^i \mathbf{Q}_3^+$ в комплексном двумерном uv -пространстве с учетом тригонометрических формул (1.30) и (1.31) находится как

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{dco}^i &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_3^i}{2} - j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\Theta_3^i}{2} + j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -jx_o^i & -(x_\beta^i + jx_\alpha^i) \\ x_\beta^i - jx_\alpha^i & jx_o^i \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3^+, \\ \mathbf{X}_{dco}^i &= \begin{bmatrix} -jx_o^i \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} - j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \right) & -(x_\beta^i + jx_\alpha^i) \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} - j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \right) \\ (x_\beta^i - jx_\alpha^i) \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} + j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \right) & jx_o^i \left(\cos \frac{\Theta_3^i}{2} + j \sin \frac{\Theta_3^i}{2} \right) \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3^+, \\ \mathbf{X}_{dco}^i &= \begin{bmatrix} -jx_o^i & -(x_\beta^i + jx_\alpha^i) (\cos \Theta_3^i - j \sin \Theta_3^i) \\ (x_\beta^i - jx_\alpha^i) (\cos \Theta_3^i + j \sin \Theta_3^i) & jx_o^i \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_{dco}^i &= \begin{bmatrix} -jx_o^i & -(x_q^i + jx_d^i) \\ x_q^i - jx_d^i & jx_o^i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

причем аналогичный результат можно также получить при помощи подстановки комплексных величин α и δ из матрицы $\mathbf{Q}_3$ непосредственно в (1.77).

1.7.2 Математическая модель асинхронной машины в комплексном двумерном uv -пространстве

В данном подразделе будет изложен теоретический материал, связанный с математическим описанием электромагнитных процессов в фазных обмотках асинхронной машины двойного питания при представлении мнимых единиц кватерниона с помощью матриц Паули (1.59). В соответствии с формулами (1.102) и (1.107) дифференциальные уравнения электрического равновесия статора и ротора имеют следующий вид [71]

$$\mathbf{U}_i = R_i \mathbf{I}_i + \frac{d\Psi_i}{dt},$$

где $\mathbf{U}_i, \mathbf{I}_i, \Psi_i$ – векторы специальной структуры напряжений, токов и потокосцеплений вида (1.72) в исходном базисе фазных переменных или координатах состояния $x_\alpha^i, x_\beta^i, x_o^i$.

Далее, в зависимости от вида исходных элементов матричных кватернионов, выполним линейное ортогональное преобразование Е. Clarke или R. Н. Park на основании следующей формулы

$$\mathbf{Q} \mathbf{U}_i \mathbf{Q}^+ = R_i \mathbf{Q} \mathbf{I}_i \mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q} \frac{d\Psi_i}{dt} \mathbf{Q}^+,$$

где $\mathbf{Q}$ – унитарная унимодулярная матрица размерностью $\dim 2 \times 2$, или иначе

$$\mathbf{U}_i^* = R_i \mathbf{I}_i^* + \mathbf{Q} \frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^+ \Psi_i^* \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^+, \quad (1.110)$$

здесь $\mathbf{U}_i^*, \mathbf{I}_i^*, \Psi_i^*$ – векторы напряжений, токов и потокосцеплений вида (1.76) в α, β, o или d, q, o координатах состояния

$$\mathbf{X}_i^* = \mathbf{Q} \mathbf{X}_i \mathbf{Q}^+.$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования по скалярному аргументу произведения трех матриц [52], равенство (1.110) примет следующий вид

$$\mathbf{U}_i^* = R_i \mathbf{I}_i^* + \mathbf{Q} \left(\frac{d\mathbf{Q}^+}{dt} \Psi_i^* \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^+ \frac{d\Psi_i^*}{dt} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^+ \Psi_i^* \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right) \mathbf{Q}^+,$$

или после раскрытия скобок

$$\mathbf{U}_i^* = R_i \mathbf{I}_i^* + \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{Q}^+}{dt} \Psi_i^* + \frac{d\Psi_i^*}{dt} \mathbf{Q} + \Psi_i^* \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^+.$$

В свою очередь производная обратной матрицы находится как [69]

$$\frac{d\mathbf{Q}^+}{dt} = -\mathbf{Q}^+ \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^+,$$

в результате чего уравнения электрического равновесия статора и ротора (1.110) после унитарного линейного преобразования (1.74) принимают следующий вид

$$\mathbf{U}_i^* = R_i \mathbf{I}_i^* + \frac{d\Psi_i^*}{dt} - \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^+ \Psi_i^* + \Psi_i^* \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^+. \quad (1.111)$$

Порядок чередования фазных переменных в кватернионе вида (1.103) является не единственным. Так, например, учитывая тот факт, что ток статора нулевой составляющей не трансформируется в ротор и не участвует в образовании электромагнитного момента [69], то отождествим его с чисто вещественной компонентой r_2 вектора (1.72), направив ее по оси ординат. В итоге, расположив первую координату по $\mathbf{q}_3$, или иначе $(-j\mathbf{S}_3)$ и совместив оставшуюся с $\mathbf{q}_1(-j\mathbf{S}_1)$, кватернион фазных переменных в комплексном двумерном uv -пространстве примет следующую форму

$$\mathbf{X}_{\beta o \alpha}^i = \begin{bmatrix} -jx_\alpha^i & -(x_o^i + jx_\beta^i) \\ x_o^i - jx_\beta^i & jx_\alpha^i \end{bmatrix},$$

которой соответствует следующее матричное равенство в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x_\beta^i \\ x_o^i \\ x_\alpha^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B^i \\ x_C^i \\ x_A^i \end{bmatrix}. \quad (1.112)$$

После подстановки в формулы (1.68)–(1.71) численных значений элементов $\mathbf{L}$ из последнего равенства (1.112) и учета унимодулярности $\det \mathbf{Q} = 1$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(-j \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(j+1)}{2\sqrt{6}} \right)^{0,5} = 0,8805 - j0,3647, \\ \beta &= \left(-j \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(j-1)}{2\sqrt{6}} \right)^{0,5} = -0,1159 + j0,2798, \\ \gamma = -\bar{\beta} &= \left(\beta^2 + j \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right)^{0,5} = \left(\alpha^2 + \frac{j-1}{\sqrt{2}} \right)^{0,5} = 0,1159 + j0,2798, \end{aligned}$$

$$\delta = \bar{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha^2 \right)^{0,5} = \left(\frac{1+j}{\sqrt{3}} - \beta^2 \right)^{0,5} = 0,8805 + j0,3647,$$

а вещественные коэффициенты нормированного кватерниона в соответствии с (1.64) и (1.65) равны

$$\lambda_0 = 0,8805, \lambda_1 = -0,2798, \lambda_2 = 0,1159, \lambda_3 = 0,3647.$$

В свою очередь координаты эйлеровой оси вращения в четырехмерном гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ и угол конечного поворота вектора вычисляются на основании формул (1.50) и (1.51)

$$\gamma = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{L} - 1}{2} = \arccos \left(\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \right) = 0,9879 = 56,6^\circ,$$

$$\xi_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \gamma} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = -0,5903,$$

$$\xi_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \gamma} = \left(2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ \right)^{-1} = 0,2445,$$

$$\xi_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \gamma} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = 0,7693.$$

Если данное ортогональное линейное преобразование реализовать при помощи трех последовательных вращений через $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, то углы А. Н. Крылова равны

$$\varphi_2 = \arcsin(a_{13}) = \arcsin(0) = 0^\circ,$$

$$\varphi_1 = \arcsin(-a_{23} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -35,26^\circ,$$

$$\varphi_3 = \arcsin(-a_{12} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ,$$

а если путем поворотов на углы Л. Эйлера, то в соответствии с (1.86)–(1.88) окончательно получаем

$$\psi = \arctg(-a_{32} a_{31}^{-1}) = \arctg\left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right) = \arctg(-1) = -45^\circ,$$

$$\theta = \arcsin(-a_{31} \cos^{-1} \psi) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35,26^\circ,$$

$$\varphi = \arcsin(a_{23} \sin^{-1} \theta) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) = \arcsin(1) = 90^\circ.$$

По аналогии с вышеизложенным, определим кинематические параметры Кэли-Клейна для ортогональной матрицы поворота плоскости относительно оси аппликата $(-j\mathbf{S}_2)$, выбрав в соответствии с (1.91) элементы прямой и обратной матриц поворота как

$$\alpha = \delta = \cos \frac{\Theta_2^i}{2}, \quad \beta = -\bar{\gamma} = -\sin \frac{\Theta_2^i}{2},$$

здесь Θ_2^i – электрический угол поворота вектора $\mathbf{X}_{\beta o \alpha}^i$ в двумерном подпространстве, образованном мнимыми единицами $(-j\mathbf{S}_3)$ и $(-j\mathbf{S}_1)$,

откуда в соответствии с (1.89)

$$\mathbf{Q}_2 = \cos \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{I} - j \sin \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{Q}_2^+ = \cos \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{I} + j \sin \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{S}_2.$$

На основании последних равенств унитарное преобразование (1.29) примет вид

$$\mathbf{X}_{qod}^i = \mathbf{Q}_2 \mathbf{X}_{\beta o \alpha}^i \mathbf{Q}_2^+ = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_2^i}{2} & -\sin \frac{\Theta_2^i}{2} \\ \sin \frac{\Theta_2^i}{2} & \cos \frac{\Theta_2^i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -jx_\alpha^i & -(x_o^i + jx_\beta^i) \\ x_o^i - jx_\beta^i & jx_\alpha^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_2^i}{2} & \sin \frac{\Theta_2^i}{2} \\ -\sin \frac{\Theta_2^i}{2} & \cos \frac{\Theta_2^i}{2} \end{bmatrix},$$

или после подстановки кинематических параметров Кэли-Клейна в (1.77)

$$\mathbf{X}_{qod}^i = \begin{bmatrix} j(x_\beta^i \sin \Theta_2^i - x_\alpha^i \cos \Theta_2^i) & -j(x_\alpha^i \sin \Theta_2^i + x_\beta^i \cos \Theta_2^i) - x_o^i \\ -j(x_\beta^i \cos \Theta_2^i + x_\alpha^i \sin \Theta_2^i) + x_o^i & j(x_\alpha^i \cos \Theta_2^i - x_\beta^i \sin \Theta_2^i) \end{bmatrix},$$

откуда в соответствии с (1.112) и матрицей $\mathbf{L}_2(\varphi_2)$ из соотношения (1.80) окончательно получаем

$$\mathbf{X}_{qod}^i = \begin{bmatrix} -jx_d^i & -(x_o^i + jx_q^i) \\ x_o^i - jx_q^i & jx_d^i \end{bmatrix}.$$

Используя вектор $\mathbf{X}_{doq}^i$ и правую часть равенства (1.111), выполним ряд промежуточных вычислений с учетом тригонометрических формул (1.30) и (1.31)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^+ = -\frac{\dot{\Theta}_2^i}{2} \left(\sin \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{I} + j \cos \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{S}_2 \right) \left(\cos \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{I} + j \sin \frac{\Theta_2^i}{2} \mathbf{S}_2 \right) = \frac{\dot{\Theta}_2^i}{2} (-j\mathbf{S}_2),$$

в результате чего становится справедливым

$$\Psi_{qod}^i \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^+ - \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^+ \Psi_{qod}^i = -j\dot{\Theta}_2^i (\psi_q^i \mathbf{S}_3 - \psi_d^i \mathbf{S}_1) = -j\dot{\Theta}_2^i \begin{bmatrix} \psi_q^i & -\psi_d^i \\ -\psi_d^i & -\psi_q^i \end{bmatrix},$$

откуда уравнения электрического равновесия статора и ротора асинхронной машины окончательно примут следующий вид

$$\mathbf{U}_{qod}^i = R_i \mathbf{I}_{qod}^i + \frac{d\Psi_{qod}^i}{dt} - \dot{\Theta}_2^i \psi_d^i (-j\mathbf{S}_1) + \dot{\Theta}_2^i \psi_q^i (-j\mathbf{S}_3). \quad (1.113)$$

В заключение необходимо отметить, что представленные в данном разделе математические модели электромагнитных процессов асинхронного двигателя в кватернионах были проверены методом цифрового моделирования в программном продукте “MATLAB 7.7” R2008b и показали абсолютно идентичные результаты с традиционным векторно-матричным способом описания электромеханических систем переменного тока в пространстве состояний [69].

1.7.3 Кинематические параметры преобразования фазных переменных при различных способах ориентации координатных осей

Учитывая некоммутативные правила произведения мнимых единиц (1.17), существует третий способ расположения фазных переменных в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$, при котором первая координата направлена по $\mathbf{q}_2(-j\mathbf{S}_2)$, вторая по третьей мнимой единице $\mathbf{q}_3(-j\mathbf{S}_3)$, а последняя по $\mathbf{q}_1(-j\mathbf{S}_1)$. В этом случае линейное преобразование типа вращение при переходе к α, β, o координатам описывается следующим уравнением

$$\begin{bmatrix} x_o^i \\ x_\alpha^i \\ x_\beta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C^i \\ x_A^i \\ x_B^i \end{bmatrix},$$

в результате чего элементы нормированного кватерниона в алгебре матриц размерностью $\dim 2 \times 2$ находятся как

$$\alpha = \left(\frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + j)}{2\sqrt{6}} \right)^{0,5} = 0,8805 + j0,2798,$$

$$\beta = - \left(\frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + j)}{2\sqrt{6}} \right)^{0,5} = -0,3647 - j0,1159,$$

$$\gamma = -\bar{\beta} = \left(\beta^2 - j \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}} \right)^{0,5} = \left(\alpha^2 - \frac{1 + j}{\sqrt{3}} \right)^{0,5} = 0,3647 - j0,1159,$$

$$\delta = \bar{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}} - \alpha^2 \right)^{0,5} = \left(\frac{2 - j}{\sqrt{6}} - \beta^2 \right)^{0,5} = 0,8805 - j0,2798,$$

или в Гамильтоновой форме (1.16)

$$\lambda_0 = 0,8805, \lambda_1 = 0,1159, \lambda_2 = 0,3647, \lambda_3 = -0,2798,$$

а сам вектор в комплексном двумерном uv -пространстве при соблюдении условия симметрии (1.2) принимает следующий вид

$$\mathbf{X}_{o\alpha\beta}^i = \begin{bmatrix} -jx_\beta^i & -x_\alpha^i \\ x_\alpha^i & jx_\beta^i \end{bmatrix}.$$

В свою очередь кинематические параметры в форме углов А. Н. Крылова равны

$$\varphi_2 = \arcsin(a_{13}) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 35,264^\circ,$$

$$\varphi_1 = \arcsin(-a_{23} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ,$$

$$\varphi_3 = \arcsin(-a_{12} \cos^{-1} \varphi_2) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -45^\circ,$$

численные значения углов Л. Эйлера определяются из формул (1.86)–(1.88)

$$\psi = \arctg(-a_{32}a_{31}^{-1}) = \arctg(0) = 0^\circ,$$

$$\theta = \arcsin(-a_{31} \cos^{-1} \psi) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ,$$

$$\varphi = \arcsin(a_{23} \sin^{-1} \theta) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -35,264^\circ,$$

а результирующий угол поворота γ и координаты оси вращения соответственно находятся как

$$\gamma = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{L} - 1}{2} = \arccos \left(\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \right) = 0,9879 = 56,6^\circ,$$

$$\xi_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \gamma} = \left(2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ \right)^{-1} = 0,2445,$$

$$\xi_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \gamma} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = 0,7693,$$

$$\xi_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \gamma} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{6} \sin 56,6^\circ} = -0,5903.$$

При изменении углового положения вектора $\mathbf{X}_{o\alpha\beta}^i$ относительно оси $\mathbf{q}_1$ комплексные величины Кэли-Клейна описываются равенствами (1.92), в результате кватернион линейного преобразования задается в виде

$$\mathbf{Q}_1 = \cos \frac{\Theta_1^i}{2} \mathbf{I} - j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{Q}_1^+ = \cos \frac{\Theta_1^i}{2} \mathbf{I} + j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} \mathbf{S}_3,$$

здесь Θ_1^i – электрический угол поворота вектора $\mathbf{X}_{o\alpha\beta}^i$ относительно первой мнимой единицы $(-j\mathbf{S}_1)$,

откуда элементы $\mathbf{X}_{odq}^i = \mathbf{Q}_1 \mathbf{X}_{o\alpha\beta}^i \mathbf{Q}_1^+$ определяются из равенства

$$\mathbf{X}_{odq}^i = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_1^i}{2} & -j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} \\ -j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} & \cos \frac{\Theta_1^i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -jx_\beta^i & -(x_\alpha^i + jx_o^i) \\ x_\alpha^i - jx_o^i & jx_\beta^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_1^i}{2} & j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} \\ j \sin \frac{\Theta_1^i}{2} & \cos \frac{\Theta_1^i}{2} \end{bmatrix},$$

на основании которого получаем

$$\mathbf{X}_{odq}^i = \begin{bmatrix} -j(x_\beta^i \cos \Theta_1^i + x_\alpha^i \sin \Theta_1^i) & (x_\beta^i \sin \Theta_1^i - x_\alpha^i \cos \Theta_1^i) - jx_o^i \\ (x_\alpha^i \cos \Theta_1^i - x_\beta^i \sin \Theta_1^i) - jx_o^i & j(x_\beta^i \cos \Theta_1^i + x_\alpha^i \sin \Theta_1^i) \end{bmatrix},$$

или окончательно с учетом матрицы А. Н. Крылова $\mathbf{L}_1(\varphi_1)$ из равенства (1.82)

$$\mathbf{X}_{odq}^i = \begin{bmatrix} -jx_q^i & -(x_d^i + jx_o^i) \\ x_d^i - jx_o^i & jx_q^i \end{bmatrix}.$$

В заключение необходимо отметить, что изменение порядка чередования мнимых единиц, направленных через оси абсцисс и ординат в рассмотренных выше комбинациях базисных орт гиперкомплексного пространства $\mathbf{H}$, будет приводить к перестановке мест нижних индексов антисимметричного трехмерного символа Леви-Чивиты в (1.17) и, как следствие, смене знака у координат векторов электрической машины переменного тока.

1.8 Выводы по главе

На основании проведенного в данной главе анализа различных форм представления кинематических параметров линейных ортогональных преобразований трехфазных переменных типа вращение, а также математических моделей электромагнитных процессов в асинхронной машине двойного питания с использованием гиперкомплексных чисел, можно сделать следующие выводы:

1. Практическое применение тригонометрической формы записи кватернионов с единичным направляющим вектором ξ вида (1.20) в задачах преобразования фазных переменных Е. Clarke дает возможность непосредственно определять координаты эйлеровой оси и величину угла вращения в трехмерном подпространстве $\mathbf{H}$, а параметры Эйлера-Крылова позволяют разложить угловое движение на три последовательно выполняемых конечных поворота.

2. Техническая реализация математической операции типа вращение на основе направляющих косинусов или углов Эйлера-Крылова в цифровых системах с микропроцессорным управлением требует наличие больших областей памяти для

хранения элементов матриц размерностью $\dim 3 \times 3$ и менее производительна из-за перемножения алгебраических векторов, что обуславливает практическое преимущество гиперкомплексных чисел.

3. Кинематические параметры Родрига-Гамильтона или Кэли-Клейна не содержат тригонометрических функций как, например, углы Эйлера-Крылова и зависят только от четырех скалярных величин с одним уравнением связи в отличие от 9-ти элементов матрицы направляющих косинусов.

4. Представление мнимых единиц $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ в форме матриц Паули позволяет применять хорошо проработанный математический аппарат функции комплексной переменной для анализа процессов в электротехнических или электромеханических системах переменного тока с линейно независимой системой трехфазных переменных вида (1.4).

5. Линейные преобразования исходного базиса с кинематическими параметрами Родрига-Гамильтона или Кэли-Клейна являются инвариантными относительно скалярного произведения векторов, по причине чего энергетические характеристики трехфазной системы и ее математической модели в новых координатах состояния будут совпадать по абсолютному значению.

6. Рассмотрение уравнения баланса мгновенных мощностей в кватернионном базисе дает возможность отдельно выделять вещественную и мнимую составляющие, создавая таким образом теоретические основы к синтезу алгоритмов управления силовыми преобразовательными устройствами компенсации для решения прикладных задач повышения энергоэффективности.

2 СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

2.1 Мгновенная мощность электрических цепей переменного тока

2.1.1 Математические модели однофазных линейных цепей с использованием среднеквадратичных значений

Мгновенная мощность пассивного двухполюсника при его работе в режиме установившихся гармонических колебаний [6, 37], при котором входные напряжение и ток подчиняются аналитическим зависимостям вида

$$u = u_m \cos(\omega t + \phi_u), \quad i = i_m \cos(\omega t + \phi_i),$$

находится как

$$p = u \cdot i = u_m i_m \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i),$$

откуда воспользовавшись тригонометрической формулой разложения произведения косинусов с различными аргументами [116]

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad (2.1)$$

окончательно получаем

$$p = \frac{u_m i_m}{2} (\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)), \quad (2.2)$$

или с учетом (1.6) в более развернутом виде [96]

$$p = \frac{u_m i_m}{2} (\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(\phi_u + \phi_i) \cos 2\omega t - \sin(\phi_u + \phi_i) \sin 2\omega t).$$

На основании последнего равенства можно заключить, что потребляемая пассивным двухполюсником мгновенная мощность осуществляет периодические колебания с удвоенной частотой относительно среднего значения, за которое отвечает преобразуемая в другие формы энергии первое слагаемое, а гармонические составляющие в правой части (2.2) описывают процесс обмена энергией в единицу времени между источником и двухполюсником.

В свою очередь среднее за период значение мгновенной мощности

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} (ui) dt,$$

с учетом (2.2) находится как

$$P = \frac{u_m i_m}{2T} \left(\cos(\phi_u - \phi_i) \cdot t \Big|_0^T + \frac{1}{2\omega} \left(\cos(\phi_u + \phi_i) \sin 2\omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} + \sin(\phi_u + \phi_i) \cos 2\omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} \right) \right),$$

откуда [6]

$$P = \frac{u_m i_m}{2} \cos(\phi_u - \phi_i). \quad (2.3)$$

Далее, вычислим среднеквадратичное значение гармонического тока [82]

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt},$$

предварительно воспользовавшись тригонометрической формулой (1.30), на основании которой подкоренное интегральное выражение принимает вид

$$\int_0^T i^2 dt = i_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi_i) dt = \frac{i_m^2}{2} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\phi_i) dt \right),$$

или по аналогии с выводом (2.3)

$$\int_0^T i^2 dt = \frac{i_m^2}{2} \left(t \Big|_0^T + \frac{1}{2\omega} \left(\cos 2\phi_i \sin 2\omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} + \sin 2\phi_i \cos 2\omega t \Big|_0^{2\pi/\omega} \right) \right),$$

$$\int_0^T i^2 dt = \frac{i_m^2}{2} T, \quad (2.4)$$

т.е. среднеквадратичное значение переменного тока подчиняется следующему равенству

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}.$$

Для определения физического смысла данной величины проанализируем количество рассеянной электрической энергии в цепи постоянного тока при чисто активной нагрузке за временной интервал, численно равный периоду [6]

$$w_{r-} = \int_0^T p dt = \int_0^T U_- I_- dt = I_-^2 r \int_0^T dt = I_-^2 r T ,$$

или применительно к установившимся процессам переменного тока при $\phi_u = \phi_i$

$$w_{r\sim} = \int_0^T p dt = \int_0^T u i dt = r \int_0^T i^2 dt ,$$

в результате чего из равенства $w_{r\sim} = w_{r-}$ и учете (2.4) окончательно получаем

$$I_- = \frac{i_m}{\sqrt{2}} ,$$

т.е. среднеквадратичное, или иначе действующее значение I производит такое же тепловое или механическое воздействие, что и постоянный ток той же величины [82].

С учетом вышеизложенного среднее за период T значение мгновенной мощности (2.3), носящее название активной, примет вид

$$P = UI \cos \varphi , \quad (2.5)$$

где U, I – действующие значения напряжения и тока соответственно; $\varphi = \phi_u - \phi_i$ – разность фазовых сдвигов между мгновенными величинами u и i .

Последнее равенство, по аналогии с выделяемой мощностью в цепи постоянного тока, отвечает за потребляемую пассивным двухполюсником активную энергию в единицу времени.

На основании выше принятых обозначений проанализируем уравнение мгновенной мощности (2.2)

$$p = UI(\cos \varphi + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i + (\phi_i - \phi_i))) = UI(\cos \varphi + \cos(2\omega t + 2\phi_i + \varphi)),$$

которое после использования тригонометрической формулы разложения косинуса с аргументом в виде суммы двух углов (1.6) примет вид

$$p = UI(\cos \varphi + \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\phi_i) - \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\phi_i)).$$

В этом случае первая и вторая составляющие в правой части последнего равенства являются соответственно постоянной и переменной активными мощностями

[82], амплитуда последнего гармонического слагаемого носит название реактивной мощности [131]

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (2.6)$$

а коэффициент перед скобками называется полной мощностью

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.7)$$

Рассмотренные выше результаты можно также использовать для решения прикладных задач анализа трехфазных цепей с использованием алгебраических векторов вида (1.1), применительно к которым становятся справедливыми следующие расчетные соотношения:

– мгновенная мощность

$$p_{ABC} = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C;$$

– средняя за период активная мощность

$$P_{ABC} = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T (u_A i_A) dt + \int_0^T (u_B i_B) dt + \int_0^T (u_C i_C) dt \right) = \sum_{\forall j} P_j, \quad (2.8)$$

здесь $j = A, B, C$ – нижний индекс, указывающий на принадлежность переменной к соответствующей фазе;

– среднеквадратичное значение алгебраического вектора фазных переменных

$$X_{ABC} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{x}_{ABC}^T \mathbf{x}_{ABC}) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x_A^2 + x_B^2 + x_C^2) dt},$$

$$X_{ABC} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_A^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T x_B^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T x_C^2 dt} = \sqrt{X_A^2 + X_B^2 + X_C^2}, \quad (2.9)$$

которое при соблюдении условия симметрии (1.2) совпадает с евклидовой нормой алгебраического вектора (1.1) и находится как [69]

$$X_{ABC} = \|\mathbf{x}_{ABC}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} x_m.$$

2.1.2 Линейное разложение мгновенного тока S. Fryze

В 1932 г. S. Fryze [148–150] предложил методологический подход к разделению мгновенного синусоидального тока на активную и реактивную составляющие, который основан на математическом аппарате средних значений. В соответствии со вторым законом Кирхгофа и соблюдении условия $\phi_u = \phi_i$, уравнение мгновенной мощности находится как

$$p = ui = \frac{1}{r} u^2.$$

После интегрирования обеих частей последнего равенства за период установившихся автоколебаний и учете формулы (2.3) становится справедливым [6]

$$P = \frac{1}{r} U^2,$$

откуда активная мгновенная составляющая переменного тока находится как [142]

$$i_p = \frac{1}{r} u = \left(\frac{P}{U^2} \right) u = gu,$$

здесь $g = r^{-1}$ – активная проводимость.

В свою очередь мгновенный реактивный ток определяется через алгебраическую сумму в следующем виде

$$i_q = i - i_p. \quad (2.10)$$

В качестве основных соотношений предложенной S. Fryze линейной комбинации (2.10) выступают следующие интегральные равенства [49]

$$\int_0^T ui_q dt = \int_0^T (ui) dt - \int_0^T ui_p dt = P - \frac{1}{r} \int_0^T u^2 dt = P - P = 0, \quad (2.11)$$

$$\int_0^T i_p i_q dt = \int_0^T i_p i dt - \int_0^T i_p^2 dt = \frac{1}{r} \int_0^T (ui) dt - \frac{1}{r^2} \int_0^T u^2 dt = \frac{P^2}{U^2} - \frac{P^2}{U^2} = 0, \quad (2.12)$$

из которых следует, что пространственный вектор мгновенного реактивного тока на плоскости ортогонален векторам напряжения и активного тока, вследствие чего последние являются коллинеарными.

В свою очередь, если квадрат действующего значения тока из (2.10) представить как [67]

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_p + i_q)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_p^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T (i_p i_q) dt + \frac{1}{T} \int_0^T i_q^2 dt,$$

то с учетом условия (2.12) окончательно получаем

$$I^2 = I_p^2 + I_q^2,$$

или после умножения на обеих частей на U^2

$$S^2 = P^2 + Q^2,$$

здесь S, P, Q – полная, активная и реактивная мощности соответственно, определяемые как

$$S = UI, \quad P = UI_p, \quad Q = UI_q. \quad (2.13)$$

Линейное разложение S. Fryze можно также распространить на трехфазные системы, применительно к которым алгебраический вектор активного мгновенного тока имеет следующий вид

$$\mathbf{i}_{ABC}^p = G_{ABC} \mathbf{u}_{ABC},$$

здесь G_{ABC} – усредненная величина активных проводимостей трехфазной цепи, определяемая как [131]

$$G_{ABC} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C}{u_A^2 + u_B^2 + u_C^2} dt.$$

После умножения обеих частей последнего равенства на транспонированный вектор $\mathbf{u}_{ABC}^T$

$$\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}^p = G_{ABC} \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{u}_{ABC}$$

и интегрирования за период T с учетом формул (2.8) и (2.9)

$$P_A + P_B + P_C = G_{ABC} (U_A^2 + U_B^2 + U_C^2),$$

данный параметр также можно представить в форме среднеквадратичных значений

$$G_{ABC} = \frac{P_{ABC}}{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2},$$

в результате чего окончательно получаем следующие формулы для вычисления алгебраических векторов активного $\mathbf{i}_{ABC}^p$ и реактивного $\mathbf{i}_{ABC}^q$ мгновенных токов

$$\mathbf{i}_{ABC}^p = G_{ABC} \mathbf{u}_{ABC} = \left(\frac{P_{ABC}}{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2} \right) \mathbf{u}_{ABC}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{i}_{ABC}^q = \mathbf{i}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^p. \quad (2.15)$$

До недавнего времени описанный выше метод разделения потоков электрической энергии в единицу времени вида (2.13) выступал в качестве математической основы при синтезе алгоритмов компенсации из условия минимума обобщенного тока S. Fryze [131]. Учитывая тот факт, что в силу (2.11) $\mathbf{i}_{ABC}^q$ не участвует в образовании усредненной за временной интервал мгновенной мощности, то воспользовавшись методом множителей Лагранжа [85] получим условие минимума следующего интегрального функционала [67]

$$f(\|\mathbf{i}_{ABC}\|^2) = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}) dt, \quad (2.16)$$

на которое накладывается ограничение

$$\varphi(\mathbf{i}_{ABC}^q) = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}^q) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left((\mathbf{i}_{ABC}^q)^T \mathbf{u}_{ABC} \right) dt = 0. \quad (2.17)$$

В этом случае в соответствии с формулой (2.15) Лагранжиан принимает следующий вид

$$\mathbf{L} = f_0(\|\mathbf{i}_{ABC}\|^2) + \psi \cdot \varphi(\mathbf{i}_{ABC}^q) = \mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} + \psi \cdot \mathbf{u}_{ABC}^T (\mathbf{i}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^p),$$

где ψ – множитель Лагранжа,

воспользовавшись которым, экстремальное значение (2.16) достигается при выполнении следующего условия

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{i}_{ABC}} = \mathbf{i}_{ABC}^T + \psi \cdot \mathbf{u}_{ABC}^T = 0. \quad (2.18)$$

Из последнего равенства с учетом формулы (2.14) транспонированный вектор мгновенного реактивного тока находится как

$$(\mathbf{i}_{ABC}^q)^T = -(\mathbf{i}_{ABC}^p)^T - \psi \cdot \mathbf{u}_{ABC}^T = -(G_{ABC} + \psi) \mathbf{u}_{ABC}^T,$$

в результате чего выполняя его подстановку в (2.17) окончательно получаем

$$\psi = -G_{ABC}.$$

Таким образом, в силу того, что $\mathbf{L}$ представляет собой скалярную величину и не изменяется после математической операции транспонирования, необходимое условие экстремума (2.18) преобразуется к следующему виду [67]

$$\mathbf{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2} \mathbf{u}_{ABC}. \quad (2.19)$$

В заключение необходимо отметить, что основным недостатком основанного на методе S. Fryze теоретического подхода к минимизации активных потерь в трехфазных системах передачи, распределения и преобразования электрической энергии переменного тока является необходимость расчета среднеквадратичных значений напряжений и интегрирование мгновенной мощности для выделения P_{ABC} , что в конечном итоге существенно ухудшает динамические свойства силовых преобразовательных устройств компенсации [131].

2.2 Исходная $p-q$ теория активной и реактивной мгновенных мощностей трехфазной системы переменного тока

2.2.1 Основные положения исходной $p-q$ теории активной и реактивной мгновенных мощностей

Как указано в [29], основным недостатком линейного разложения трехфазных токов на активную и реактивную составляющие в виде (2.14) и (2.15), предложенного S. Fryze, является тот факт, что $\mathbf{i}_{ABC}^p$ и $\mathbf{i}_{ABC}^q$ зависят от усредненной величины мощности за предыдущий интервал времени и суммы квадратов

действующих значений фазных напряжений, что вносит дополнительное запаздывание в систему управления силовым полупроводниковым устройством активной фильтрации. По этой причине в настоящее время используется ряд других определений составляющих уравнения баланса мощностей по мгновенным значениям в трехфазных цепях с нулевым проводом, отличных от (2.5)–(2.7) и (2.13). Так, в 1982–1984 г.г. Н. Akagi, Y. Kanazawa и А. Nabae сформулировали основные положения так называемой $p-q$ теории, которые были опубликованы в [129, 130, 132]. При выводе аналитических выражений первоначально осуществлялось линейное ортогональное преобразование типа вращения Е. Clarke вида (1.10), осуществляющее переход от алгебраического вектора фазных переменных $\mathbf{x}_{ABC}$ к координатам состояния x_α, x_β, x_o .

В этом случае выражение для активной мгновенной мощности задается в виде скалярного произведения векторов напряжения и тока в плоскости α, β [131]

$$p_{\alpha\beta} = \bar{u}_\alpha \cdot \vec{i}_\alpha + \bar{u}_\beta \cdot \vec{i}_\beta, \quad (2.20)$$

мгновенная реактивная мощность определяется на основании векторного произведения в двумерном подпространстве $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$

$$\bar{q}_{\alpha\beta} = \bar{u}_\alpha \times \vec{i}_\beta + \bar{u}_\beta \times \vec{i}_\alpha, \quad (2.21)$$

а скалярное произведение векторов напряжения и тока, направленных по координатной оси аппликат o представляет собой мгновенную мощность нулевой составляющей

$$p_o = \bar{u}_o \cdot \vec{i}_o. \quad (2.22)$$

Как следует из (2.21), $\bar{q}_{\alpha\beta}$ представляет собой пространственный вектор, ортогональный плоскости α, β и направленный по $\bar{\mathbf{e}}_o$, который можно представить в виде линейной комбинации [44, 73]

$$\bar{q}_{\alpha\beta} = \det \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_\alpha & \bar{\mathbf{e}}_\beta & \bar{\mathbf{e}}_o \\ u_\alpha & u_\beta & 0 \\ i_\alpha & i_\beta & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_\alpha & \bar{\mathbf{e}}_\beta & \bar{\mathbf{e}}_o \\ u_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & i_\beta & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_\alpha & \bar{\mathbf{e}}_\beta & \bar{\mathbf{e}}_o \\ 0 & u_\beta & 0 \\ i_\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{q}_{\alpha\beta} = (u_{\alpha}i_{\beta} - u_{\beta}i_{\alpha}) \cdot \vec{e}_o,$$

а его модуль вычисляется в соответствии с формулой

$$|\vec{q}_{\alpha\beta}| = q_{\alpha\beta} = |u_{\alpha}| \cdot |i_{\beta}| \sin 90^{\circ} - |u_{\beta}| \cdot |i_{\alpha}| \sin 90^{\circ} = u_{\alpha}i_{\beta} - u_{\beta}i_{\alpha}. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись математическим аппаратом матричного исчисления, представим скалярные величины в виде трехмерного алгебраического вектора мгновенной мощности вида (1.1) [59]

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta o} = [p_{\alpha\beta} \quad q_{\alpha\beta} \quad p_o]^T.$$

Далее, запишем равенства (2.20), (2.22) и (2.23) с использованием блочной матрицы [40], каждая клетка-строка которой представляет собой результат преобразования трехмерного алгебраического вектора напряжений

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o^2 \\ -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o \\ \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} u_{\alpha} & u_{\beta} & 0 \\ -u_{\beta} & u_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & u_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha} \\ i_{\beta} \\ i_o \end{bmatrix},$$

или иначе [56, 58]

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta o} = (-u_{\alpha} \mathbf{D}_o^2 - u_{\beta} \mathbf{D}_o + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)) \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta o}, \quad (2.24)$$

где $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}, \mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ – трехмерные алгебраические векторы напряжений и токов вида (1.8) соответственно; $\mathbf{D}_o$ – вырожденная кососимметрическая матрица поворота вектора против хода часовой стрелки в плоскости α, β на угол $\pi/2$, исключая координату по оси o [69]

$$\mathbf{D}_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2$ – вырожденная квадратная матрица размерностью $\dim(\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) = 3 \times 3$, выполняющая линейное преобразование типа проектирование вектора на ось аппликат o [40]

$$\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для выделения активного, реактивного и нулевого векторов мгновенного тока из выражения (2.24) воспользуемся обратной матрицей

$$\left(-u_\alpha \mathbf{D}_o^2 - u_\beta \mathbf{D}_o + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)\right)^{-1} = \frac{\text{adj}(\cdot)}{\det(\cdot)}, \quad (2.25)$$

здесь $\det(\cdot)$ – определитель, скалярная величина которого находится как

$$\det\left(-u_\alpha \mathbf{D}_o^2 - u_\beta \mathbf{D}_o + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)\right) = u_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2,$$

где $\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| = \sqrt{u_\alpha^2 + u_\beta^2}$ – евклидова норма двумерного алгебраического вектора напряжений в плоскости α, β при соблюдении условия симметрии (1.2); $\text{adj}(\cdot)$ – присоединенная (союзная) матрица, составленная из алгебраических дополнений с последующим транспонированием [48]

$$\text{adj}\left(-u_\alpha \mathbf{D}_o^2 + u_\beta \mathbf{D}_o + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)\right) = u_o \begin{bmatrix} u_\alpha & -u_\beta & 0 \\ u_\beta & u_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & u_o^{-1} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2 \end{bmatrix}.$$

В итоге, после подстановки в (2.25) промежуточных результатов вычисления, обратная матрица находится как

$$\left(-u_\alpha \mathbf{D}_o^2 + u_\beta \mathbf{D}_o + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)\right)^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \begin{bmatrix} u_\alpha & -u_\beta & 0 \\ u_\beta & u_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & u_o^{-1} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2 \end{bmatrix},$$

или иначе [59]

$$\left(u_\beta \mathbf{D}_o - u_\alpha \mathbf{D}_o^2 + u_o (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2)\right)^{-1} = \left(\frac{u_\beta}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o - \frac{u_\alpha}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o^2 + u_o^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right). \quad (2.26)$$

После умножения слева обеих частей уравнения баланса мгновенных мощностей в векторно-матричной форме записи (2.24) на (2.26) становится справедливым [56]

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-2} \left(-u_{\alpha} \mathbf{D}_o^2 + u_{\beta} \mathbf{D}_o + u_o^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2 \right) \mathbf{p}_{\alpha\beta o},$$

или с учетом того, что

$$\left(u_{\beta} \mathbf{D}_o - u_{\alpha} \mathbf{D}_o^2 + \frac{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2}{u_o} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{p}_{\alpha\beta o} = \left(q_{\alpha\beta} \mathbf{D}_o - p_{\alpha\beta} \mathbf{D}_o^2 + \frac{p_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2}{u_o^2} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o},$$

окончательно получаем следующее линейное разложение

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-2} \left(q_{\alpha\beta} \mathbf{D}_o - p_{\alpha\beta} \mathbf{D}_o^2 + \frac{p_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2}{u_o^2} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o, \quad (2.27)$$

где $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p, \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q, \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o$ – алгебраические векторы-столбцы мгновенных значений активной, реактивной и нулевой составляющих $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$ соответственно [59]

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p &= [i_{\alpha p} \quad i_{\beta p} \quad 0]^T = \frac{-p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o^2 \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} [u_{\alpha} \quad u_{\beta} \quad 0]^T, \\ \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q &= [i_{\alpha q} \quad i_{\beta q} \quad 0]^T = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} [-u_{\beta} \quad u_{\alpha} \quad 0]^T, \\ \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o &= [0 \quad 0 \quad i_o]^T = \frac{p_o}{u_o^2} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \cdot \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = [0 \quad 0 \quad p_o u_o^{-1}]^T. \end{aligned}$$

Далее, проанализируем влияние алгебраического вектора $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q$ на уравнение баланса мгновенных мощностей [56]

$$p(t) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T (\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o) = p_{\alpha\beta} + p_q + p_o, \quad (2.28)$$

в которой с учетом линейной комбинации (2.27) и последних равенств реактивная компонента находится как [73]

$$p_q = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} (u_{\beta} u_{\alpha} - u_{\alpha} u_{\beta}) = 0,$$

т.е. алгебраический вектор мгновенного реактивного тока $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q$ не участвует в образовании $p(t)$ и отвечает за потоки электрической энергии в единицу времени,

которые не потребляются от источника и циркулируют между трехфазными цепями [136, 197], на основании чего (2.28) окончательно раскладывается на два слагаемых [56]

$$p(t) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T (\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \left(-\frac{p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o^2 + \frac{p_o}{u_o^2} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = p_{\alpha\beta} + p_o. \quad (2.29)$$

По аналогии, если модуль пространственного вектора мгновенной реактивной мощности (2.21), представляющего собой результат произведений второй строки блочной матрицы в (2.24) на $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ выразить в функции активной и нулевой составляющих токов

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta} &= -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o (\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^o) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \left(\frac{p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o \mathbf{D}_o^2 - \frac{p_o}{u_o^2} (\mathbf{D}_o + \mathbf{D}_o \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o}, \\ q_{\alpha\beta} &= -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \left(\frac{p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{D}_o + \frac{p_o}{u_o^2} (\mathbf{D}_o - \mathbf{D}_o) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = -\frac{p_{\alpha\beta} (u_\alpha u_\beta - u_\beta u_\alpha)}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

то на основании последних соотношений можно заключить, что данная скалярная величина находится как [59]

$$|\vec{q}_{\alpha\beta}| = -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q = -\frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{u}_{\alpha\beta}^T \mathbf{D}_o \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = q_{\alpha\beta},$$

где $\mathbf{E}_1 = -\mathbf{D}_o^2$ – вырожденная квадратная матрица размерностью $\dim \mathbf{E}_1 = 3 \times 3$, остающаяся без изменения координаты вектора в двумерном подпространстве α, β и исключая нулевую составляющую x_o [69]

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если рассмотреть аналог полной мощности S в ее геометрической интерпретации вида (2.7) применительно к мгновенным значениям, то с учетом (2.20), (2.22) и (2.23) данная скалярная величина находится как [161]

$$s_{\alpha\beta} = \sqrt{(p_{\alpha\beta} + p_o)^2 + q_{\alpha\beta}^2} = \sqrt{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \cdot \|\mathbf{i}_{\alpha\beta}\| + u_o i_o (u_o i_o + 2(u_{\alpha} i_{\alpha} + u_{\beta} i_{\beta}))}. \quad (2.31)$$

2.2.2 Анализ мгновенных мощностей исходной $p-q$ теории

В данном разделе будет произведен гармонический анализ мгновенных мощностей из исходной $p-q$ теории, выполненный при помощи разложения несимметричной системы напряжений и токов на прямую, обратную и нулевую последовательности фаз с использованием функции комплексной переменной [10, 65, 115, 131, 205, 208]

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_+ \\ \dot{X}_- \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_A \\ \dot{X}_B \\ \dot{X}_C \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где $a = e^{j120^\circ}$ – оператор поворота на угол 120° ,

или при обратном переходе

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_A \\ \dot{X}_B \\ \dot{X}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_+ \\ \dot{X}_- \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

в результате чего n -ая гармоника фазной переменной во временной области находится как

$$x_{An} = x_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{n+}) + x_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{n-}) + x_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{n0}), \quad (2.34)$$

$$x_{Bn} = x_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{n+} - 120^\circ) + x_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{n-} + 120^\circ) + x_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{n0}), \quad (2.35)$$

$$x_{Cn} = x_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{n+} + 120^\circ) + x_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{n-} - 120^\circ) + x_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{n0}). \quad (2.36)$$

Для получения полного спектрального состава координат алгебраического вектора $\mathbf{x}_{ABC}$ после линейного преобразования (1.10) в случае несинусоидальной периодической формы сигналов воспользуемся тригонометрической формулой (1.6), на основании которой становится справедливым

$$\cos(\omega t + \phi + 120^\circ) + \cos(\omega t + \phi - 120^\circ) = -\cos(\omega t + \phi), \quad (2.37)$$

$$\cos(\omega t + \phi - 120^\circ) - \cos(\omega t + \phi + 120^\circ) = \sqrt{3} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.38)$$

или окончательно [136]

$$\begin{aligned} x_{\alpha n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} x_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{n+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} x_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{n-}), \\ x_{\beta n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} x_{mn+} \sin(\omega_n t + \phi_{n+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} x_{mn-} \sin(\omega_n t + \phi_{n-}), \\ x_{0n} &= \sqrt{3} x_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{n0}). \end{aligned}$$

т.е. координаты состояния α, β не зависят от нулевой последовательности фаз [131].

Далее, осуществим спектральный анализ активной мгновенной мощности $p_{\alpha\beta}$ вида (2.20) в соответствии с (2.1) и последними формулами, предварительно определив компоненты по оси α :

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$p_{\alpha++} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

где n, r – порядковые номера гармоник напряжения и тока соответственно, откуда по аналогии с (2.2) и среднеквадратичными значениями при $n = r$

$$p_{\alpha++} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+})$$

и для случая $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_{\alpha++} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right);$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$p_{\alpha--} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

которое при равенстве порядковых номеров гармоник с $n = r$ находится как

$$p_{\alpha--} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-}),$$

а при $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_{\alpha--} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$p_{\alpha+-} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при $n = r$

$$p_{\alpha+-} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$p_{\alpha+-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) + \\ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$p_{\alpha-+} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$

$$p_{\alpha-+} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$p_{\alpha-+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) + \\ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right).$$

По аналогии с вышеизложенным, определим расчетные соотношения для вычисления поперечной компоненты активной мощности $p_{\alpha\beta}$ по координате состояния β :

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$p_{\beta++} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

которое при использовании тригонометрической формулы [44, 116]

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

и переходе к среднеквадратичным значениям при $n=r$ приводит к следующим соотношениям

$$p_{\beta++} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+}),$$

или для случая $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_{\beta++} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$p_{\beta--} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{nn-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{rr-} \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при $n=r$

$$p_{\beta--} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-})$$

и при несовпадении их порядковых номеров с $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_{\beta--} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \end{aligned}$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$p_{\beta+-} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

для одинаковых гармоник с $n = r$

$$p_{\beta+-} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_{\beta+-} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$p_{\beta-+} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$

$$p_{\beta-+} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$p_{\beta-+} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right).
\end{aligned}$$

В итоге, выполняя подстановку промежуточных результатов в формулу (2.20)

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha++} + P_{\alpha--} + P_{\alpha+-} + P_{\alpha-+} + P_{\beta++} + P_{\beta--} + P_{\beta+-} + P_{\beta-+}$$

и разделяя каждое слагаемое на постоянную и переменную составляющие окончательно получаем

$$P_{\alpha\beta} = \bar{P}_{\alpha\beta} + \tilde{P}_{\alpha\beta}, \quad (2.39)$$

где $\bar{P}_{\alpha\beta}$ – постоянная составляющая активной мгновенной мощности

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-});$$

$\tilde{P}_{\alpha\beta}$ – переменная составляющая активной мгновенной мощности

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{\alpha\beta} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}).
\end{aligned}$$

В соответствии с вышеизложенным, далее выполним гармоническое разложение мгновенной мощности нулевой составляющей, представив ее в соответствии с (2.22) как

$$p_o = u_o i_o = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

в результате чего по аналогии с прямой и обратной последовательностями p_α, p_β при $n=r$ получаем

$$p_o = \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}),$$

а при несовпадении порядковых номеров гармоник напряжения и тока в случае $n \neq r$

$$\begin{aligned} p_o &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right). \end{aligned}$$

Как видно из последних соотношений, данная скалярная величина также разделяется на постоянную $\bar{p}_o$ и переменную $\tilde{p}_o$ части

$$p_o = \bar{p}_o + \tilde{p}_o, \quad (2.40)$$

которые соответственно находятся как

$$\begin{aligned} \bar{p}_o &= \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}), \\ \tilde{p}_o &= \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right).
\end{aligned}$$

Окончательно используя данный подход к математическому описанию не-симметричной нелинейной системы трехфазных переменных в рамках $p-q$ теории, представим модуль пространственного вектора мгновенной реактивной мощности (2.23) в виде суммы постоянной и переменной составляющих, предварительно определив:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$\begin{aligned}
q_{1++} &= u_{\alpha+} i_{\beta+} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}), \\
q_{2++} &= -u_{\beta+} i_{\alpha+} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),
\end{aligned}$$

в результате чего воспользовавшись тригонометрической формулой [44, 116]

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

при $n = r$ получаем

$$\begin{aligned}
q_{1++} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \sin(-\phi_{un+} + \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+}), \\
q_{2++} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+})
\end{aligned}$$

и по аналогии для случая $n \neq r$

$$q_{1++} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin((- \omega_n + \omega_r) \cdot t - \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right), \\
q_{2++} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\
&= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right);
\end{aligned}$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$\begin{aligned}
q_{1--} &= u_{\alpha-} i_{\beta-} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}), \\
q_{2--} &= -u_{\beta-} i_{\alpha-} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),
\end{aligned}$$

которое при $n = r$ находится как

$$\begin{aligned}
q_{1--} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \sin(-\phi_{un-} + \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-}), \\
q_{2--} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-}),
\end{aligned}$$

и для случая $n \neq r$

$$q_{1--} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin((- \omega_n + \omega_r) \cdot t - \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right), \\
q_{2--} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right);
\end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned}
q_{1+-} &= u_{\alpha+} i_{\beta-} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}), \\
q_{2+-} &= -u_{\beta+} i_{\alpha-} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn+} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),
\end{aligned}$$

при $n = r$

$$\begin{aligned}
q_{1+-} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \sin(-\phi_{un+} + \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}), \\
q_{2+-} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})
\end{aligned}$$

и при $n \neq r$

$$q_{1+-} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin((- \omega_n + \omega_r) \cdot t - \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right), \\
q_{2+-} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\
&= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right);
\end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned}
q_{1-+} &= u_{\alpha-} i_{\beta+} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}), \\
q_{2-+} &= -u_{\beta-} i_{\alpha+} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} u_{mn-} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2}} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),
\end{aligned}$$

при равных номерах гармоник, т.е. при $n = r$

$$\begin{aligned}
q_{1-+} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \sin(-\phi_{un-} + \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}), \\
q_{2-+} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}),
\end{aligned}$$

а также в случае $n \neq r$

$$q_{1-+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \sin(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin((- \omega_n + \omega_r) \cdot t - \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right), \\
q_{2-+} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3}{2} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right).
\end{aligned}$$

В итоге, гармоническое разложение модуля пространственного вектора мгновенной реактивной мощности из исходной $p-q$ можно представить при помощи алгебраической суммы компонент как

$$q_{\alpha\beta} = q_{1++} + q_{1--} + q_{1+-} + q_{1-+} + q_{2++} + q_{2--} + q_{2+-} + q_{2-+},$$

которое после подстановки в него промежуточных результатов вычисления окончательно принимает следующий вид

$$q_{\alpha\beta} = \bar{q}_{\alpha\beta} + \tilde{q}_{\alpha\beta}, \quad (2.41)$$

где $\bar{q}_{\alpha\beta}, \tilde{q}_{\alpha\beta}$ – постоянная и переменная составляющие $q_{\alpha\beta}$ соответственно [141]

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{\alpha\beta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}), \\
\tilde{q}_{\alpha\beta} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}).
\end{aligned}$$

В заключении также необходимо отметить, что расчетные соотношения для определения численных значений постулированных в рамках $p-q$ теории энергетических характеристик в случае линейной нагрузки и симметрии фазных переменных по мгновенным значениям можно непосредственно получить из формул (2.39)–(2.41) путем исключения из их состава гармонических составляющих обратной и нулевой последовательности при соблюдении равенства $n = r = 1$.

2.2.3 Выводы по разделу

Таким образом, обобщая полученные в данном разделе 2.2 теоретические результаты анализа процесса энергопотребления в рамках исходной $p-q$ теории можно сделать следующие выводы [126, 131, 136, 197]:

1. При соблюдении условия симметрии (1.2) по мгновенным значениям и гармонической форме фазных переменных, в активной и реактивной мгновенных мощностях отсутствуют периодические колебания, а в случае наличия углового сдвига постоянные составляющие совпадают по абсолютному значению с классическими выражениями для определения аналогичных среднеквадратичных величин вида (2.5) и (2.6) без привлечения математической операции интегрирование, т.е.

$$\bar{p}_{\alpha\beta} = 3U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) = 3UI \cos \varphi,$$

$$\bar{q}_{\alpha\beta} = -3U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) = -3UI \sin \varphi.$$

2. Как видно из формулы (2.29), модуль $\bar{q}_{\alpha\beta}$ не входит в уравнение баланса нагрузки, вследствие чего пространственный вектор реактивной мгновенной мощности отвечает за потоки электрической энергии в единицу времени, которые не потребляются от источника и циркулируют между трехфазными цепями.

3. Постоянные значения активной и нулевой мгновенных мощностей отвечают за преобразуемую в другие формы электрическую энергию, а их переменные компоненты характеризуют процессы обмена энергией между источником и нагрузкой.

4. Присутствие в фазных напряжениях или токах гармоник с порядковыми номерами, отличными от основной, а также наличие асимметрии вида (1.4), приводит к появлению в $p_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ периодических колебаний.

5. Нулевая последовательность фаз не входит в активную и реактивную мгновенные мощности и отвечает только за p_o , вызывая в ней одновременное появление постоянной и переменной составляющих.

2.3 Расширенная $p-q$ теория активной и реактивной мгновенных мощностей трехфазной системы переменного тока

Учитывая тот факт, что мгновенная мощность в соответствии с (2.29) представляет собой алгебраическую сумму активной $p_{\alpha\beta}$ и нулевой p_o составляющих, то разработанный Н. Akagi с соавторами подход к анализу процесса энергопотребления трехфазных систем получил свое дальнейшее развитие в виде так называемой расширенной (видоизмененной) $p-q$ теории [171], на основании которой активная мгновенная мощность задается в виде скалярного произведения трехмерных векторов напряжения и тока в координатах состояния α, β, o [131, 135, 154]

$$p_{\alpha\beta o} = \bar{u}_{\alpha} \cdot \vec{i}_{\alpha} + \bar{u}_{\beta} \cdot \vec{i}_{\beta} + \bar{u}_o \cdot \vec{i}_o, \quad (2.42)$$

или в скалярном виде

$$p_{\alpha\beta o} = p_{\alpha\beta} + p_o, \quad (2.43)$$

а пространственный вектор мгновенной реактивной мощности определяется на основании векторного произведения в $\mathfrak{R}^3$ как

$$\vec{q}_{\alpha\beta o} = \vec{u}_{\alpha\beta o} \times \vec{i}_{\alpha\beta o}, \quad (2.44)$$

который также можно представить в виде следующей линейной комбинации [120]

$$\vec{q}_{\alpha\beta o} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_\alpha & \vec{e}_\beta & \vec{e}_o \\ u_\alpha & u_\beta & u_o \\ i_\alpha & i_\beta & i_o \end{pmatrix} = q_\alpha \vec{e}_\alpha + q_\beta \vec{e}_\beta + q_o \vec{e}_o,$$

где q_α, q_β, q_o – координаты $\vec{q}_{\alpha\beta o}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_o$

$$q_\alpha = u_\beta i_o - u_o i_\beta, \quad q_\beta = u_o i_\alpha - u_\alpha i_o, \quad q_o = u_\alpha i_\beta - u_\beta i_\alpha, \quad (2.45)$$

причем q_o совпадает с $q_{\alpha\beta}$ вида (2.23) из исходной $p-q$ теории.

Далее сформируем четырехмерный алгебраический вектор-столбец из скалярных величин $p_{\alpha\beta o}$ и q_α, q_β, q_o

$$\mathbf{p}_{pq} = [p_{\alpha\beta o} \quad q_\alpha \quad q_\beta \quad q_o]^T,$$

который также можно представить с помощью блочной матрицы

$$\mathbf{p}_{pq} = \begin{bmatrix} p_{\alpha\beta o} \\ \mathbf{q}_{\alpha\beta o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{\alpha\beta o} & \mathbf{q}_{\alpha\beta o}^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.46)$$

где $\mathbf{q}_{\alpha\beta o} = [q_\alpha \quad q_\beta \quad q_o]^T$ – алгебраический вектор реактивной составляющей $\mathbf{p}_{pq}$, который связан с $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ в соответствии с равенством

$$\mathbf{q}_{\alpha\beta o} = (u_\alpha \mathbf{D}_\alpha + u_\beta \mathbf{D}_\beta + u_o \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta o}, \quad (2.47)$$

здесь $\mathbf{D}_\alpha$ – вырожденная кососимметрическая матрица поворота вектора против хода часовой стрелки в плоскости β, o на угол $\pi/2$, исключая первую координату по оси α

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{D}_\beta$ – вырожденная кососимметрическая матрица поворота вектора против хода часовой стрелки в плоскости o, α на угол $\pi / 2$, исключая вторую компоненту по оси β

$$\mathbf{D}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая тот факт, по аналогии с ограничением (2.17) из решения задачи минимизации обобщенного тока S. Fryze в силу (2.44) справедливо условие $\vec{q}_{\alpha\beta o} \perp \vec{u}_{\alpha\beta o}$, то координаты $\vec{q}_{\alpha\beta o}$ соотносятся между собой на основании следующего уравнения связи [56, 120, 135]

$$\vec{u}_{\alpha\beta o} \cdot \vec{q}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{q}_{\alpha\beta o} = u_\alpha q_\alpha + u_\beta q_\beta + u_o q_o = 0, \quad (2.48)$$

в результате чего формулы (2.42) и (2.45) с использованием трехмерного алгебраического вектора мгновенных токов и блочной матрицы можно представить как

$$\mathbf{p}_{pq} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \\ -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_\alpha \\ -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_\beta \\ -\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{D}_o \end{bmatrix} \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} u_\alpha & u_\beta & u_o \\ 0 & -u_o & u_\beta \\ u_o & 0 & -u_\alpha \\ -u_\beta & u_\alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Для выделения из (2.49) алгебраического вектора мгновенных токов в функции $\mathbf{p}_{pq}$ вида (2.46) воспользуемся методом, основанном на скелетном разложении матрицы размерностью $\dim[\cdot] = 4 \times 3$ [18, 113], которое с учетом того, что ранг блочной матрицы равен количеству столбцов, приводит к следующему равенству

$$[\cdot] = [\cdot] \cdot \mathbf{E},$$

в результате чего псевдообратная матрица находится как [5]

$$[\cdot]^+ = \left([\cdot]^T [\cdot] \right)^{-1} \cdot [\cdot]^T.$$

После транспонирования получаем

$$[\cdot]^T = [\mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\alpha \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\beta \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o}],$$

в результате чего становится справедливым

$$[\cdot]^T [\cdot] = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2 \mathbf{E},$$

здесь $\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|$ – евклидова норма трехмерного вектора напряжений в координатах состояния α, β, o

$$\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| = \sqrt{\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{u}_{\alpha\beta o}} = \sqrt{u_\alpha^2 + u_\beta^2 + u_o^2}.$$

Таким образом, учитывая тот факт, что обратная матрица к диагональной составляется из ее обратных элементов

$$[\cdot]^+ = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} [\mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\alpha \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\beta \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o}],$$

то после умножение обеих частей (2.49) слева на $[\cdot]^+$ окончательно получаем

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} [\mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\alpha \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_\beta \mathbf{u}_{\alpha\beta o} : \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o}] \cdot \mathbf{p}_{pq},$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} u_\alpha & 0 & u_o & -u_\beta \\ u_\beta & -u_o & 0 & u_\alpha \\ u_o & u_\beta & -u_\alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{\alpha\beta o} \\ q_\alpha \\ q_\beta \\ q_o \end{bmatrix},$$

или иначе [56]

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (p_{\alpha\beta o} \mathbf{E} + q_\alpha \mathbf{D}_\alpha + q_\beta \mathbf{D}_\beta + q_o \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{u}_{\alpha\beta o}. \quad (2.50)$$

Если в каждой строке последнего равенства сгруппировать члены относительно координат $\mathbf{p}_{pq}$, то в расширенной $p-q$ теории вектор $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ можно представить в виде линейной комбинации двух членов [131]

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q, \quad (2.51)$$

где $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p, \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q$ – алгебраические векторы-столбцы мгновенных значений активной и реактивной составляющих в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$ соответственно

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p &= \begin{bmatrix} i_{\alpha}^p & i_{\beta}^p & i_o^p \end{bmatrix}^T = \frac{p_{\alpha\beta o}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{p_{\alpha\beta o}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} u_{\alpha} & u_{\beta} & u_o \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q &= \begin{bmatrix} i_{\alpha}^q & i_{\beta}^q & i_o^q \end{bmatrix}^T = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (q_{\alpha} \mathbf{D}_{\alpha} + q_{\beta} \mathbf{D}_{\beta} + q_o \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{u}_{\alpha\beta o}, \\ \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} (u_o q_{\beta} - u_{\beta} q_o) & (u_{\alpha} q_o - u_o q_{\alpha}) & (u_{\beta} q_{\alpha} - u_{\alpha} q_{\beta}) \end{bmatrix}^T,\end{aligned}$$

причем реактивную компоненту $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q$ в свою очередь можно также разложить на три слагаемых [135]

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q = \mathbf{i}_{\alpha}^q + \mathbf{i}_{\beta}^q + \mathbf{i}_o^q,$$

которые отвечают за образование соответствующей координаты пространственного вектора $\vec{q}_{\alpha\beta o}$ и находятся как

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{\alpha}^q &= \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (q_{\beta} \mathbf{D}_o - q_o \mathbf{D}_{\beta}) \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} (u_o q_{\beta} - u_{\beta} q_o) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{i}_{\beta}^q &= \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (q_o \mathbf{D}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{D}_o) \mathbf{D}_{\beta} \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} 0 & (u_{\alpha} q_o - u_o q_{\alpha}) & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{i}_o^q &= \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (q_{\alpha} \mathbf{D}_{\beta} - q_{\beta} \mathbf{D}_{\alpha}) \mathbf{D}_o \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (u_{\beta} q_{\alpha} - u_{\alpha} q_{\beta}) \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Если в соответствии с вышеизложенным в матричном уравнении баланса мгновенных мощностей представить вектор $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ на основании (2.51)

$$p(t) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T (\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p + \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q) = p_{\alpha\beta o} + p_q \quad (2.52)$$

и определить реактивную составляющую

$$p_q = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T (q_{\alpha} \mathbf{D}_{\alpha} + q_{\beta} \mathbf{D}_{\beta} + q_o \mathbf{D}_o) \mathbf{u}_{\alpha\beta o},$$

то после выполнения необходимых математических операций становится справедливым

$$p_q = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (q_\alpha (u_o u_\beta - u_\beta u_o) + q_\beta (u_o u_\alpha - u_\alpha u_o) + q_o (u_\beta u_\alpha - u_\alpha u_\beta)) = 0,$$

т.е. мгновенная мощность не зависит от $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q$ и совпадает с (2.42)

$$p(t) = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_o i_o = p_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p. \quad (2.53)$$

В свою очередь, при подстановке активной составляющей $\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p$ в (2.47) получаем аналогичный (2.30) результат

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\alpha\beta o} &= (u_\alpha \mathbf{D}_\alpha + u_\beta \mathbf{D}_\beta + u_o \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p, \\ \mathbf{q}_{\alpha\beta o} &= \frac{p_{\alpha\beta o}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} (u_\alpha \mathbf{D}_\alpha + u_\beta \mathbf{D}_\beta + u_o \mathbf{D}_o) \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \frac{p_{\alpha\beta o}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} \mathbf{o}, \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{o}$ – трехмерный алгебраический вектор-столбец, каждый элемент которого равен нулю.

Полная мгновенная мощность в расширенной $p-q$ теории, которая в соответствии с (2.31) определяется как [161]

$$s_{\alpha\beta o} = \sqrt{\mathbf{p}_{pq}^T \mathbf{p}_{pq}} = \sqrt{p_{\alpha\beta o}^2 + q_\alpha^2 + q_\beta^2 + q_o^2} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \cdot \|\mathbf{i}_{\alpha\beta o}\|, \quad (2.54)$$

представляет собой скалярную величину, численно равную произведению евклидовых норм векторов напряжений и токов в координатах α, β, o .

При отсутствии цепи протекания токов нулевой составляющей и симметричной системе напряжений вида (1.3), которое в аналитическом виде соответствует условию

$$u_o = i_o = p_o = q_\alpha = q_\beta = 0,$$

все формулы для вычисления скалярных величин и координат векторов из расширенной $p-q$ теории полностью совпадает с аналогичными выражениями в исходной формулировке, т.е.

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta} &= p_{\alpha\beta o} = \vec{u}_\alpha \cdot \vec{i}_\alpha + \vec{u}_\beta \cdot \vec{i}_\beta, \\ \vec{q}_{\alpha\beta} &= \vec{q}_{\alpha\beta o} = \vec{u}_\alpha \times \vec{i}_\beta + \vec{u}_\beta \times \vec{i}_\alpha = q_o \vec{e}_o, \end{aligned}$$

$$q_{\alpha\beta} = q_o = u_{\alpha}i_{\beta} + u_{\beta}i_{\alpha},$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^p = \frac{p_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \begin{bmatrix} u_{\alpha} & u_{\beta} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta o}^q = \frac{q_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2} \begin{bmatrix} -u_{\beta} & u_{\alpha} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

а полная мощность представляет собой произведение евклидовых норм алгебраических векторов напряжений и токов в двумерном подпространстве α, β

$$s_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \cdot \|\mathbf{i}_{\alpha\beta}\| = \sqrt{(u_{\alpha}^2 + u_{\beta}^2) \cdot (i_{\alpha}^2 + i_{\beta}^2)}.$$

В заключение изложения базовых принципов математического описания энергетических процессов в рамках $p-q$ теорий также необходимо отметить, что представление мгновенной мощности в форме пространственного вектора является некорректным с точки зрения основных законов и правил теоретической механики [55], в соответствии с которыми данная физическая переменная относится к классу скалярных величин и представляет собой производную от выполненной работы.

2.4 Основные положения $p-q-r$ и $d-q$ теорий мгновенной мощности трехфазной системы переменного тока

Как показывает представленный в [160, 161] сравнительный анализ основных положений исходной и расширенной $p-q$ теорий, основным недостатком данных подходов к формированию компенсационных воздействий на выходе АСФ является наличие перекрестных связей между каналами управления, т.к. не существует однозначной зависимости между токами и компонентами алгебраического вектора мгновенной мощности. Для устранения данного недостатка в [123, 163] была представлена $p-q-r$ теория мгновенной мощности, которая базировалась на трехкратном линейном преобразовании исходного базиса фазных пере-

менных с последующей ориентацией системы координат по опорному вектору напряжений. Как видно из рисунка 2.1, первоначально осуществляется вращение $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$ на угол φ_3 по ходу часовой стрелки относительно оси o , а затем поворот вектора на угол φ_2 в положительном направлении вокруг ординаты β , в результате чего преобразованной вектор напряжений совпадает с α [173].

Для математического описания данных линейных операторов типа вращения воспользуемся кинематическими параметрами в форме углов А. Н. Крылова $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$, на основании которых

$$\mathbf{x}_{pqr} = \begin{bmatrix} x_p & x_q & x_r \end{bmatrix}^T = \mathbf{L}_1(\varphi_1)\mathbf{L}_2(\varphi_2)\mathbf{L}_3(\varphi_3)\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2)\mathbf{x}_{\alpha\beta o}, \quad (2.55)$$

здесь $\mathbf{x}_{pqr}$ – алгебраический вектор-столбец напряжений или токов трехмерного вещественного пространства $\mathfrak{R}^3$ с координатами p, q, r ; $\mathbf{L}_1(\varphi_1), \mathbf{L}_2(\varphi_2), \mathbf{L}_3(\varphi_3)$ – квадратные ортогональные матрицы вращения [62]

$$\mathbf{L}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_3) & -\sin(-\varphi_3) & 0 \\ \sin(-\varphi_3) & \cos(-\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1(\varphi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix},$$

откуда с учетом того, что $\varphi_1 = 0^\circ$, или иначе $\mathbf{L}_1(0^\circ) = \mathbf{E}$, окончательно получаем

$$\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2) = \mathbf{L}_2(\varphi_2)\mathbf{L}_3(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_2 \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_2 \sin\varphi_3 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

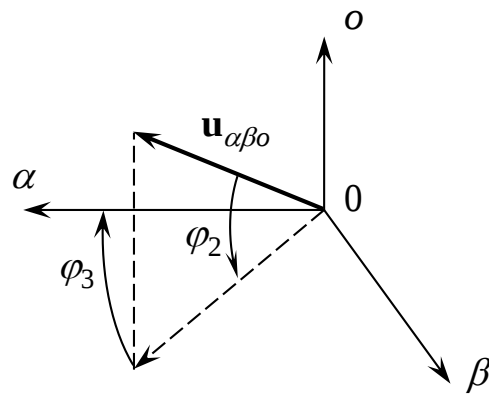


Рисунок 2.1 – Линейное преобразование вектора напряжений $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$
в координатных осях α, β, o с матрицей $\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2)$

Для выражения элементов матрицы $\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2)$ через координаты вектора $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$ воспользуемся рисунком 2.1, с помощью которого можно составить две системы уравнений, описывающих первоначальное вращение на угол $(-\varphi_3)$ [58]

$$\begin{cases} u_\alpha = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \cos \varphi_3, \\ u_\beta = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \sin \varphi_3 \end{cases}$$

и последующий поворот на φ_2

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \cos \varphi_2, \\ u_o = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \sin \varphi_2, \end{cases}$$

в результате чего выполняя подстановку тригонометрических функций в (2.56) окончательно получаем следующую ортогональную матрицу линейного преобразования [163]

$$\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2) = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|} \begin{bmatrix} u_\alpha & u_\beta & u_o \\ -\frac{u_\beta \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} & \frac{u_\alpha \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} & 0 \\ \frac{-u_\alpha u_o}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} & \frac{-u_\beta u_o}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} & \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Простыми вычислениями можно также убедиться, что справедливо равенство

$$\mathbf{u}_{pqr} = \mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2) \mathbf{u}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2.58)$$

т.е. вектор напряжения $\mathbf{u}_{pqr}$ направлен по оси p , или иначе

$$|\vec{u}_p| = \|\mathbf{u}_{pqr}\| = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| = u_p, \quad (2.59)$$

причем в случае симметричной системы напряжений с $u_o = 0$, следствием чего является $\varphi_2 = 0$, матрица результирующего вращения $\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2)$ вырождается в $\mathbf{L}_3(\varphi_3)$.

По аналогии с двумя вышеописанными $p-q$ теориями, активная мгновенная мощность в координатных осях p, q, r задается в виде скалярного произ-

ведения трехмерных векторов напряжения и тока, которая с учетом (2.58) находится как [161, 173]

$$p_{pqr} = \vec{u}_p \cdot \vec{i}_p = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| i_p,$$

а мгновенная реактивная мощность определяется на основании правила векторного произведения как

$$\vec{q}_{pqr} = \vec{u}_{pqr} \times \vec{i}_{pqr} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_p & \vec{e}_q & \vec{e}_r \\ u_p & 0 & 0 \\ i_p & i_q & i_r \end{pmatrix} = q_q \vec{e}_q + q_r \vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{e}_r$ – ортонормированные базисные векторы; q_q, q_r – координаты $\vec{q}_{pqr}$, вычисляемые по формулам

$$q_q = -u_p i_r, \quad q_r = u_p i_q.$$

Если из трех скалярных величин p_{pqr} и q_q, q_r с учетом (2.59) составить трехмерный алгебраический вектор-столбец, то его можно выразить в функции $\mathbf{i}_{pqr}$ в следующем виде [58]

$$\mathbf{p}_{pqr} = \begin{bmatrix} p_{pqr} \\ q_q \\ q_r \end{bmatrix} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_p \\ i_q \\ i_r \end{bmatrix} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \mathbf{L}_1(90^\circ) \cdot \mathbf{i}_{pqr}. \quad (2.60)$$

В силу ортогональности матрицы вращения вектора на 90° относительно координатной оси абсцисс p , из которого следует что $\mathbf{L}_1^{-1}(\varphi_1) = \mathbf{L}_1^T(\varphi_1) = \mathbf{L}_1(-\varphi_1)$, обратный переход к токам выполняется как

$$\mathbf{i}_{pqr} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \mathbf{L}_1(-90^\circ) \cdot \mathbf{p}_{pqr} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{pqr} \\ q_q \\ q_r \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

или иначе

$$\mathbf{i}_{pqr} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \left((\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2) + \mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta - \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_o \right) \cdot \mathbf{p}_{pqr}, \quad (2.62)$$

где $\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2$ – вырожденная квадратная матрица размерностью $\dim(\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2) = 3 \times 3$, осуществляющее линейное преобразование типа проектирование вектора $\mathbf{u}_{pqr}$ на ось абсцисс p [40]

$$\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta, \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_o$ – квадратные матрицы, выполняющие первоначальную перестановку двух проекций вектора с последующим отображением на одну из координатных осей

$$\mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_o = (\mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, каждое из слагаемых в правой части (2.62) отождествим с соответствующими активным и реактивными токами, представив $\mathbf{i}_{pqr}$ в виде линейной комбинации как

$$\mathbf{i}_{pqr} = \mathbf{i}_{pqr}^p + \mathbf{i}_{pqr}^q + \mathbf{i}_{pqr}^r,$$

где $\mathbf{i}_{pqr}^p, \mathbf{i}_{pqr}^q, \mathbf{i}_{pqr}^r$ – алгебраические векторы-столбцы мгновенных значений одной активной и двух реактивных составляющих $\mathbf{i}_{pqr}$ в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$ соответственно

$$\mathbf{i}_{pqr}^p = \begin{bmatrix} i_p & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2) \cdot \mathbf{p}_{pqr} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} p_{pqr} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{i}_{pqr}^q = \begin{bmatrix} 0 & i_q & 0 \end{bmatrix}^T = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta \mathbf{p}_{pqr} = \begin{bmatrix} 0 & \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} q_r & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{i}_{pqr}^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i_r \end{bmatrix}^T = -\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_o \mathbf{p}_{pqr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} q_q \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, как видно из (2.60), три линейно независимых тока в координатах состояния p, q, r однозначно определяют одну активную и две реактивные мгновенные мощности, а обратный переход от векторов $\mathbf{x}_{pqr}$ к $\mathbf{x}_{\alpha\beta o}$ в силу ортогональности $\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2)$ выполняется в виде

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{L}^T(\varphi_3, \varphi_2) \mathbf{x}_{pqr}. \quad (2.63)$$

Воспользовавшись последней формулой, запишем уравнение баланса мгновенных мощностей в координатах состояния α, β, o

$$p(t) = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{L}^T(\varphi_3, \varphi_2) \mathbf{i}_{pqr},$$

которое при учете того, что

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{L}^T(\varphi_3, \varphi_2) = (\mathbf{L}(\varphi_3, \varphi_2) \mathbf{u}_{\alpha\beta o})^T = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

окончательно принимает следующий вид

$$p(t) = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| i_p = p_{pqr},$$

т.е. реактивные составляющие $\mathbf{p}_{pqr}$ не участвуют в процессе преобразования электрической энергии на стороне нагрузки и имеют аналогичный физический смысл, что и соответствующие компоненты из исходной и расширенной $p-q$ формулировок.

По аналогии с формулами (2.31) и (2.54), полная мгновенная мощность в $p-q-r$ теории представляет собой евклидову норму алгебраического вектора $\mathbf{p}_{pqr}$ [161]

$$s_{pqr} = \sqrt{\mathbf{p}_{pqr}^T \mathbf{p}_{pqr}} = \sqrt{p_{pqr}^2 + q_q^2 + q_r^2} = u_p \sqrt{i_p^2 + i_q^2 + i_r^2} = \|\mathbf{u}_{pqr}\| \cdot \|\mathbf{i}_{pqr}\|,$$

которая численно равна $s_{\alpha\beta o} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \cdot \|\mathbf{i}_{\alpha\beta o}\|$ в силу инвариантности скалярных величин после линейного ортогонального преобразования (2.55).

Далее получим выражения, связывающие между собой мгновенные мощности в координатах состояния p, q, r и α, β, o . Воспользовавшись векторно-матричным равенством (2.55), которое в развернутом виде с учетом (2.57) имеет следующий вид

$$\begin{cases} i_p = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1}(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_o i_o), \\ i_q = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1}(u_\alpha i_\beta - u_\beta i_\alpha), \\ i_r = \frac{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2 i_o - u_o(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta)}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \cdot \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} \end{cases}$$

и выполнив промежуточное преобразование

$$i_r = \frac{i_o(u_\alpha^2 + u_\beta^2 + u_o^2) - u_o(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_o i_o)}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| \cdot \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|},$$

алгебраический вектор $\mathbf{i}_{pqr}$ в соответствии с формулами (2.42) и (2.45) находится как [58]

$$\mathbf{i}_{pqr} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| p_{\alpha\beta o} \\ q_o \\ \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| i_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} u_o p_{\alpha\beta o} \end{bmatrix} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| (p_{\alpha\beta} + p_o) \\ q_{\alpha\beta} \\ \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\| i_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} u_o p_{\alpha\beta o} \end{bmatrix}.$$

В итоге, приравнивая соответствующие элементы в правых частях последнего соотношения и в формуле (2.61) с учетом (2.43) окончательно получаем следующие расчетные соотношения, связывающие между собой мгновенные мощности всех трех рассмотренных выше теориях

$$p_{pqr} = p_{\alpha\beta o} = p_{\alpha\beta} + p_o, \quad (2.64)$$

$$q_r = \frac{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} q_o = \frac{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|} q_{\alpha\beta},$$

$$q_q = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \left(p_{\alpha\beta o} u_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2 i_o \right) = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \left((p_{\alpha\beta} + p_o) u_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2 i_o \right). \quad (2.65)$$

На основании последних формул можно заключить [58], что переменная составляющая $\tilde{p}_{pqr}$ вызвана действием асимметрии и нелинейности цепей нагрузки, q_r отвечает за распределение потоков энергии в единицу времени между фазами, а мгновенная реактивная мощность q_q главным образом определяет активные потери в нулевом проводе.

В [146] представлены основные положения отличного от ранее рассмотренных подходов к математическому описанию энергетических характеристик трехфазных систем во временной области, выполненного в координатах состояния d, q, o после Park Transformation вида (1.14) и получивших название $d-q$ теории. Воспользовавшись функцией комплексной переменной при $\Theta = 0^\circ$, в [141, 181] описаны следующие показатели энергопотребления:

– комплексная мощность R. Н. Park, являющейся аналогом комплекса полной мощности применительно к мгновенным значениям [37, 131]

$$\mathbf{p}_{dq} = (u_d + ju_q)(i_d - ji_q) = p_p + jq_p, \quad (2.66)$$

здесь p_p, q_p – реальная и мнимая мощности R. Н. Park

$$p_p = \text{Re}(\mathbf{p}_{dq}) = u_d i_d + u_q i_q, \quad (2.67)$$

$$q_p = \text{Im}(\mathbf{p}_{dq}) = u_q i_d - u_d i_q; \quad (2.68)$$

– мощность нулевой составляющей

$$p_o = u_o i_o, \quad (2.69)$$

а также полная мощность, неудовлетворяющая условию ортогонального разложения вида (2.7) [146]

$$S_{dqo} = U_{dq} I_{dq},$$

где U_{dq}, I_{dq} – среднеквадратичные значения напряжений и токов

$$X_{dq} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x_d + jx_q)(x_d - jx_q) dt}.$$

В силу инвариантности скалярного произведения после выполнения перехода вида (1.14) при произвольном конечном повороте Θ , соответствующие мгновенные мощности трехфазной системы связаны с аналогичными переменными из исходной $p-q$ теории на основании следующих уравнений

$$p_p = (u_\alpha \cos \Theta + u_\beta \sin \Theta)(i_\alpha \cos \Theta + i_\beta \sin \Theta) + (u_\beta \cos \Theta - u_\alpha \sin \Theta)(i_\beta \cos \Theta - i_\alpha \sin \Theta),$$

$$p_p = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta = p_{\alpha\beta}, \quad (2.70)$$

$$q_p = (u_\beta \cos \Theta - u_\alpha \sin \Theta)(i_\alpha \cos \Theta + i_\beta \sin \Theta) - (u_\alpha \cos \Theta + u_\beta \sin \Theta)(i_\beta \cos \Theta - i_\alpha \sin \Theta),$$

$$q_p = u_\beta i_\alpha - u_\alpha i_\beta = -q_{\alpha\beta}, \quad (2.71)$$

откуда полная мгновенная мощность с учетом (2.69) совпадает с формулой (2.31), т.е.

$$s_{dqo} = \sqrt{(\operatorname{Re}(\mathbf{p}_{dq}) + p_o)^2 + (\operatorname{Im}(\mathbf{p}_{dq}))^2} = s_{\alpha\beta}.$$

2.5 Векторные формулировки теорий мгновенной мощности

В данном разделе будет изложен материал, посвященный современным теориям мгновенной мощности, основанным на использовании векторов фазных переменных в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$.

2.5.1 Обобщенная теория мгновенной реактивной мощности

Уравнения баланса мгновенных мощностей (2.28) или (2.52) в преобразованном после Clarke Transformation базисе можно также непосредственного представить через фазные переменные на основании так называемой обобщенной, или иначе кросс-векторной теории [29, 184]. По аналогии с формулами (2.20), (2.21) и (2.42), (2.44), скалярная активная и векторная реактивная мгновенные мощности задаются на основании следующих равенств [161]

$$p_{ABC} = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC} = \vec{u}_A \cdot \vec{i}_A + \vec{u}_B \cdot \vec{i}_B + \vec{u}_C \cdot \vec{i}_C, \quad (2.72)$$

$$\vec{q}_{ABC} = \vec{u}_{ABC} \times \vec{i}_{ABC}, \quad (2.73)$$

откуда координаты $\vec{q}_{ABC}$ находятся как

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B, \quad q_B = u_C i_A - u_A i_C, \quad q_C = u_A i_B - u_B i_A. \quad (2.74)$$

Далее, в соответствии с правилами скалярного произведения умножим левую и правую части (2.72) на пространственный вектор напряжения [170]

$$\vec{u}_{ABC} \cdot p_{ABC} = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC} = (\vec{u}_{ABC} \cdot \vec{u}_{ABC}) \cdot \vec{i}_{ABC},$$

откуда с учетом того, что

$$\vec{u}_{ABC} \cdot \vec{u}_{ABC} = \|u_{ABC}\| \cdot \|u_{ABC}\| \cos 0^\circ = \|u_{ABC}\|^2,$$

окончательно получаем следующее выражение для мгновенного активного тока

$$\vec{i}_{ABC}^p = \frac{p_{ABC}}{\|u_{ABC}\|^2} \vec{u}_{ABC}.$$

Для получения аналитического выражения, описывающего трехмерный вектор мгновенного реактивного тока $\vec{i}_{ABC}^q$ в функции $\vec{q}_{ABC}$, воспользуемся формулой (2.73), предварительно преобразовав ее на основании свойств векторного произведения к следующему виду [44, 116]

$$\vec{q}_{ABC} \times \vec{u}_{ABC} = (\vec{u}_{ABC} \times \vec{i}_{ABC}) \times \vec{u}_{ABC} = \|u_{ABC}\|^2 \cdot \vec{i}_{ABC} - p_{ABC} \cdot \vec{u}_{ABC},$$

в результате чего после раскрытия скобок по аналогии с равенством (2.10) для линейного разложения S. Fryze окончательно получаем [156]

$$\vec{i}_{ABC}^q = \vec{i}_{ABC} - \vec{i}_{ABC}^p = \frac{\vec{q}_{ABC} \times \vec{u}_{ABC}}{\|u_{ABC}\|^2}. \quad (2.75)$$

Из последних равенств автоматически следует

$$\vec{u}_{ABC} \times \vec{i}_{ABC}^p = 0, \quad \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC}^q = 0,$$

т.е. $\vec{i}_{ABC}^p$ и $\vec{u}_{ABC}$ являются коллинеарными, $\vec{i}_{ABC}^q$ ортогонален вектору напряжения [184], а составляющая $\vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC}^q$ не входит в уравнение баланса мгновенных мощностей $p(t)$.

В случае симметричной системы фазных напряжений и соединения нагрузки в “звезду” без нулевого провода, координаты пространственного вектора $\vec{q}_{ABC}$ будут равны друг другу [185]

$$q_A = q_B = q_C,$$

а его евклидова норма находится как

$$\|q_{ABC}\| = \sqrt{q_A^2 + q_B^2 + q_C^2} = \sqrt{3}q_A = \sqrt{3}q_B = \sqrt{3}q_C.$$

Действительно, мгновенная реактивная мощность фазы A с учетом условия симметрии (1.2) подчиняется равенству

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B = -u_B (i_A + i_B) + (u_A + u_B) i_B = u_A i_B - u_B i_A = q_C,$$

причем полная мощность равна произведению амплитуд пространственных векторов напряжения и тока [161]

$$s_{ABC} = \sqrt{p_{ABC}^2 + \|q_{ABC}\|^2} = \|\vec{u}_{ABC}\| \cdot \|\vec{i}_{ABC}\|.$$

Если воспользоваться расчетными соотношениями из расширенной $p-q$ теории с учетом инвариантности результата скалярного произведения после линейного ортогонального преобразования Е. Clarke вида (1.10), то формулам (2.72)–(2.75) можно дать соответствующие аналоги в векторно-матричной форме записи, которые имеют следующий вид

$$\begin{aligned} p_{ABC} &= \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}, \\ \mathbf{q}_{ABC} &= [q_A \quad q_B \quad q_C]^T = (u_A \mathbf{D}_\alpha + u_B \mathbf{D}_\beta + u_C \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{i}_{ABC}, \\ \mathbf{i}_{ABC}^p &= [i_A^p \quad i_B^p \quad i_C^p]^T = \frac{p_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC}, \\ \mathbf{i}_{ABC}^q &= \|\mathbf{u}_{ABC}\|^{-2} (q_A \mathbf{D}_\alpha + q_B \mathbf{D}_\beta + q_C \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{u}_{ABC}. \end{aligned}$$

В заключение также необходимо отметить, что использование математического аппарата матричного исчисления применительно к описанию координат пространственных векторов в $\mathcal{R}^3$ не всегда является приемлемым. Так, например, в рамках обобщенной теории мгновенной реактивной мощности $\vec{i}_{ABC}^p$ получается непосредственно из уравнения (2.72), в то время как выделить аналогичный ему алгебраический вектор-столбец $\mathbf{i}_{ABC}^p$ из формулы $p_{ABC} = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC}$ не представляется возможным.

2.5.2 Теория мгновенной мощности с ортогональной декомпозицией трехмерного вектора напряжений

Данный подход к анализу составляющих уравнения баланса мгновенных мощностей трехфазных систем с несимметричной и/или нелинейной нагрузкой реализуется в исходном базисе без промежуточного линейного преобразования

Е. Clarke (1.10) и основывается на предварительном разделении пространственного вектора напряжений $\vec{u}_{ABC}$ на три ортогональные компоненты [168], которые изображены на рисунке 2.2:

– вектор напряжения нулевой составляющей с координатами

$$\vec{u}_{ABC}^0 = \begin{pmatrix} \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

и модулем

$$\|\vec{u}_{ABC}^0\| = \sqrt{\frac{1}{3}(u_o^2 + u_o^2 + u_o^2)} = u_o, \quad (2.77)$$

в котором в качестве u_o выступает вспомогательная переменная, совпадающая нулевой компонентой алгебраического вектора $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$ [167]

$$u_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_A + u_B + u_C) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\forall j} u_j, \quad (2.78)$$

здесь $j = A, B, C$ – нижний индекс, показывающий буквенное обозначение фазы по аналогии с формулой (2.8) из раздела 2.1;

– пространственный вектор напряжения $\vec{u}_{ABC}^p$ без нулевой составляющей, определяемый как

$$\vec{u}_{ABC}^p = \vec{u}_{ABC} - \vec{u}_{ABC}^0; \quad (2.79)$$

– ортогональный вектор напряжения $\vec{u}_{ABC}^q$, перпендикулярный плоскости расположения векторов $\vec{u}_{ABC}$ и $\vec{u}_{ABC}^0$, на величину модуля которого накладывается ограничение вида [154]

$$\|\vec{u}_{ABC}^q\| = \|\vec{u}_{ABC}^p\|. \quad (2.80)$$

Перед непосредственным определением координат $\vec{u}_{ABC}^q$ в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$ предварительно получим расчетную формулу для вычисления модуля $\vec{u}_{ABC}^p$

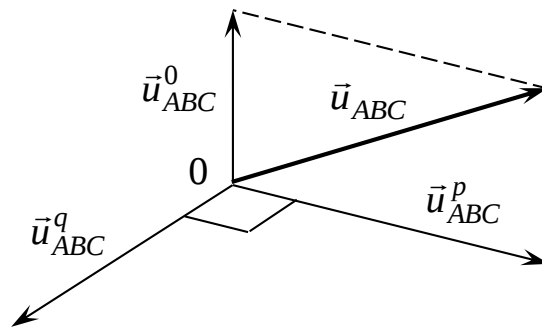


Рисунок 2.2 – Ортогональное разложение пространственного вектора напряжения в $\mathfrak{R}^3$

$$\|\vec{u}_{ABC}^p\| = \sqrt{\sum_{\forall j} \left(u_j - \frac{1}{\sqrt{3}} u_o \right)^2} = \sqrt{\|\vec{u}_{ABC}\|^2 - \frac{2u_o}{\sqrt{3}} \sum_{\forall j} u_j + u_o^2},$$

откуда с учетом (2.78) становится справедливым [67]

$$\|\vec{u}_{ABC}^p\| = \sqrt{\|\vec{u}_{ABC}\|^2 - u_o^2} = \sqrt{\frac{2}{3} (\|\vec{u}_{ABC}\|^2 - u_A u_B - u_B u_C - u_A u_C)},$$

или переходя к квадратичным зависимостям

$$\|\vec{u}_{ABC}\|^2 = \|\vec{u}_{ABC}^p\|^2 + \|\vec{u}_{ABC}^0\|^2. \quad (2.81)$$

Как видно из рисунка 2.2, при данном пространственном разложении выполняется равенство

$$\vec{u}_{ABC}^q = \vec{u}_{ABC} \times \vec{u}_{ABC}^0 = \vec{u}_{ABC}^p \times \vec{u}_{ABC} = \vec{u}_{ABC}^p \times \vec{u}_{ABC}^0, \quad (2.82)$$

откуда, основываясь на правилах векторного произведения [44, 116]

$$\vec{u}_{ABC}^q = \left(\frac{u_o}{\sqrt{3}} (u_B - u_C) \quad \frac{u_o}{\sqrt{3}} (u_C - u_A) \quad \frac{u_o}{\sqrt{3}} (u_A - u_B) \right),$$

$$\|\vec{u}_{ABC}^q\| = \|\vec{u}_{ABC}^p\| \cdot \|\vec{u}_{ABC}^0\| \cdot \sin 90^\circ = \|\vec{u}_{ABC}^p\| \cdot \|\vec{u}_{ABC}^0\|.$$

В итоге, как следует из последнего соотношения для евклидовых норм, для соблюдения требования (2.80) необходимо каждую координату $\vec{u}_{ABC}^q$ разделить на модуль $\|\vec{u}_{ABC}^0\| = u_o$, в результате чего окончательно получаем

$$\vec{u}_{ABC}^q = \left(\frac{u_B - u_C}{\sqrt{3}} \quad \frac{u_C - u_A}{\sqrt{3}} \quad \frac{u_A - u_B}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{u_{BC}}{\sqrt{3}} \quad \frac{u_{CA}}{\sqrt{3}} \quad \frac{u_{AB}}{\sqrt{3}} \right),$$

где u_{BC}, u_{CA}, u_{AB} – линейные напряжения.

На основании представленной выше ортогональной декомпозиции $\vec{u}_{ABC}$ в рамках данной теории постулируются [168, 193]

– мгновенная мощность, отвечающая за обмен энергий между источником и нагрузкой

$$p_{ABC}^p = \vec{u}_{ABC}^p \cdot \vec{i}_{ABC} = \|\vec{u}_{ABC}^p\| \cdot \|\vec{i}_{ABC}\| \cos \varphi_p; \quad (2.83)$$

– мгновенная неактивная мощность

$$q_{ABC}^q = \vec{u}_{ABC}^q \cdot \vec{i}_{ABC} = \|\vec{u}_{ABC}^q\| \cdot \|\vec{i}_{ABC}\| \cos \varphi_q; \quad (2.84)$$

– мгновенная мощность нулевой составляющей

$$p_{ABC}^0 = \vec{u}_{ABC}^0 \cdot \vec{i}_{ABC} = \|\vec{u}_{ABC}^0\| \cdot \|\vec{i}_{ABC}\| \cos \varphi_0, \quad (2.85)$$

здесь $\cos \varphi_p, \cos \varphi_q, \cos \varphi_0$ – косинусы углов между пространственным вектором фазных токов $\vec{i}_{ABC}$ и ортогональными компонентами $\vec{u}_{ABC}^p, \vec{u}_{ABC}^q, \vec{u}_{ABC}^0$ соответственно,

на основании которых по аналогии с формулой (2.72) из обобщенной теории, уравнение баланса мгновенных мощностей трехфазной системы с учетом пространственного разложения (2.79) имеет вид [67]

$$p(t) = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC} = (\vec{u}_{ABC}^p + \vec{u}_{ABC}^0) \cdot \vec{i}_{ABC} = p_{ABC}^p + p_{ABC}^0. \quad (2.86)$$

В свою очередь после скалярного умножения слева обеих частей (2.83)–(2.85) на соответствующий обратный вектор напряжения [152, 170]

$$\vec{u}^{-1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}, \quad (2.87)$$

осуществляется переход к вектору активного мгновенного тока, подразделяемого на две ортогональные компоненты $\vec{i}_{ABC}^p$ и $\vec{i}_{ABC}^0$

$$\vec{i}_{ABC}^a = \frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{p_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2} \vec{u}_{ABC}^0 = \vec{i}_{ABC}^p + \vec{i}_{ABC}^0 \quad (2.88)$$

и вектору мгновенного реактивного тока

$$\vec{i}_{ABC}^q = \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^q\|^2} \vec{u}_{ABC}^q. \quad (2.89)$$

При помощи данной линейной комбинации фазных токов задают мгновенную активную мощность [155]

$$p_{ABC}^a = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC}^a, \quad (2.90)$$

которую после ряда математических преобразований с учетом ортогональности разложения $\vec{u}_{ABC}^p \cdot \vec{u}_{ABC}^0 = 0$ и коммутативности скалярного произведения можно представить как [156]

$$p_{ABC}^a = (\vec{u}_{ABC}^p + \vec{u}_{ABC}^0) \left(\frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{p_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2} \vec{u}_{ABC}^0 \right),$$

$$p_{ABC}^a = p_{ABC}^p + p_{ABC}^0 + \vec{u}_{ABC}^p \cdot \vec{u}_{ABC}^0 \left(\frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} + \frac{p_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2} \right) = p_{ABC}^p + p_{ABC}^0. \quad (2.91)$$

Для пояснения физического смысла формул (2.88) и (2.89) запишем вектор реактивного тока в следующем виде

$$\vec{i}_{ABC}^q = \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^q\|^2} \vec{u}_{ABC}^q = \frac{\|\vec{u}_{ABC}^q\| \cdot \|\vec{i}_{ABC}\| \cos \varphi_q}{\|\vec{u}_{ABC}^q\|} \cdot \frac{\vec{u}_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^q\|} = \|\vec{i}_{ABC}\| \cos \varphi_q \cdot \vec{e}_q,$$

где $\vec{e}_q = \|\vec{u}_{ABC}^q\|^{-1} \vec{u}_{ABC}^q$ – единичный вектор, направленный по $\vec{u}_{ABC}^q$,

на основании чего можно заключить, что $\vec{i}_{ABC}^p, \vec{i}_{ABC}^q, \vec{i}_{ABC}^0$ получаются путем проецирования $\vec{i}_{ABC}$ на взаимно ортогональные компоненты $\vec{u}_{ABC}$, в результате чего данный пространственный вектор можно представить в виде следующей линейной комбинации [155]

$$\vec{i}_{ABC} = \vec{i}_{ABC}^p + \vec{i}_{ABC}^0 + \vec{i}_{ABC}^q = \vec{i}_{ABC}^a + \vec{i}_{ABC}^q, \quad (2.92)$$

или в развернутом виде в соответствии с требованием (2.80) [67, 193]

$$\vec{i}_{ABC} = \frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{p_{ABC}^0}{u_o^2} \vec{u}_{ABC}^0 + \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^q. \quad (2.93)$$

По аналогии с уравнением связи (2.81), на квадраты модулей пространственных векторов мгновенных токов также накладывается соответствующее ограничение. Воспользовавшись условием перпендикулярности $\vec{i}_{ABC}^p \perp \vec{i}_{ABC}^0$ можно записать, что

$$\|\vec{i}_{ABC}^a\|^2 = \vec{i}_{ABC}^p \cdot \vec{i}_{ABC}^p + \vec{i}_{ABC}^0 \cdot \vec{i}_{ABC}^0 + 2\vec{i}_{ABC}^p \cdot \vec{i}_{ABC}^0 = \|\vec{i}_{ABC}^p\|^2 + \|\vec{i}_{ABC}^0\|^2,$$

с учетом которого, а также формул (2.83)–(2.85), (2.88) и (2.89) окончательно получаем [168]

$$\|\vec{i}_{ABC}^a\|^2 + \|\vec{i}_{ABC}^q\|^2 = \frac{(p_{ABC}^p)^2 + (q_{ABC}^q)^2}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} + \frac{(p_{ABC}^0)^2}{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2},$$

$$\|\vec{i}_{ABC}^a\|^2 + \|\vec{i}_{ABC}^q\|^2 = (\cos^2 \varphi_p + \cos^2 \varphi_q + \cos^2 \varphi_0) \cdot \|\vec{i}_{ABC}\|^2 = \|\vec{i}_{ABC}\|^2.$$

Помимо этого, если в уравнении баланса мгновенных мощностей (2.86) использовать линейную комбинацию (2.92), то в соответствии с условием (2.82) и формулой (2.90) оно примет следующий вид

$$p(t) = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC} = \vec{u}_{ABC} \cdot (\vec{i}_{ABC}^p + \vec{i}_{ABC}^0 + \vec{i}_{ABC}^q) = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC}^a = p_{ABC}^a, \quad (2.94)$$

т.е. вектор мгновенного реактивного тока не участвует в процессе передачи электрической энергии от источника к потребителю, а мгновенная мощность совпадает с (2.91).

Для определения аналитических соотношений, связывающих между собой мгновенные мощности из векторной формулировки и исходной $p-q$ теории, воспользуемся формулой (2.76). Как нетрудно заметить, координаты $\vec{u}_{ABC}^0$ отличаются от последней строки алгебраического вектора $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$ на величину $(\sqrt{3})^{-1}$, на основании чего можно заключить, что $\vec{u}_{ABC}^0$ совпадает по направлению с осью o , в связи с чем $\vec{u}_{ABC}^p$ можно отождествить с проекцией $\vec{u}_{ABC}$ на плоскость α, β , что иллюстрирует рисунок 2.3 [194].

В свою очередь p_{ABC}^0 в векторной формулировке представляет собой скалярное произведение соответствующих векторов и описывается формулой (2.85), которую также можно преобразовать к виду

$$p_{ABC}^0 = \vec{u}_{ABC}^0 \cdot \vec{i}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_o \sum_{\forall j} i_j = u_o i_o = p_o, \quad (2.95)$$

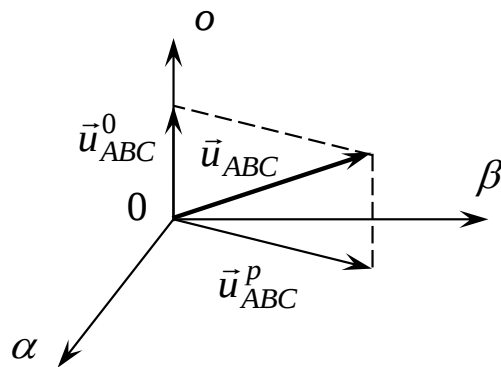


Рисунок 2.3 – Пространственное расположение векторов $\vec{u}_{ABC}, \vec{u}_{ABC}^p, \vec{u}_{ABC}^0$
в координатных осях α, β, o

здесь $i_o = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\forall j} i_j$ – нулевая компонента тока, определяемая аналогично (2.78),

т.е. p_{ABC}^0 численно равна мгновенной мощности нулевой составляющей (2.22) из исходной $p-q$ теории, причем на основании (2.77) и (2.95) представляется возможным непосредственно выразить координаты $\vec{i}_{ABC}^0$

$$\vec{i}_{ABC}^0 = \frac{p_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2} \vec{u}_{ABC}^0 = \frac{u_o i_o}{u_o^2} \begin{pmatrix} \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i_o}{\sqrt{3}} & \frac{i_o}{\sqrt{3}} & \frac{i_o}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

По аналогии, из условия инвариантности скалярного произведения при использовании линейного преобразования Е. Clarke (1.10) и уравнения (2.94) вытекает

$$p(t) = p_{\alpha\beta} + p_o = p_{ABC}^p + p_{ABC}^0,$$

откуда с учетом (2.95) окончательно получаем

$$p_{\alpha\beta} = p_{ABC}^p.$$

В целях проверки последнего равенства осуществим обратный переход от $p_{\alpha\beta}$ к p_{ABC}^p , предварительно определив первую составляющую

$$p_{\alpha} = \vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{i}_{\alpha} = \frac{2}{3} \left(u_A - \frac{1}{2}(u_B + u_C) \right) \left(i_A - \frac{1}{2}(i_B + i_C) \right),$$

$$p_{\alpha} = \frac{2}{3} \left(u_A i_A + \frac{1}{4}(u_B i_B + u_C i_C) - \frac{u_A}{2}(i_B + i_C) - \frac{i_A}{2}(u_B + u_C) + \frac{1}{4}(u_B i_C + u_C i_B) \right),$$

а затем вторую

$$p_{\beta} = \vec{u}_{\beta} \cdot \vec{i}_{\beta} = \frac{1}{2}(u_B - u_C)(i_B - i_C) = \frac{1}{2}(u_B i_B + u_C i_C - u_B i_C - u_C i_B),$$

откуда

$$p_{\alpha\beta} = p_{\alpha} + p_{\beta} = \frac{2}{3} p_{ABC}^a - \frac{1}{3}(u_A(i_B + i_C) + u_B(i_A + i_C) + u_C(i_A + i_B)).$$

В свою очередь после раскрытия скобок в p_{ABC}^p получаем аналогичный результат

$$p_{ABC}^p = p_{ABC}^a - u_o i_o = p_{ABC}^a - \frac{1}{3} \sum_{\forall j} u_j \sum_{\forall j} i_j, \quad (2.96)$$

$$p_{ABC}^p = p_{ABC}^a - \frac{1}{3} \left(p_{ABC}^a + u_A(i_B + i_C) + u_B(i_A + i_C) + u_C(i_A + i_B) \right) = p_{\alpha\beta}.$$

Если воспользоваться уравнением (2.23) для вычисления модуля пространственного вектора мгновенной реактивной мощности из исходной $p-q$ теории, выраженного через фазные напряжения и токи [126, 131, 202]

$$q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (i_A(u_B - u_C) + i_B(u_C - u_A) + i_C(u_A - u_B)), \quad (2.97)$$

то нетрудно заметить, что данная скалярная величина совпадает по абсолютному значению с мгновенной реактивной мощностью вида (2.84) из векторной формулировки

$$q_{ABC}^q = \vec{u}_{ABC}^q \cdot \vec{i}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_A u_{BC} + i_B u_{CA} + i_C u_{AB}).$$

Таким образом, на основании представленного выше анализа можно заключить, что постулированные в рамках исходной $p-q$ и векторной теорий энергетические показатели совпадают и, как следствие, имеют аналогичный физический смысл.

В силу громоздкости и трудности получения аналитических зависимостей для математического описания переменных из данной теории в рамках метода пространства состояний, далее, без подробных выводов будут представлены основные соотношения для определения координат пространственных векторов и скалярных величин в векторно-матричной форме записи. Так, например, ортогональные компоненты линейной декомпозиции $\vec{u}_{ABC}$ определяются как

$$\mathbf{u}_{ABC}^p = \mathbf{u}_{ABC} - \mathbf{u}_{ABC}^0 = \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \right) \mathbf{u}_{ABC} = \begin{bmatrix} u_A - \frac{u_o}{\sqrt{3}} & u_B - \frac{u_o}{\sqrt{3}} & u_C - \frac{u_o}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{u}_{ABC}^q = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o) \mathbf{u}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} u_{BC} \\ u_{CA} \\ u_{AB} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{ABC}^0 = \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{u}_{ABC} = \frac{u_o}{\sqrt{3}} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} & \frac{u_o}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T, \quad (2.99)$$

здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица-столбец размерностью $\dim \mathbf{1} = 3 \times 1$

$$\mathbf{1} = [1 \ 1 \ 1]^T;$$

$\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o$ – невырожденная кососимметрическая квадратная матрица с $\det(\cdot) = 2$, осуществляющая линейное преобразование координат по аналогии с правилами векторного произведения в трехмерном вещественном пространстве $\mathcal{R}^3$ [202]

$$\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

причем простыми вычислениями можно убедиться, что для данных матричных уравнений также справедливы равенства

$$(\mathbf{u}_{ABC}^p)^T \mathbf{u}_{ABC}^0 = (\mathbf{u}_{ABC}^0)^T \mathbf{u}_{ABC}^p = 0, \quad (2.100)$$

$$(\mathbf{u}_{ABC}^p)^T \mathbf{u}_{ABC}^q = (\mathbf{u}_{ABC}^q)^T \mathbf{u}_{ABC}^p = 0,$$

$$(\mathbf{u}_{ABC}^q)^T \mathbf{u}_{ABC}^0 = (\mathbf{u}_{ABC}^0)^T \mathbf{u}_{ABC}^q = 0.$$

В свою очередь мгновенные составляющие мощности из векторной теории с учетом (2.95) и (2.96) находятся как

$$p_{ABC}^0 = (\mathbf{u}_{ABC}^0)^T \mathbf{i}_{ABC} = \frac{1}{3} \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{i}_{ABC} = \frac{u_o}{\sqrt{3}} \sum_{\forall j} i_j = u_o i_o,$$

$$p_{ABC}^p = (\mathbf{u}_{ABC}^p)^T \mathbf{i}_{ABC} = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} - u_o i_o = \mathbf{u}_{ABC}^T \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \right) \mathbf{i}_{ABC},$$

$$q_{ABC}^q = (\mathbf{u}_{ABC}^q)^T \mathbf{i}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{u}_{ABC}^T (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o) \cdot \mathbf{i}_{ABC},$$

а линейная комбинация (2.92) пространственного вектора фазных токов, выраженная в функции мгновенных мощностей (2.83)–(2.85) [154, 194]

$$\mathbf{i}_{ABC} = \left(\frac{p_{ABC}^p}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \right) + \frac{p_{ABC}^0}{3u_o^2} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - \frac{q_{ABC}^q}{\sqrt{3}\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o) \right) \mathbf{u}_{ABC},$$

которые можно отождествить с тремя различными алгебраическими векторами, а именно:

– нулевым

$$\mathbf{i}_{ABC}^0 = \frac{p_{ABC}^0}{u_o^2} \mathbf{u}_{ABC}^0 = \frac{p_{ABC}^0}{3u_o^2} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{u}_{ABC} = \frac{p_{ABC}^0}{u_o} \mathbf{1};$$

– активным

$$\mathbf{i}_{ABC}^p = \frac{p_{ABC}^p}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \mathbf{u}_{ABC}^p = \frac{p_{ABC}^p}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \right) \mathbf{u}_{ABC};$$

– реактивным

$$\mathbf{i}_{ABC}^q = -\frac{q_{ABC}^q}{\sqrt{3}\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o) \mathbf{u}_{ABC}.$$

2.6 Выводы по главе

На основании представленного в данной главе анализа основных положений современных теорий мгновенной мощности, основанных на элементах векторной алгебры, можно сделать следующие выводы [56, 59, 73, 120, 154, 161, 191]:

1. Одновременное применение в двух $p-q$ и одной $p-q-r$ теориях математических аппаратов матричного исчисления и векторной алгебры приводит в некоторых случаях к несовместимости получаемых результатов, т.к. операция векторного произведения применительно к матрицам-столбцам не определена [121]. Так, например, при аксиальной формулировке электромагнитного момента электрической машины, описывающий его вектор будет располагаться вдоль вала и совпадать по направлению с вектором реактивной мощности, который, в свою очередь, не участвует в процессе преобразования электрической энергии.

2. В мгновенной мощности нулевой составляющей из исходной $p-q$ теории всегда присутствует периодическое колебание относительно среднего значения,

носящее в общем случае сложный мультигармонический характер, вследствие чего для выполнения требования отсутствия среднеквадратичных потерь в нейтральной линии необходима полная компенсация p_o .

3. В расширенной $p-q$ теории линейная комбинация токов является функцией четырех линейно-зависимых координат алгебраического вектора мгновенных мощностей (2.46), причем i_o одновременно зависит от одной активной и двух реактивных компонент. По этой причине для полного исключения потерь в нейтральном проводе и геометрическом отображении энергетических характеристик в трехмерном вещественном пространстве $\mathcal{R}^3$ необходимо применять дополнительное ортогональное преобразование $\mathbf{p}_{pq}$ с учетом имеющего места уравнения связи (2.48).

4. Основным достоинством $p-q-r$ теории является линейная зависимость всех трех токов от соответствующих мгновенных мощностей, что полностью исключает перекрестные связи между каналами нагрузки и существенно облегчает анализ энергетических процессов в трехфазных цепях. Однако, при данном подходе потери в нулевом проводе определяются совокупным действием активного и реактивного токов по координатам состояния p и r соответственно, что приводит к существенному усложнению структуры системы управления силовым преобразовательным устройством активной фильтрации применительно к трехфазным системам с глухо заземленной нейтралью.

5. Векторные теории мгновенной мощности не требуют какого-либо преобразования фазных переменных, что позволяет реализовывать на их основе более быстродействующие алгоритмы формирования компенсационных воздействий.

6. Составляющая уравнения баланса мгновенных мощностей $p(t)$ трехфазной нагрузки от действия алгебраического вектора реактивного тока во всех рассматриваемых теориях равна нулю, в связи с чем данную компоненту можно отождествить с потоками электрической энергии в единицу времени, которые не потреб-

ляются от источника и циркулируют между фазами системы вследствие асимметрии электрических цепей и/или наличия в них нелинейных элементов.

7. Евклидова норма алгебраического вектора мгновенных мощностей, выступающая в качестве скалярного аналога полной мощности (2.7) применительно к мгновенным значениям, не всегда удовлетворяет требованию ортогонального разложения на плоскости, как, например, в случае исходной $p-q$ или $d-q$ теорий.

3 УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МГНОВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной главе будет выполнен анализ влияния различных видов трехфазных нагрузок, в том числе несимметричных и нелинейных, на норму и вещественные коэффициенты кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ с целью определения его неактивных (неэффективных) составляющих, подлежащих последующему исключению из общего потока электрической энергии при помощи силовых преобразовательных устройств компенсации.

3.1 Кватернион мгновенных мощностей при гармоническом законе изменения фазных переменных

3.1.1 Линейная симметричная трехфазная нагрузка с нулевым проводом

При рассмотрении энергетических характеристик трехфазного потребителя в четырехмерном гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ делается допущение [65], что система фазных напряжений является симметричной и с учетом правой части уравнений (1.7) описывается как

$$\begin{cases} u_A = u_m \cos \omega t, \\ u_B = u_m \cos(\omega t - 120^\circ) = -\frac{1}{2}u_m \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \sin \omega t, \\ u_C = u_m \cos(\omega t + 120^\circ) = -\frac{1}{2}u_m \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \sin \omega t. \end{cases} \quad (3.1)$$

В этом случае при использовании Q -базиса и математическом представлении переменных в виде (1.103), кватернион мгновенной мощности находится как [56, 63, 64, 67, 78, 79, 81, 111, 120, 166, 174, 176, 177]

$$\mathbf{P}_{ABC} = \mathbf{U}_{ABC} \circ \mathbf{I}_{ABC} = \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{ABC}, \quad (3.2)$$

здесь $\mathbf{U}_{ABC}, \mathbf{I}_{ABC}$ – кватернионы фазных напряжений и токов

$$\mathbf{U}_{ABC} = u_A \circ \mathbf{q}_1 + u_B \circ \mathbf{q}_2 + u_C \circ \mathbf{q}_3,$$

$$\mathbf{I}_{ABC} = i_A \circ \mathbf{q}_1 + i_B \circ \mathbf{q}_2 + i_C \circ \mathbf{q}_3;$$

$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$ – скалярная (действительная) часть $\mathbf{P}_{ABC}$, вычисляемая как

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -(u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C) \circ 1; \quad (3.3)$$

$\text{vect}\mathbf{P}_{ABC} = q_A \circ \mathbf{q}_1 + q_B \circ \mathbf{q}_2 + q_C \circ \mathbf{q}_3$ – векторная (мнимая) часть $\mathbf{P}_{ABC}$, в которой вещественные коэффициенты перед $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ совпадают с соответствующими формулами для определения координат пространственного вектора $\vec{q}_{ABC}$ вида (2.74) из обобщенной теории.

В свою очередь $\mathbf{P}_{ABC}$ в комплексном двумерном uv -пространстве примет следующий вид

$$\mathbf{P}_{ABC} = \begin{bmatrix} -ju_C^i & -(u_B^i + ju_A^i) \\ u_B^i - ju_A^i & ju_C^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -ji_C^i & -(i_B^i + ji_A^i) \\ i_B^i - ji_A^i & ji_C^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{ABC} = \begin{bmatrix} -(u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C) - jq_C & -(q_B + jq_A) \\ q_B - jq_A & -(u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C) + jq_C \end{bmatrix},$$

или с учетом формулы (1.60) в более компактной форме записи

$$\mathbf{P}_{ABC} = -(u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C) \mathbf{I} - jq_A \mathbf{S}_1 - jq_B \mathbf{S}_2 - jq_C \mathbf{S}_3.$$

Как показывает анализ правой части (3.2) при чисто активном потреблении электрической энергии с одинаковыми параметрами сопротивлений во всех трех фазах нагрузки, скалярная часть кватерниона мгновенной мощности будет постоянной величиной с численным значением [64, 177]

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -\frac{3}{2} u_m i_m = \bar{P}_{ABC}, \quad (3.4)$$

а векторная часть будет отсутствовать

$$\text{vect}\mathbf{P}_{ABC} = 0. \quad (3.5)$$

В свою очередь при одинаковом фазовом сдвиге φ всех трех токов относительно соответствующих напряжений

$$\begin{cases} i_A = i_m \cos(\omega t + \varphi), \\ i_B = i_m \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi), \\ i_C = i_m \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi), \end{cases} \quad (3.6)$$

последнюю систему гармонических уравнений на основании тригонометрических формул разложения косинуса (1.6) и синуса (1.101) с аргументом в виде суммы (разности) двух углов можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{cases} i_A = i_m \cos \omega t \cos \varphi - i_m \sin \omega t \sin \varphi, \\ i_B = i_m \cos \omega t \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) + i_m \sin \omega t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right), \\ i_C = -i_m \cos \omega t \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) + i_m \sin \omega t \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right), \end{cases}$$

в результате чего после выполнения промежуточных математических преобразований в соответствии с постулированными правилами умножения единиц гиперкомплексного числа (1.17), скалярная и векторная части кватерниона мгновенной мощности будут постоянными величинами в функции угла [64, 79]

$$\text{scal} \mathbf{P}_{ABC} = -\frac{3}{2} u_m i_m \cos \varphi, \quad (3.7)$$

$$q_A = q_B = q_C = \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_m \sin \varphi. \quad (3.8)$$

Если $\text{vect} \mathbf{P}_{ABC}$ представить в виде вектора в трехмерном подпространстве $\mathbf{H}$ с базисными ортами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, то в зависимости от знака φ он будет располагаться в I или VII октантах и иметь модуль [63]

$$|\text{vect} \mathbf{P}_{ABC}| = \sqrt{-\text{vect}^2 \mathbf{P}_{ABC}} = \frac{3}{2} u_m i_m \sin \varphi, \quad (3.9)$$

в результате чего аналогичная скалярная величина кватерниона мгновенной мощности будет также иметь постоянное значение

$$|\mathbf{P}_{ABC}| = \frac{3}{2} u_m i_m = \text{const} = -\bar{P}_{ABC}, \quad (3.10)$$

или окончательно в более общем случае [177, 184]

$$\|\mathbf{P}_{ABC}\| = \|\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}\| + \|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\| = \|\mathbf{U}_{ABC}\| \circ \|\mathbf{I}_{ABC}\|. \quad (3.11)$$

Таким образом, обобщая вышеизложенный материал можно сделать следующие выводы применительно к линейному симметричному трехфазному потребителю:

1. При чисто активной нагрузке с одинаковыми параметрами во всех трех фазах скалярная часть кватерниона мгновенной мощности представляет собой постоянную величину, а q_A, q_B, q_C при мнимых единицах принимают нулевое значение.

2. При сбалансированной активно-реактивной нагрузке вещественные коэффициенты действительной и мнимой частей $\mathbf{P}_{ABC}$ вида (3.7) и (3.8), а также его модуль (3.10), неизменны во времени и при переходе к действующим значениям полностью совпадают с классическими выражениями для вычисления полной, активной и реактивной мощностей (2.5)–(2.7), за исключением знака $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$. При этом данные переменные описывают не усредненные за период величины, а мгновенные режимы работы трехфазных систем и имеют дополнительный параметр, характеризующий пространственное положение $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$.

3. Геометрическое изображение на плоскости скалярных величин $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$ и $|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}|$ позволяет использовать на практике хорошо проработанные методы анализа установившихся процессов линейных синусоидальных цепей с использованием функции комплексной переменной.

3.1.2 Обобщенный случай линейной трехфазной нагрузки с параметрической асимметрией фазы A

Далее, выполним анализ уравнения баланса мгновенных мощностей в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ для случая линейного потребителя, имеющего отличие в токе фазы A как по амплитуде i_{mA} , так и по угловому сдвигу φ_A , которое математически описывается следующей системой уравнений [78]

$$\begin{cases} i_A = i_{mA} \cos(\omega t + \varphi_A) = i_{mA} \cos \omega t \cos \varphi_A - i_{mA} \sin \omega t \sin \varphi_A, \\ i_B = i_m \cos(\omega t - 120^\circ) = -\frac{1}{2} i_m \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} i_m \sin \omega t, \\ i_C = i_m \cos(\omega t + 120^\circ) = -\frac{1}{2} i_m \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} i_m \sin \omega t. \end{cases} \quad (3.12)$$

В соответствии с (3.2) и тригонометрическими формулами (1.30) и (1.31), скалярная часть $\text{scal} \mathbf{P}_{ABC}$ преобразуется к виду [64]

$$\text{scal} \mathbf{P}_{ABC} = \bar{p}_{ABC} + \tilde{p}_{ABC1} \cos 2\omega t + \tilde{p}_{ABC2} \sin 2\omega t, \quad (3.13)$$

где $\bar{p}_{ABC}, \tilde{p}_{ABC1}, \tilde{p}_{ABC2}$ – постоянная составляющая и амплитуды косинусных и синусных гармоник, которые вычисляются как

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ABC} &= -\frac{1}{2} u_m (2i_m + i_{mA} \cos \varphi_A), \\ \tilde{p}_{ABC1} &= \frac{1}{2} u_m (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) = \bar{p}_{ABC} + \frac{3}{2} u_m i_m = \bar{p}_{ABC} - \bar{p}_{ABC}, \\ \tilde{p}_{ABC2} &= \frac{1}{2} u_m i_{mA} \sin \varphi_A, \end{aligned} \quad (3.14)$$

причем

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B = 0. \quad (3.15)$$

В свою очередь по аналогии с вышеизложенным, воспользовавшись промежуточными результатами вычисления

$$\begin{aligned} q_B &= \frac{1}{2} u_m \cos^2 \omega t (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) + \\ &+ \frac{1}{4} u_m \sin 2\omega t (\sqrt{3} i_m + i_{mA} \sin \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_{mA} (1 - \cos^2 \omega t) \sin \varphi_A, \\ q_C &= \frac{1}{2} u_m \cos^2 \omega t (i_{mA} \cos \varphi_A - i_m) + \\ &+ \frac{1}{4} u_m \sin 2\omega t (\sqrt{3} i_m - i_{mA} \sin \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_{mA} (1 - \cos^2 \omega t) \sin \varphi_A,$$

окончательно получаем следующие расчетные формулы для определения мнимой части уравнения баланса мощностей в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$

$$q_B = \bar{q}_B + \tilde{q}_{B1} \cos 2\omega t + \tilde{q}_{B2} \sin 2\omega t, \quad (3.16)$$

$$q_C = \bar{q}_C + \tilde{q}_{C1} \cos 2\omega t + \tilde{q}_{C2} \sin 2\omega t, \quad (3.17)$$

где $\bar{q}_B, \bar{q}_C, \tilde{q}_{B1}, \tilde{q}_{C1}, \tilde{q}_{B2}, \tilde{q}_{C2}$ – постоянные смещения и амплитуды гармонических составляющих вещественных коэффициентов векторной части кватерниона мгновенной мощности в соответствующих фазах

$$\bar{q}_B = -\tilde{q}_{C1} = \frac{1}{2} (\tilde{p}_{ABC1} + \sqrt{3} \tilde{p}_{ABC2}) = \frac{1}{4} u_m (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A + \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A), \quad (3.18)$$

$$\bar{q}_C = -\tilde{q}_{B1} = \frac{1}{2} (-\tilde{p}_{ABC1} + \sqrt{3} \tilde{p}_{ABC2}) = \frac{1}{4} u_m (i_{mA} \cos \varphi_A + \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A - i_m), \quad (3.19)$$

$$\tilde{q}_{B2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \tilde{p}_{ABC1} + \tilde{p}_{ABC2}) = \frac{1}{4} u_m (\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA} \sin \varphi_A), \quad (3.20)$$

$$\tilde{q}_{C2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \tilde{p}_{ABC1} - \tilde{p}_{ABC2}) = \frac{1}{4} u_m (\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A - i_{mA} \sin \varphi_A). \quad (3.21)$$

Аналитическое выражение для нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ трехфазной системы при несимметричном режиме работы фазы A получим, предварительно выполнив ряд промежуточных вычислений:

– квадратичные зависимости постоянных составляющих вещественных коэффициентов скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\bar{p}_{ABC}^2 = \frac{1}{16} u_m^2 (16 i_m^2 + 16 i_m i_{mA} \cos \varphi_A + 4 i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A),$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_B^2 = \tilde{q}_{C1}^2 = & \frac{u_m^2}{16} (i_m^2 + i_{mA}^2 (\cos^2 \varphi_A + 3 \sin^2 \varphi_A)) + \\ & + \frac{u_m^2}{16} (2 (\sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) - i_m i_{mA} \cos \varphi_A)), \end{aligned}$$

$$\bar{q}_C^2 = \tilde{q}_{B1}^2 = \frac{u_m^2}{16} (i_m^2 + i_{mA}^2 (\cos^2 \varphi_A + 3 \sin^2 \varphi_A)) -$$

$$-\frac{u_m^2}{16} \left(2(\sqrt{3}i_{mA} \sin \varphi_A (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) + i_m i_{mA} \cos \varphi_A) \right);$$

– квадратичные зависимости амплитуд переменных составляющих вещественных коэффициентов скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\tilde{p}_{ABC1}^2 = \frac{1}{16} u_m^2 (4i_m^2 - 8i_m i_{mA} \cos \varphi_A + 4i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A),$$

$$\tilde{p}_{ABC2}^2 = \frac{1}{16} u_m^2 (4i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A),$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{B2}^2 &= \frac{u_m^2}{16} (3i_m^2 + i_{mA}^2 (3\cos^2 \varphi_A + \sin^2 \varphi_A)) + \\ &+ \frac{u_m^2}{16} (2(\sqrt{3}i_{mA} \sin \varphi_A (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) - 3i_m i_{mA} \cos \varphi_A)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{C2}^2 &= \frac{u_m^2}{16} (3i_m^2 + i_{mA}^2 (3\cos^2 \varphi_A + \sin^2 \varphi_A)) - \\ &- \frac{u_m^2}{16} (2(\sqrt{3}i_{mA} \sin \varphi_A (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A) + 3i_m i_{mA} \cos \varphi_A)); \end{aligned}$$

– удвоенные зависимости результата произведения постоянных смещений и амплитуд переменных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC1} = \frac{1}{16} u_m^2 (8i_m i_{mA} \cos \varphi_A + 8i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - 16i_m^2),$$

$$2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC2} = -\frac{1}{16} u_m^2 (16i_m i_{mA} \sin \varphi_A + 8i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A),$$

$$2\bar{q}_B \tilde{q}_{B1} = 2\bar{q}_C \tilde{q}_{C1} = \frac{1}{16} u_m^2 (2i_m^2 + 2i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - 6i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - 4i_m i_{mA} \cos \varphi_A),$$

$$2\bar{q}_B \tilde{q}_{B2} = \frac{u_m^2}{16} (8i_m i_{mA} \sin \varphi_A - 8i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + 2\sqrt{3}(i_m^2 + i_{mA}^2) - 4\sqrt{3}i_m i_{mA} \cos \varphi_A),$$

$$2\bar{q}_C \tilde{q}_{C2} = \frac{u_m^2}{16} (8i_m i_{mA} \sin \varphi_A - 8i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A - 2\sqrt{3}(i_m^2 + i_{mA}^2) + 4\sqrt{3}i_m i_{mA} \cos \varphi_A);$$

– удвоенные зависимости результата произведения амплитуд переменных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\begin{aligned}
2\tilde{p}_{ABC1}\tilde{p}_{ABC2} &= \frac{1}{16}u_m^2(8i_m i_{mA} \sin \varphi_A - 8i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A), \\
2\tilde{q}_{B1}\tilde{q}_{B2} &= \frac{1}{16}u_m^2(2\sqrt{3}(i_m^2 + i_{mA}^2(\cos^2 \varphi_A - \sin^2 \varphi_A)) - 4\sqrt{3}i_m i_{mA} \cos \varphi_A) + \\
&\quad + \frac{1}{16}u_m^2(4i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A - 4i_m i_{mA} \sin \varphi_A), \\
2\tilde{q}_{C1}\tilde{q}_{C2} &= \frac{1}{16}u_m^2(-2\sqrt{3}(i_m^2 + i_{mA}^2(\cos^2 \varphi_A - \sin^2 \varphi_A)) + 4\sqrt{3}i_m i_{mA} \cos \varphi_A) + \\
&\quad + \frac{1}{16}u_m^2(4i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A - 4i_m i_{mA} \sin \varphi_A).
\end{aligned}$$

В итоге, после группировки на основании (1.18) соответствующих слагаемых становятся справедливыми следующие равенства

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{ABC}^2 + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2 &= 18i_m^2 + 6i_{mA}^2 + 12i_m i_{mA} \cos \varphi_A, \\
\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2 &= \tilde{p}_{ABC2}^2 + \tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2 = 6(i_m^2 + i_{mA}^2) - 12i_m i_{mA} \cos \varphi_A, \\
\bar{p}_{ABC}^2 + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2 + (\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2)\cos^2 2\omega t + (\tilde{p}_{ABC2}^2 + \tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2)\sin^2 2\omega t &= \\
&= \frac{3}{4}u_m^2(2i_m^2 + i_{mA}^2), \\
2(\bar{p}_{ABC}\tilde{p}_{ABC1} + \bar{q}_B\tilde{q}_{B1} + \bar{q}_C\tilde{q}_{C1}) &= \frac{12}{16}u_m^2(i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - i_m^2), \\
2(\bar{p}_{ABC}\tilde{p}_{ABC2} + \bar{q}_B\tilde{q}_{B2} + \bar{q}_C\tilde{q}_{C2}) &= -\frac{1}{16}u_m^2(24i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A), \\
2(\tilde{p}_{ABC1}\tilde{p}_{ABC2} + \tilde{q}_{B1}\tilde{q}_{B2} + \tilde{q}_{C1}\tilde{q}_{C2}) &= 0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}_{ABC}\| &= \frac{3}{4}u_m^2[(2i_m^2 + i_{mA}^2) + (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - i_m^2)\cos 2\omega t] + \\
&\quad - \frac{3}{2}u_m^2 i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A \sin 2\omega t,
\end{aligned}$$

или окончательно с учетом тригонометрических формул (1.6), (1.30) и (1.31)

$$\|\mathbf{P}_{ABC}\| = \|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| + \|\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\|, \quad (3.22)$$

где $\|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\|, \|\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\|$ – постоянная и переменная составляющие нормы кватерниона мгновенной мощности (3.2) соответственно, определяемые как

$$\|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \frac{3}{4}u_m^2(2i_m^2 + i_{mA}^2), \quad (3.23)$$

$$\|\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \frac{3}{4}u_m^2(i_{mA}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_A) - i_m^2 \cos 2\omega t), \quad (3.24)$$

причем при $i_{mA} = i_m$ и $\varphi_A = 0$ векторная часть отсутствует, а скалярная вырождается в $\bar{P}_{ABC}^2$ [64].

Как видно из (3.22), отличие в амплитуде i_{mA} и наличие фазового сдвига φ_A увеличивает скалярную величину $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ за счет появления гармоник с удвоенной частотой, что в свою очередь ухудшает энергетические характеристики трехфазной системы в силу увеличения активных потерь.

Далее выполним анализ влияния вещественных коэффициентов q_A, q_B, q_C на норму $\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|$, для чего воспользовавшись формулами (3.18)–(3.21), представим все квадратичные зависимости в виде суммы трех слагаемых:

$$(\tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2)\cos^2 2\omega t + (\tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2)\sin^2 2\omega t = \Delta + \tilde{p}_{ABC2}^2 \cos^2 2\omega t + \tilde{p}_{ABC1}^2 \sin^2 2\omega t,$$

где Δ – постоянное смещение

$$\Delta = \frac{1}{2}(\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{p}_{ABC2}^2) = \frac{1}{8}u_m^2(i_m^2 + i_{mA}^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A),$$

или окончательно при использовании формулы (1.30)

$$(\tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2)\cos^2 2\omega t + (\tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2)\sin^2 2\omega t = \bar{q}_{BC} + \tilde{q}_{BC} \cos 4\omega t,$$

в которой постоянная и переменная составляющие находятся соответственно как

$$\bar{q}_{BC} = \tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{p}_{ABC2}^2 = \frac{1}{4}u_m^2(i_m^2 + i_{mA}^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A),$$

$$\tilde{q}_{BC} = \frac{1}{2}(\tilde{p}_{ABC2}^2 - \tilde{p}_{ABC1}^2) = \frac{1}{8}u_m^2(i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - i_m^2 + 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A - i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A).$$

В итоге, воспользовавшись последними расчетными соотношениями, получаем следующее выражение для определения среднего значения нормы векторной части кватерниона мгновенной мощности

$$\|\text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \bar{q}_{BC} + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2 = \frac{1}{8}u_m^2(3i_m^2 + 5i_{mA}^2 - 6i_m i_{mA} \cos \varphi_A - 2i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A),$$

из которого следует, что данная величина зависит не только от фазового сдвига φ_A между гармоническими токами и напряжениями, как это было в случае симметричной линейной нагрузки с токами вида (3.6), но и также от амплитуды i_{mA} .

В свою очередь слагаемые $\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|$ с удвоенными гармониками можно преобразовать только к более простой форме, для чего выполнив ряд промежуточных преобразований

$$\begin{aligned} & 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B1} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C1}) \cos 2\omega t = (\tilde{p}_{ABC1}^2 - 3\tilde{p}_{ABC2}^2) \cos 2\omega t = \\ & = \frac{1}{4} u_m^2 (i_m^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A) \cos 2\omega t = \\ & = \frac{1}{4} u_m^2 (i_m^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A - i_{mA}^2 + 2i_{mA}^2 \cos 2\varphi_A) \cos 2\omega t, \\ & 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B2} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C2}) \sin 2\omega t = 4\tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} \sin 2\omega t = \\ & = \frac{1}{4} u_m^2 (4i_m i_{mA} \sin \varphi_A - 2i_{mA}^2 \sin 2\varphi_A) \sin 2\omega t \end{aligned}$$

и используя формулу (1.30) окончательно получаем

$$\begin{aligned} & 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B1} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C1}) \cos 2\omega t + 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B2} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C2}) \sin 2\omega t = \tag{3.25} \\ & = \frac{1}{4} u_m^2 (i_m^2 - i_{mA}^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A) \cos 2\omega t + u_m^2 i_m i_{mA} \sin \varphi_A \sin 2\omega t + 2i_{mA}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_A). \end{aligned}$$

Таким образом, на основании проведенного выше анализа можно заключить, что норма $\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|$ включает в себя:

– среднее смещение, определяемое как

$$\bar{q}_{BC} + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2 = \frac{1}{2} (3\tilde{p}_{ABC1}^2 + 5\tilde{p}_{ABC2}^2);$$

– удвоенные гармоники

$$\begin{aligned} & 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B1} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C1}) \cos 2\omega t + 2(\bar{q}_B \tilde{q}_{B2} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C2}) \sin 2\omega t = \\ & = (\tilde{p}_{ABC1}^2 - 3\tilde{p}_{ABC2}^2) \cos 2\omega t + 4\tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} \sin 2\omega t; \end{aligned}$$

– тригонометрические зависимости в функции четвертой гармоники

$$\tilde{q}_{BC} \cos 4\omega t + (\tilde{q}_{B1} \tilde{q}_{B2} + \tilde{q}_{C1} \tilde{q}_{C2}) \sin 4\omega t =$$

$$= \frac{1}{2} (\tilde{p}_{ABC2}^2 - \tilde{p}_{ABC1}^2) \cos 4\omega t - \tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} \sin 4\omega t.$$

По аналогии с вышеизложенным, выделим в квадратичных зависимостях скалярной части постоянную и переменную составляющие, которые после выполнения необходимых математических операций принимают следующий вид

$$\tilde{p}_{ABC1}^2 \cos^2 2\omega t + \tilde{p}_{ABC2}^2 \sin^2 2\omega t = \frac{1}{2} \bar{q}_{BC} - \tilde{q}_{BC} \cos 4\omega t,$$

в результате $\|\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}\|$ будет содержать:

– постоянное смещение

$$\|\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \frac{1}{2} \bar{q}_{BC} + \bar{p}_{ABC}^2 = \frac{1}{8} u_m^2 (9i_m^2 + i_{mA}^2 + 6i_m i_{mA} \cos \varphi_A + 2i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A),$$

удовлетворяющее в соответствии с (3.23) равенству

$$\|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \|\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| + \|\text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \frac{3}{4} u_m^2 (2i_m^2 + i_{mA}^2);$$

– гармонические зависимости в функции двойной частоты, которые по аналогии с (3.25) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & 2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC1} \cos 2\omega t + 2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC2} \sin 2\omega t = \\ &= \frac{1}{2} u_m^2 [(i_m i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - 2i_m^2) \cos 2\omega t - \sin \varphi_A (i_{mA}^2 \cos \varphi_A + 2i_m i_{mA}) \sin 2\omega t] = \\ &= \frac{1}{4} u_m^2 [(2i_m i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA}^2 - 4i_m^2) \cos 2\omega t - 4i_m i_{mA} \sin \varphi_A \sin 2\omega t + i_{mA}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_A)]; \end{aligned} \quad (3.26)$$

– четвертые гармоники

$$- \tilde{q}_{BC} \cos 4\omega t + \tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} \sin 4\omega t.$$

Как нетрудно заметить, четвертые гармоники скалярной и векторной частей входят в выражение для нормы кватерниона мгновенной мощности с обратными знаками, в силу чего они отсутствуют в $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$, а сумма тригонометрических зависимостей в функции $2\omega t$ с учетом (3.14), (3.25) и (3.26) преобразуется к следующему соотношению

$$\begin{aligned} & 2(\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC1} + \bar{q}_B \tilde{q}_{B1} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C1}) \cos 2\omega t + 2(\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC2} + \bar{q}_B \tilde{q}_{B2} + \bar{q}_C \tilde{q}_{C2}) \sin 2\omega t = \\ &= 3(\tilde{p}_{ABC1}^2 - \tilde{p}_{ABC2}^2 - u_m i_m \tilde{p}_{ABC1}) \cos 2\omega t + 3(2\tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} - u_m i_m \tilde{p}_{ABC2}) \sin 2\omega t = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} u_m^2 (i_{mA}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_A) - i_m^2 \cos 2\omega t),$$

которое полностью совпадает с формулой (3.24).

В качестве иллюстрации основных теоретических результатов анализа уравнения баланса мгновенных мощностей в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ при асимметрии фазы A , на рисунке 3.1 изображены токи вида (3.12), а на рисунке 3.2 и рисунке 3.4 соответствующие им временные зависимости вещественных коэффициентов и различных норм кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$, полученные методом цифрового моделирования в программном продукте “MATLAB” R2008b. В качестве объекта исследования выступала трехфазная система с нулевым проводом, включающая в себя симметричный источник напряжений с амплитудным значением $u_m = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ В}$ и линейную нагрузку в виде чисто резистивных цепей в фазах B и C с одинаковой величиной активного сопротивления $R_B = R_C = R = 50 \text{ Ом}$, а также фазу A со следующими параметрами:

$$R_A = 0,5R, \quad L_A = 55 \text{ мГн}.$$

Как видно из рисунка 3.3, пространственная траектория движения трехмерной изображающей точки, образованной вещественными коэффициентами вида (3.13), (3.16) и (3.17), носит эллипсовидный характер со сдвигом относительно начала координат в силу гармонического закона изменения данных скалярных величин и наличия постоянного смещения. В свою очередь на рисунке 3.5 представлены пространственно-временные зависимости $\|\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}\|$ и $\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|$, которые имеют сложный пульсирующий характер вследствие их функциональной зависимости от второй и четвертой гармоник.

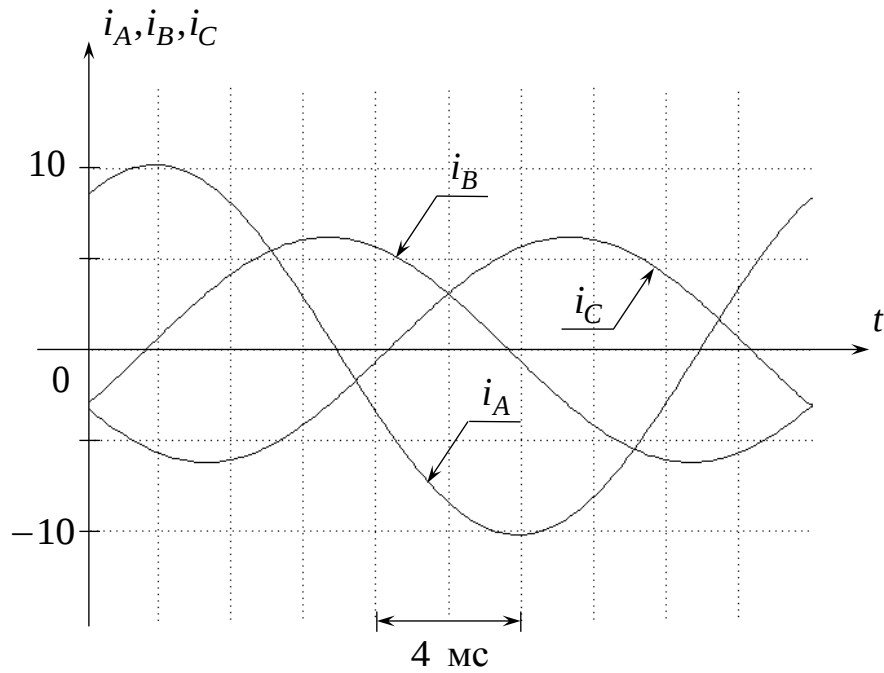


Рисунок 3.1 – Фазные токи активно-реактивной несимметричной трехфазной нагрузки

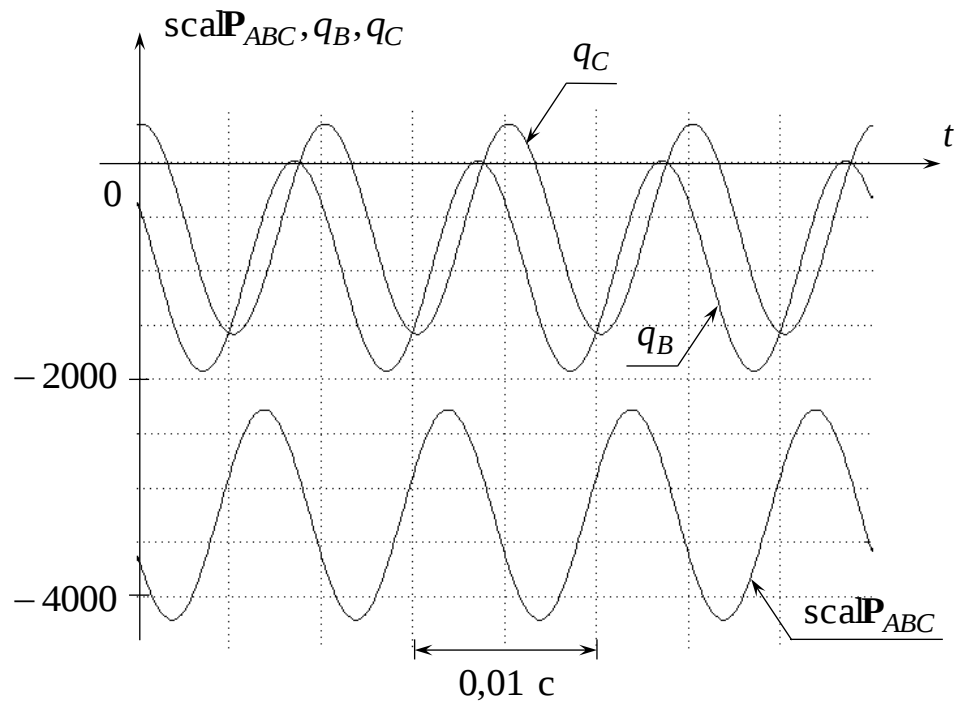


Рисунок 3.2 – Скалярная часть и вещественные коэффициенты при мнимых единицах $\mathbf{P}_{ABC}$

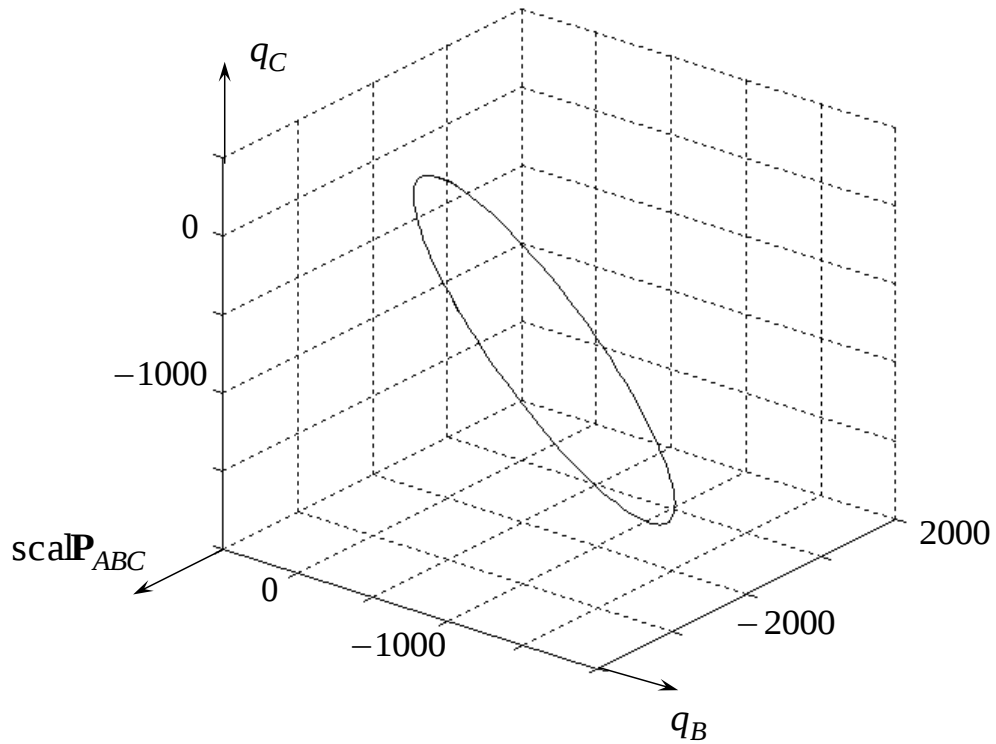


Рисунок 3.3 – Скалярная часть и вещественные коэффициенты $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ в трехмерном подпространстве $\mathbf{H}$, образованном $1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$

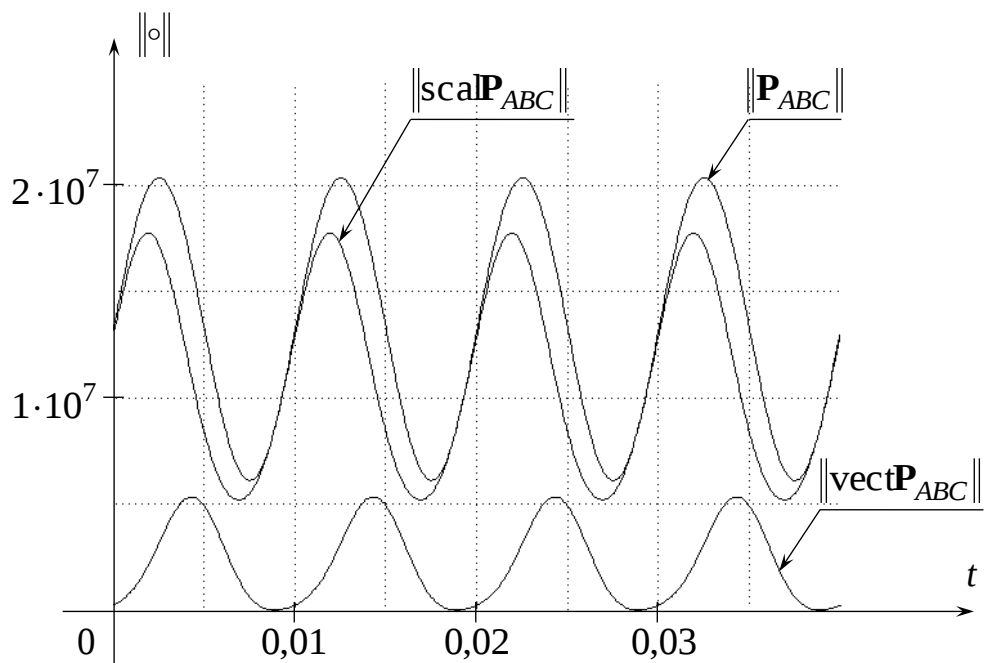


Рисунок 3.4 – Временные зависимости норм кватерниона мгновенной мощности, а также его скалярной и векторной частей

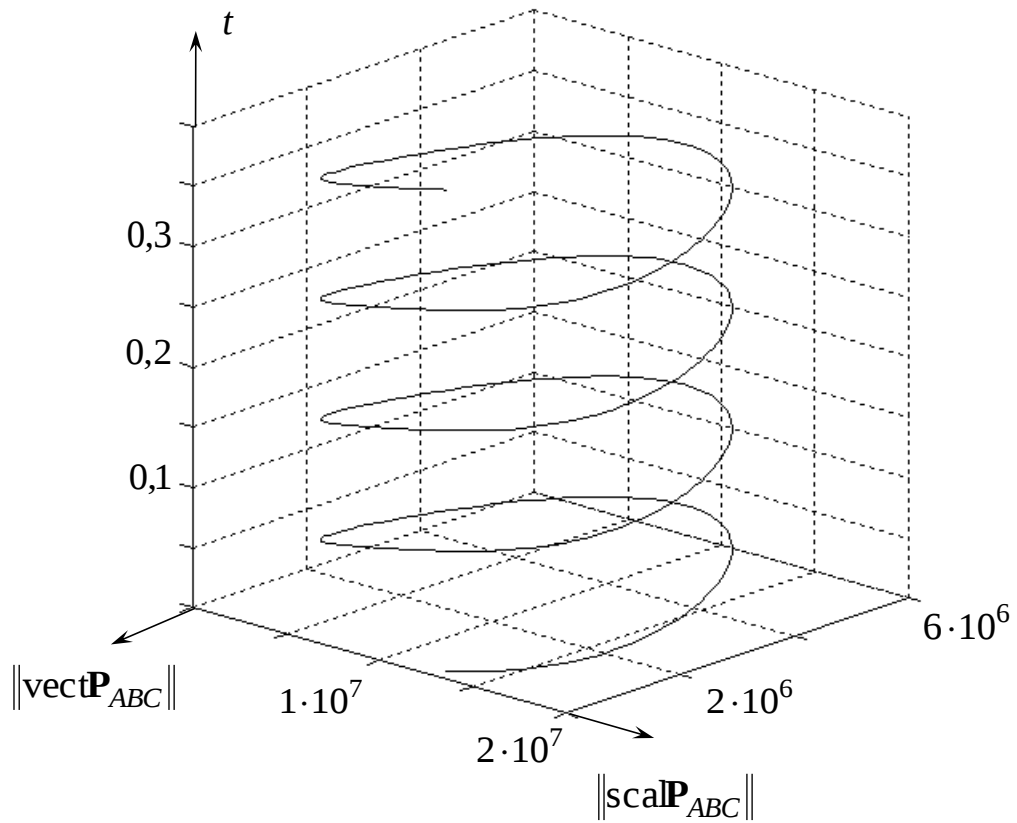


Рисунок 3.5 – Траектория движения изображающей точки, описывающей временное изменение норм скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

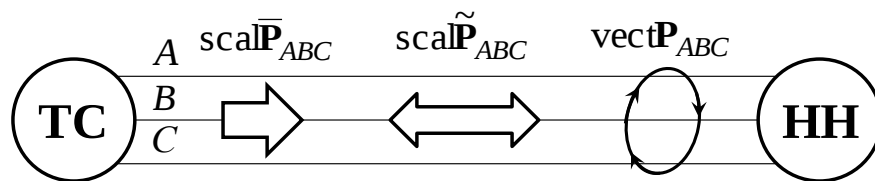


Рисунок 3.6 – Упрощенная функциональная схема распределения мгновенных мощностей несимметричной трехфазной системы в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$

Таким образом, на основании представленного в данном разделе анализа уравнения баланса мгновенных мощностей вида (3.2) применительно к линейному активно-реактивному потребителю с асимметрией цепей нагрузки одной из фаз, результаты которого были проверены методом цифрового моделирования в “MATLAB” R2008b, можно сделать следующие выводы:

1. Любое отличие в параметрах нагрузки одной из фаз по отношению к двум другим будет приводить к появлению векторной составляющей кватерниона мгновенной мощности, причем вещественный коэффициент мнимой части, отвечающий за несимметричный участок, будет равен нулю. На основании этого можно заключить, что $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ образуется вследствие отклонения токов и/или напряжений от условия симметрии (1.2) и отвечает за потоки электрической энергии в единицу времени, которые не потребляются от источника и циркулируют между фазами системы, что иллюстрирует рисунок 3.6. Данное утверждение также вытекает из однофазного случая, при котором $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC} = 0$ [63].

2. Вещественные коэффициенты скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ имеют среднюю составляющую, относительно которой происходит гармоническое колебание с удвоенной частотой.

3. Временные зависимости норм действительной и мнимой частей кватерниона мгновенной мощности содержат постоянный сдвиг относительно нуля, а также вторые и четвертые гармоники, причем последние имеют разные знаки, в силу чего они не входят в $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$.

4. Асимметрия любой из фаз увеличивает скалярную величину $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ за счет появления периодических колебаний, что в свою очередь ухудшает энергетические характеристики трехфазного потребителя. При этом среднее значение $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ зависит не только от величины углового сдвига между соответствующими токами и напряжениями, как это было в случае симметричной линейной нагрузки с токами вида (3.6), но и также от амплитуды, что приводит к необхо-

димости полной компенсации мнимой части $\mathbf{P}_{ABC}$ для повышения энергоэффективности трехфазной системы.

3.1.3 Частные случаи линейной трехфазной нагрузки с параметрической асимметрией фазы A

Представленные в подразделе 3.1.2. аналитические выражения для определения гармонических составляющих вещественных коэффициентов кватерниона мгновенной мощности в линейных электрических цепях с несимметричными токами вида (3.12) можно также преобразовать к функциональной зависимости только от одной тригонометрической функции на основании метода дополнительного угла [116], в соответствии с которым справедливы следующие равенства [78]

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = \bar{p}_{ABC} + A \cos(2\omega t - \phi_p), \quad (3.27)$$

$$q_B = \bar{q}_B + A \sin(2\omega t + \phi_{qB}), \quad (3.28)$$

$$q_C = \bar{q}_C + A \sin(2\omega t + \phi_{qC}), \quad (3.29)$$

где $A, \phi_p, \phi_{qB}, \phi_{qC}$ – амплитуда и фазовые сдвиги гармоник в функции двойной частоты, определяемые как

$$A = \sqrt{\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{p}_{ABC2}^2} = \sqrt{\tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{B2}^2} = \sqrt{\tilde{q}_{C1}^2 + \tilde{q}_{C2}^2} = \frac{1}{2} u_m \sqrt{i_m^2 - 2i_m i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA}^2},$$

$$\phi_p = \arctg \frac{\tilde{p}_{ABC2}}{\tilde{p}_{ABC1}} = \arctg \frac{i_{mA} \sin \varphi_A}{i_m - i_{mA} \cos \varphi_A},$$

$$\phi_{qB} = \arctg \frac{\tilde{q}_{B1}}{\tilde{q}_{B2}} = \arctg \frac{i_m - i_{mA} \cos \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A}{\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA} \sin \varphi_A},$$

$$\phi_{qC} = \arctg \frac{\tilde{q}_{C1}}{\tilde{q}_{C2}} = \arctg \frac{i_{mA} \cos \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A - i_m}{\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A - i_{mA} \sin \varphi_A}.$$

Последние формулы справедливы для любых активно-реактивных цепей фазы A при произвольных численных значениях амплитуды $\pm i_{mA} \neq i_m$ и углового сдвига $\pm \varphi_A = \text{var}$, в связи с чем далее остановимся на более подробном анализе

частных случаев несимметричного энергопотребления. Так, например, при $\varphi_A = 0$ и $\pm i_{mA} = \text{var}$, как следует из (3.27)–(3.29), составляющие уравнения баланса мгновенных мощностей в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}_{ABC}\| &= \frac{3}{4}u_m^2 \left[(2i_m^2 + i_{mA}^2) + (i_{mA}^2 - i_m^2) \cos 2\omega t \right], \\ \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} &= -\frac{1}{2}u_m(2i_m + i_{mA} - (i_m - i_{mA}) \cos 2\omega t), \\ q_B &= \frac{1}{4}u_m(i_m - i_{mA})(1 + 2 \sin(2\omega t + 30^\circ)), \\ q_C &= -\frac{1}{4}u_m(i_m - i_{mA})(1 - 2 \sin(2\omega t - 30^\circ)),\end{aligned}$$

а при асимметрии, выраженной в наличии фазового сдвига $\pm \varphi_A \neq 0$ при $i_{mA} = i_m$, скалярная часть и норма кватерниона $\mathbf{P}_{ABC}$ описываются следующими аналитическими зависимостями

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}_{ABC}\| &= \frac{3}{4}u_m^2 i_m^2 (3 + \cos 2(\omega t + \varphi_A) - \cos 2\omega t), \\ \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} &= \bar{p}_{ABC} + A \sin(2\omega t + \phi_p),\end{aligned}$$

в которых амплитуда A , смещение $\bar{p}_{ABC}$ и начальное угловое положение ϕ_p с учетом тригонометрических формул (1.30) и (1.31) определяются как

$$A = \frac{1}{2}u_m \sqrt{i_m^2 - 2i_m^2 \cos \varphi_A + i_m^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_m i_m \sqrt{1 - \cos \varphi_A} = u_m i_m \sin \frac{\varphi_A}{2}, \quad (3.30)$$

$$\bar{p}_{ABC} = -\frac{1}{2}u_m i_m (2 + \cos \varphi_A) = -u_m i_m \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \frac{\varphi_A}{2} \right),$$

$$\phi_p = \arctg \frac{1 - \cos \varphi_A}{\sin \varphi_A} = \arctg \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi_A}{2}}{\sin \varphi_A},$$

а соотношения (3.28)–(3.29) с учетом (3.30) принимают следующий вид

$$\begin{aligned}q_B &= \bar{q}_B + A \sin(2\omega t + \phi_{qB}), \\ q_C &= \bar{q}_C - A \sin(2\omega t + \phi_{qC}),\end{aligned}$$

в которых соответствующие переменные находятся как

$$\bar{q}_B = \frac{1}{4} u_m i_m (1 - \cos \varphi_A + \sqrt{3} \sin \varphi_A),$$

$$\bar{q}_C = \frac{1}{4} u_m i_m (\cos \varphi_A + \sqrt{3} \sin \varphi_A - 1),$$

$$\phi_{qB} = \arctg \frac{1 - \cos \varphi_A - \sqrt{3} \sin \varphi_A}{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos \varphi_A + \sin \varphi_A},$$

$$\phi_{qC} = \arctg \frac{\cos \varphi_A - \sqrt{3} \sin \varphi_A - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos \varphi_A - \sin \varphi_A}.$$

В заключении данного подраздела также необходимо отметить, что токовая асимметрия фазы A будет приводить к отклонению $\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}$ от эталонной постоянной составляющей $\bar{P}_{ABC}$ вида (3.4) на величину [78]

$$\frac{1}{2} u_m (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A),$$

которая при $i_{mA} = i_m$ и $\pm \varphi_A \neq 0$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} u_m i_m (1 - \cos \varphi_A) = u_m i_m \sin^2 \frac{\varphi_A}{2},$$

а в случае $\varphi_A = 0$ и $\pm i_{mA} = \text{var}$ находится как

$$\frac{1}{2} u_m (i_m - i_{mA}).$$

3.2 Обобщенный случай асимметрии токов во всех трех фазах линейной нагрузки

По аналогии с последовательностью изложения результатов анализа отдельных составляющих уравнения баланса мгновенных мощностей (3.2) в случае трехфазной линейной нагрузки с асимметрией вида (3.12), далее получим аналитические выражения для определения скалярной и векторной частей кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ при различии амплитуд и угловых сдвигов всех трех гармонических токов, представленных как

$$\begin{cases} i_A = i_{mA} \cos \omega t \cos \varphi_A - i_m \sin \omega t \sin \varphi_A, \\ i_B = i_{mB} \cos \omega t \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi_B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_B \right) + i_{mB} \sin \omega t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_B + \frac{1}{2} \sin \varphi_B \right), \\ i_C = -i_{mC} \cos \omega t \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_C \right) + i_{mC} \sin \omega t \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_C + \frac{1}{2} \sin \varphi_C \right). \end{cases} \quad (3.31)$$

Выполняя промежуточные вычисления мгновенных мощностей каждой фазы по отдельности при подключении потребителя к источнику с симметричной системой напряжений (3.1)

$$\begin{aligned} u_A i_A &= u_m i_{mA} (\cos^2 \omega t \cos \varphi_A - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi_A), \\ u_B i_B &= \frac{1}{4} u_m i_{mB} (\cos^2 \omega t (\cos \varphi_B - \sqrt{3} \sin \varphi_B) + 2 \cos \omega t \sin \omega t (-\sqrt{3} \cos \varphi_B + \sin \varphi_B)) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} u_m i_{mB} (1 - \cos^2 \omega t) (\sqrt{3} \cos \varphi_B + \sin \varphi_B), \\ u_C i_C &= \frac{1}{4} u_m i_{mC} (\cos^2 \omega t (\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C) + 2 \cos \omega t \sin \omega t (\sqrt{3} \cos \varphi_C + \sin \varphi_C)) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} u_m i_{mC} (1 - \cos^2 \omega t) (\sqrt{3} \cos \varphi_C - \sin \varphi_C), \end{aligned}$$

слагаемые правой части (3.13) с учетом тригонометрических формул (1.30) и (1.31) подчиняются следующим аналитическим выражениям

$$\bar{p}_{ABC} = -\frac{1}{4} u_m (2i_{mA} \cos \varphi_A + 2i_{mB} \cos \varphi_B + 2i_{mC} \cos \varphi_C), \quad (3.32)$$

$$\tilde{p}_{ABC1} = \frac{1}{4} u_m (-2i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} (\cos \varphi_B + \sqrt{3} \sin \varphi_B) + i_{mC} (\cos \varphi_C - \sqrt{3} \sin \varphi_C)), \quad (3.33)$$

$$\tilde{p}_{ABC2} = \frac{1}{4} u_m (2i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mB} (\sqrt{3} \cos \varphi_B - \sin \varphi_B) - i_{mC} (\sqrt{3} \cos \varphi_C + \sin \varphi_C)). \quad (3.34)$$

В свою очередь вещественный коэффициент при первой мнимой единице $\mathbf{q}_1$ находится как

$$q_A = \frac{1}{4} u_m (i_{mB} (-\cos \varphi_B + \sqrt{3} \sin \varphi_B) + i_{mC} (\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C)) \cos^2 \omega t +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3}}{4} u_m (i_{mB} (\sqrt{3} \cos \varphi_B + \sin \varphi_B) - i_{mC} (\sqrt{3} \cos \varphi_C - \sin \varphi_C)) (1 - \cos^2 \omega t) + \\
& + u_m (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C) \cos \omega t \cdot \sin \omega t,
\end{aligned}$$

или иначе

$$q_A = \bar{q}_A + \tilde{q}_{A1} \cos 2\omega t + \tilde{q}_{A2} \sin 2\omega t,$$

где $\bar{q}_A, \tilde{q}_{A1}, \tilde{q}_{A2}$ – постоянное смещение и амплитуды переменных составляющих векторной части $\mathbf{P}_{ABC}$ для фазы A

$$\bar{q}_A = \frac{1}{4} u_m (i_{mB} (\cos \varphi_B + \sqrt{3} \sin \varphi_B) + i_{mC} (-\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C)), \quad (3.35)$$

$$\tilde{q}_{A1} = \frac{1}{4} u_m (-2i_{mB} \cos \varphi_B + 2i_{mC} \cos \varphi_C), \quad (3.36)$$

$$\tilde{q}_{A2} = \frac{1}{4} u_m (2i_{mB} \sin \varphi_B - 2i_{mC} \sin \varphi_C). \quad (3.37)$$

Выполняя аналогичные математические операции для второй фазы B получаем

$$\begin{aligned}
q_B = & \frac{1}{2} u_m (-i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} (\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C)) \cos^2 \omega t + \\
& + \frac{1}{2} u_m (i_{mA} (-\sqrt{3} \cos \varphi_A + \sin \varphi_A) + i_{mC} (\sqrt{3} \cos \varphi_C - \sin \varphi_C)) \cos \omega t \cdot \sin \omega t + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_{mA} \sin \varphi_A (1 - \cos^2 \omega t),
\end{aligned}$$

в результате чего соответствующие компоненты (3.16) описываются следующими формулами

$$\bar{q}_B = \frac{1}{4} u_m (i_{mA} (-\cos \varphi_A + \sqrt{3} \sin \varphi_A) + i_{mC} (\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C)), \quad (3.38)$$

$$\tilde{q}_{B1} = \frac{1}{4} u_m (-i_{mA} (\cos \varphi_A + \sqrt{3} \sin \varphi_A) + i_{mC} (\cos \varphi_C + \sqrt{3} \sin \varphi_C)), \quad (3.39)$$

$$\tilde{q}_{B2} = \frac{1}{4} u_m (i_{mA} (-\sqrt{3} \cos \varphi_A + \sin \varphi_A) + i_{mC} (\sqrt{3} \cos \varphi_C - \sin \varphi_C)) \quad (3.40)$$

и применительно к фазе C

$$q_C = \frac{1}{2} u_m (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} (-\cos \varphi_B + \sqrt{3} \sin \varphi_B)) \cos^2 \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_{mA} \sin \varphi_A (1 - \cos^2 \omega t) +$$

$$+\frac{1}{2}u_m\left(-i_{mA}\left(\sqrt{3}\cos\varphi_A+\sin\varphi_A\right)+i_{mB}\left(\sqrt{3}\cos\varphi_B+\sin\varphi_B\right)\right)\cos\omega t\cdot\sin\omega t,$$

откуда правая часть (3.17) включает в себя следующие скалярные величины

$$\bar{q}_C = \frac{1}{4}u_m\left(i_{mA}\left(\cos\varphi_A+\sqrt{3}\sin\varphi_A\right)+i_{mB}\left(-\cos\varphi_B+\sqrt{3}\sin\varphi_B\right)\right), \quad (3.41)$$

$$\tilde{q}_{C1} = \frac{1}{4}u_m\left(i_{mA}\left(\cos\varphi_A-\sqrt{3}\sin\varphi_A\right)+i_{mB}\left(-\cos\varphi_B+\sqrt{3}\sin\varphi_B\right)\right), \quad (3.42)$$

$$\tilde{q}_{C2} = \frac{1}{4}u_m\left(-i_{mA}\left(\sqrt{3}\cos\varphi_A+\sin\varphi_A\right)+i_{mB}\left(\sqrt{3}\cos\varphi_B+\sin\varphi_B\right)\right). \quad (3.43)$$

Как видно из полученных выше формул, вещественные коэффициенты мнимой части кватерниона мгновенной мощности являются функциями амплитудных значений токов и угловых сдвигов, относящихся к двум другим фазам, что дополнительно подтверждает выводы раздела 3.1.2 о физической интерпретации $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$.

В свою очередь, если воспользоваться аналитическими зависимостями для вычисления отдельных составляющих $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ активно-реактивной нагрузки с линейно независимой системой токов вида (3.31), которые приведены в Приложении А, то с учетом и промежуточных равенств

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{q}_{A1}^2 + \tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2 &= \tilde{p}_{ABC2}^2 + \tilde{q}_{A2}^2 + \tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2 = \\ &= -\left(\bar{p}_{ABC}^2 + \bar{q}_A^2 + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2\right) + \frac{3}{4}u_m^2\left(i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2\right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\tilde{p}_{ABC1}\tilde{p}_{ABC2} = -\tilde{q}_{A1}\tilde{q}_{A2} - \tilde{q}_{B1}\tilde{q}_{B2} - \tilde{q}_{C1}\tilde{q}_{C2}, \quad (3.45)$$

становится справедливым следующее выражение для нахождения численного значения нормы кватерниона мгновенной мощности

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_{ABC}\| &= \frac{3}{4}u_m^2\left(i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2\right) + \\ &+ \frac{3}{8}u_m^2\left(2i_{mA}^2\cos 2\varphi_A - i_{mC}^2\cos 2\varphi_C - i_{mB}^2\cos 2\varphi_B\right)\cos 2\omega t + \\ &+ \frac{3}{8}u_m^2\left(-2i_{mA}^2\sin 2\varphi_A + i_{mB}^2\sin 2\varphi_B + i_{mC}^2\sin 2\varphi_C\right)\sin 2\omega t + \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{3} \frac{3}{8} u_m^2 \left[(i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B) \cos 2\omega t + (i_{mC}^2 \cos 2\varphi_C - i_{mB}^2 \cos 2\varphi_B) \sin 2\omega t \right],$$

которое на основании тригонометрических формул (1.6) и (1.101) можно также представить в виде суммы (3.22) со следующими слагаемыми

$$\|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \frac{3}{4} u_m^2 (i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\| &= \sqrt{3} \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mC}^2 \sin 2(\omega t + \varphi_C) - i_{mB}^2 \sin 2(\omega t + \varphi_B)) + \\ &+ \frac{3}{8} u_m^2 (2i_{mA}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_A) - i_{mB}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_B) - i_{mC}^2 \cos 2(\omega t + \varphi_C)) \end{aligned} \quad (3.47)$$

В соответствии со структурой изложения теоретического материала предыдущего раздела, далее получим расчетные соотношения для определения численных значений норм скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ в случае одновременного различия токов всех трех фаз как по амплитуде гармонических сигналов i_{mj} , так и по угловому сдвигу φ_j . Воспользовавшись промежуточными результатами математического преобразования вещественных коэффициентов, приведенных в приложении А, а также следующими равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ABC1}^2 \cos^2 2\omega t + \tilde{p}_{ABC2}^2 \sin^2 2\omega t &= \frac{1}{2} (\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{p}_{ABC2}^2) + \frac{1}{2} (\tilde{p}_{ABC1}^2 - \tilde{p}_{ABC2}^2) \cos 4\omega t, \\ \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j1}^2 \cos^2 2\omega t + \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j2}^2 \sin^2 2\omega t &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\forall j} \tilde{q}_{j1}^2 + \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j2}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{\forall j} \tilde{q}_{j1}^2 - \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j2}^2 \right) \cos 4\omega t, \end{aligned}$$

данные скалярные величины $\|\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}\|$ и $\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|$ с учетом формул (3.46) и (3.47) раскладываются на следующие компоненты:

– постоянное смещение

$$\begin{aligned} \|\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| &= \bar{p}_{ABC}^2 + \frac{1}{2} (\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{p}_{ABC2}^2) = \\ &+ 2 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2) + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + \\ &+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mB} \sin \varphi_B) + i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mC} \sin \varphi_C)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B - i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_A) + \\
& + 6 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) - \\
& - 2 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C),
\end{aligned}$$

или применительно к мнимой части

$$\begin{aligned}
\|\text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| &= \sum_{\forall j} \bar{q}_j^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{\forall j} \tilde{q}_{j1}^2 + \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j2}^2 \right) = \|\bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| - \|\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| = \\
&= 6 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2) + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C) + i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mA} \sin \varphi_A)) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_A - i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B) - \\
&- 6 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) + \\
&+ 2 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C);
\end{aligned}$$

– максимальные мгновенные значения гармонических составляющих скалярной и векторной частей нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ в функции косинуса двойной частоты $\cos 2\omega t$

$$\begin{aligned}
2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC1} &= 4 \frac{u_m^2}{16} (2i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + \\
&+ 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B - 2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) + \\
&+ 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B) - i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} \cos \varphi_C)) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\forall j} \bar{q}_j^2 \tilde{q}_{j1}^2 &= 2 \frac{u_m^2}{16} \left(2i_{mA}^2 \cos 2\varphi_A - i_{mB}^2 \cos 2\varphi_B - i_{mC}^2 \cos 2\varphi_C \right) + \\
+ 4 \frac{u_m^2}{16} &\left(-2i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B \right) - \\
- 4 \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B - 2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C \right) - \\
- 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B) - i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} \cos \varphi_C) \right);
\end{aligned}$$

– максимальные мгновенные значения гармонических составляющих скалярной и векторной частей нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ в функции синуса двойной частоты $\sin 2\omega t$

$$\begin{aligned}
2 \bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC2} &= 2 \frac{u_m^2}{16} \left(-2i_{mA}^2 \sin 2\varphi_A + i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B + i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C \right) + \\
+ 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \cos \varphi_C - i_{mB} \cos \varphi_B) \right) + \\
+ 4 \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} \cos \varphi_C) + i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B) \right) + \\
- 8 \frac{u_m^2}{16} &i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C), \\
2 \sum_{\forall j} \bar{q}_j^2 \tilde{q}_{j2}^2 &= 4 \frac{u_m^2}{16} \left(-2i_{mA}^2 \sin 2\varphi_A + i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B + i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C \right) + \\
+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mC}^2 \cos 2\varphi_C - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B \right) + 8 \frac{u_m^2}{16} i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C) + \\
+ 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B - i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C + i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B - i_{mC} \cos \varphi_C) \right) - \\
- 4 \frac{u_m^2}{16} &\left(i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} \cos \varphi_C) + i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B) \right);
\end{aligned}$$

– максимальные мгновенные значения гармонических составляющих скалярной и векторной частей нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ в

функции косинуса четвертой гармоники $\cos 4\omega t$, которые с учетом формулы (3.44) находятся как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\tilde{p}_{ABC1}^2 - \tilde{p}_{ABC2}^2) &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{\forall j} \tilde{q}_{j1}^2 - \sum_{\forall j} \tilde{q}_{j2}^2\right) = \\ &= \frac{u_m^2}{16}(2i_{mA}^2 \cos 2\varphi_A - i_{mB}^2 \cos 2\varphi_B - i_{mC}^2 \cos 2\varphi_C) - \sqrt{3} \frac{u_m^2}{16}(i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B) + \\ &+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16}(i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mB} \sin \varphi_B) - i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B - i_{mC} \cos \varphi_C)) - \\ &- 2 \frac{u_m^2}{16}(i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B - 2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) + \\ &+ 2 \frac{u_m^2}{16}(i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B - 2i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C); \end{aligned}$$

– максимальные мгновенные значения гармонических составляющих скалярной и векторной частей нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ в функции синуса четвертой гармоники $\sin 4\omega t$, подчиняющихся в соответствии с (3.45) следующему выражению

$$\begin{aligned} 2\tilde{p}_{ABC1}\tilde{p}_{ABC2} &= -2(\tilde{q}_{A1}\tilde{q}_{A2} + \tilde{q}_{B1}\tilde{q}_{B2} + \tilde{q}_{C1}\tilde{q}_{C2}) = \\ &= 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16}(i_{mB}^2 \cos 2\varphi_B - i_{mC}^2 \cos 2\varphi_C) - 2 \frac{u_m^2}{16}(2i_{mA}^2 \sin 2\varphi_A - i_{mB}^2 \sin 2\varphi_B - i_{mC}^2 \sin 2\varphi_C) + \\ &+ 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16}(i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \cos \varphi_C - i_{mB} \cos \varphi_B) + i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C)) + \\ &+ 4 \frac{u_m^2}{16}(i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C) + i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C)) - \\ &- 8 \frac{u_m^2}{16}(i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B). \end{aligned}$$

На основании представленного выше анализа энергетических процессов в Q -базисе в случае несимметричной трехфазной системы синусоидальных токов вида (3.31) можно заключить, что нормы скалярной и векторной частей кватерниона мгновенной мощности содержат постоянные и переменные составляющие,

причем четвертые гармоники $\|\text{sca}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\|$ и $\|\text{vect}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}\|$, как и в частном случае асимметрии фазы A , равны по абсолютному значению, но имеют различные знаки, в связи с чем они отсутствуют в $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$.

Для графической иллюстрации процесса энергопотребления трехфазной несимметричной системы в терминах гиперкомплексных чисел, на рисунке 3.7 изображены временные зависимости фазных токов вида (3.31), а на рисунках 3.8–3.11 представлены различные вещественные коэффициенты и нормы $\mathbf{P}_{ABC}$, полученные методом цифрового моделирования в приложении “Simulink” программного продукта “MATLAB” R2008b при следующих параметрах RLC-цепей:

– фаза A :

$$R_A = 50 \text{ Ом}, \quad C_A = 0,15 \text{ мФ};$$

– фаза B :

$$R_B = 0,5R_A, \quad L_B = 55 \text{ мГн};$$

– фаза C :

$$R_C = 0,45R_A, \quad L_C = 0,45L_B.$$

Как видно из представленных выше пространственно-временных зависимостей различных скалярных величин, описывающих кватернион мгновенной мощности трехфазной системы в случае несимметричной активно-реактивной нагрузки, наличие гармонических составляющих вызывают периодические колебания в соответствующих энергетических показателях, что подтверждает правильность полученных в данном разделе теоретических результатов.

В заключении также необходимо отметить, что представленные ранее в разделе 3.1.2 формулы (3.13)–(3.16) и (3.22) получаются из соответствующих соотношений при соблюдении следующих равенств

$$i_{mB} = i_{mC} = i_m \text{ и } \varphi_B = \varphi_C = 0.$$

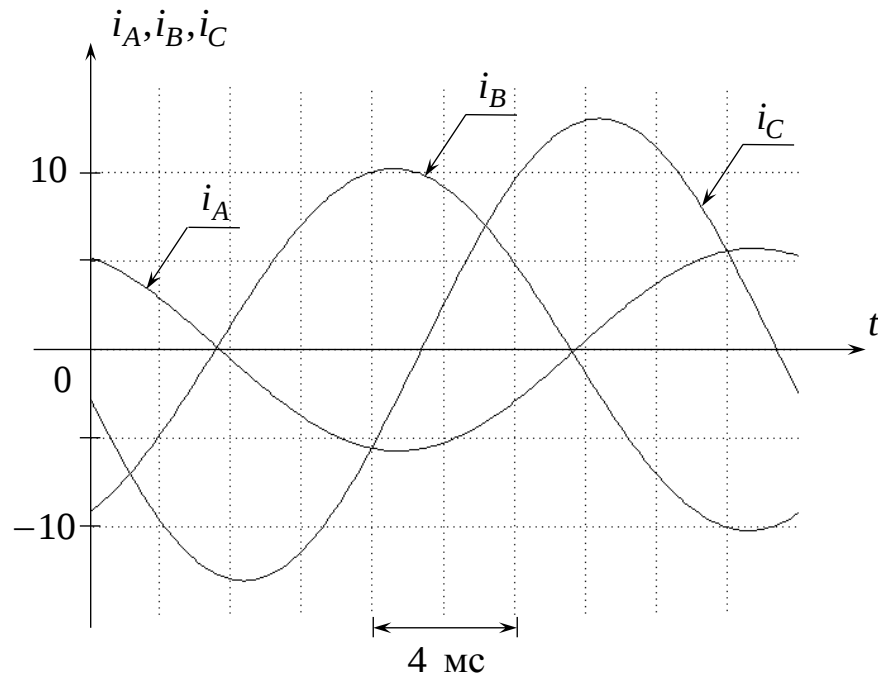


Рисунок 3.7 – Фазные токи активно-реактивной несимметричной трехфазной нагрузки

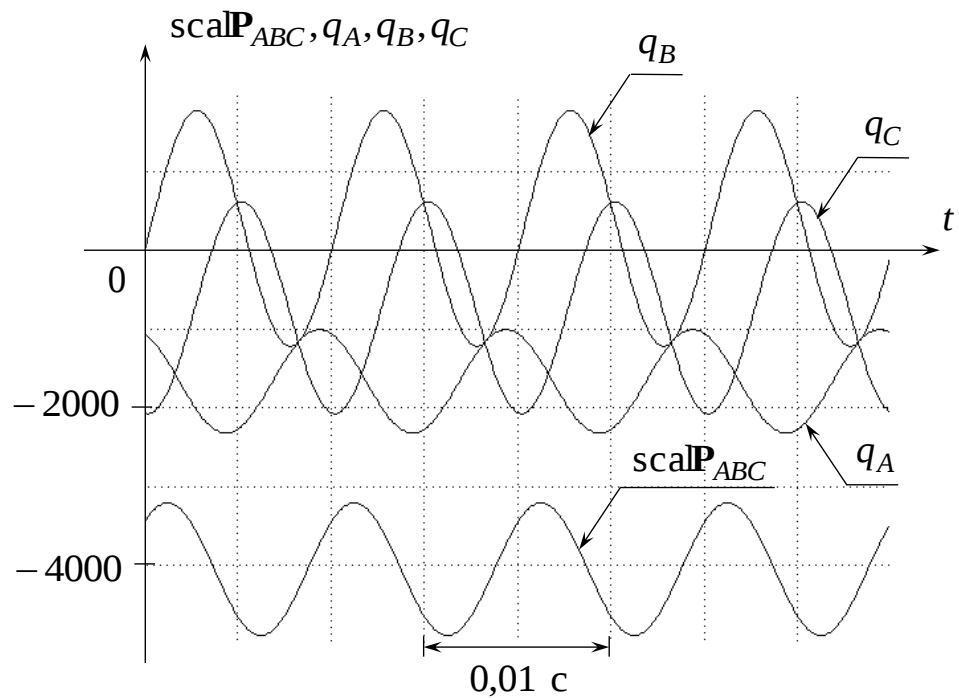


Рисунок 3.8 – Вещественные коэффициенты при одной действительной и трех мнимых единицах P_{ABC}

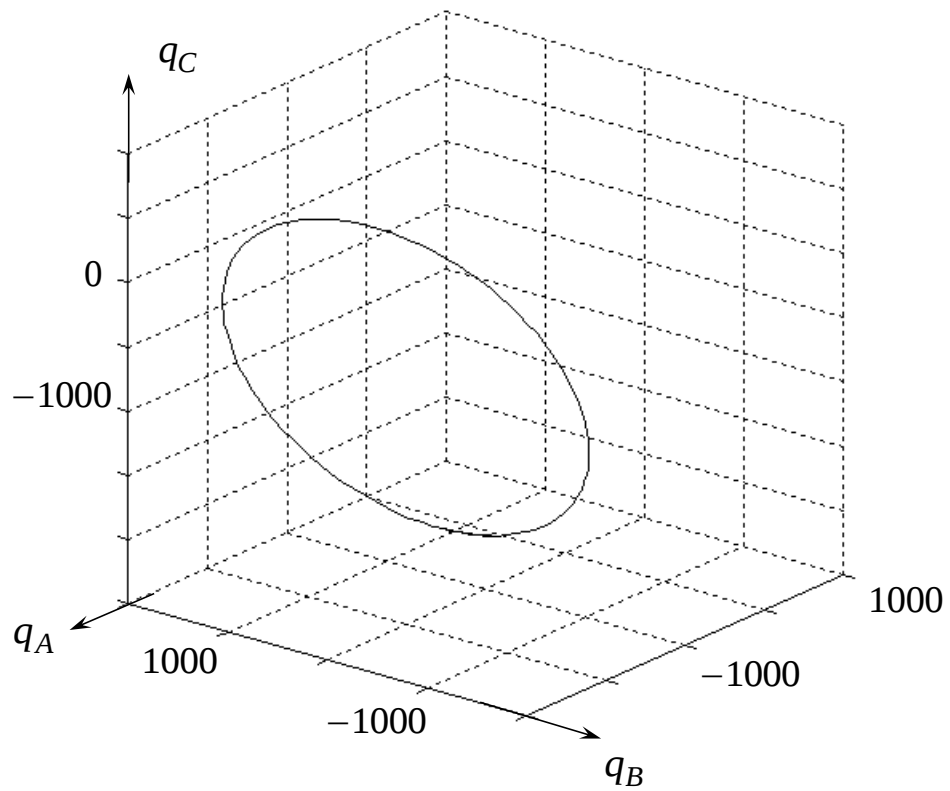


Рисунок 3.9 – Вещественные коэффициенты $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ в трехмерном подпространстве $\mathbf{H}$, образованном $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$

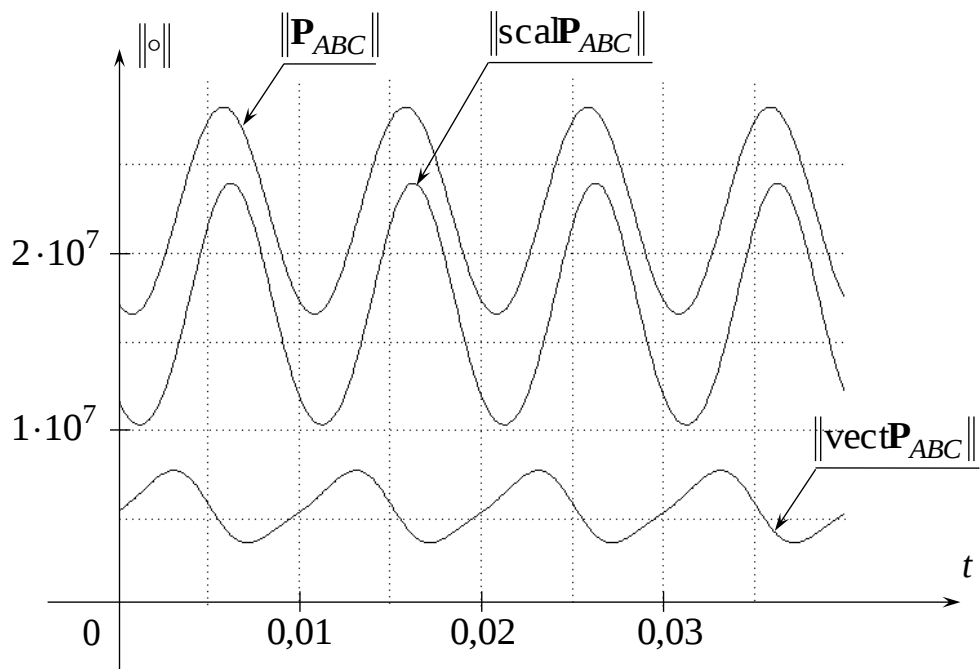


Рисунок 3.10 – Временные зависимости норм кватерниона мгновенной мощности, а также его скалярной и векторной частей

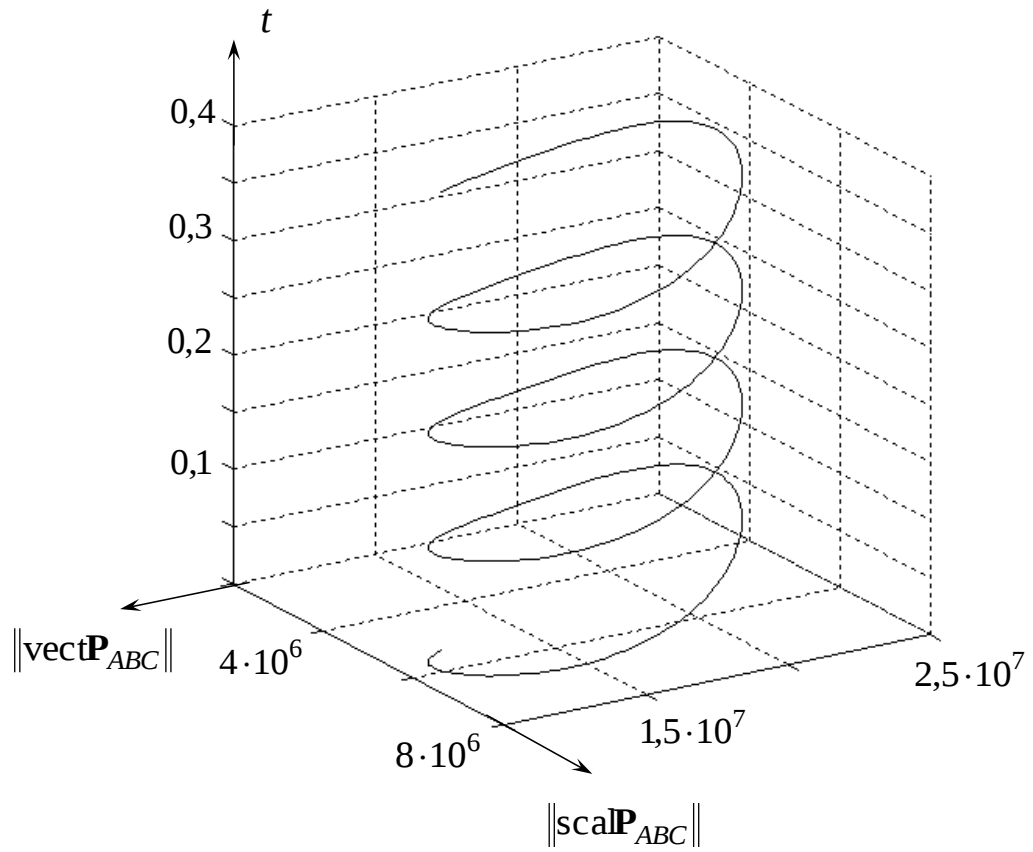


Рисунок 3.11 – Траектория движения изображающей точки, описывающей временное изменение норм скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

3.3 Анализ уравнения баланса мгновенных мощностей нелинейной трехфазной нагрузки произвольного вида в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$

3.3.1 Кватернион мгновенной мощности трехфазной системы с изолированной средней точкой

Далее, получим уравнения связи между $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$ и $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ применительно к произвольной нелинейной несимметричной трехфазной нагрузке без нулевого провода, которая подключена к источнику бесконечной мощности с симметричной системой напряжений вида (3.1). В этом случае простыми вычислениями можно убедиться, что [185]

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B = -(u_A + u_C) i_C + u_C (i_A + i_C) = q_B,$$

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B = -u_B (i_A - i_B) + (u_A + u_B) i_B = q_C,$$

откуда [64]

$$q_A = q_B = q_C = q_{ABC}, \quad (3.48)$$

где q_{ABC} – скалярная величина, связанная с нормой мнимой части как [63, 177]

$$\|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\| = 3q_{ABC}^2.$$

Далее выразим действительную составляющую через вещественные коэффициенты $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$, предварительно выполнив ряд промежуточных преобразований

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = (u_B + u_C) i_A - u_B i_B - u_C i_C + (-u_B i_B - u_C i_C + u_B i_B + u_C i_C),$$

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = (i_A + i_B) u_B + (i_A + i_C) u_C - 2(u_B i_B + u_C i_C) = -2(u_B i_B + u_C i_C) - u_B i_C - u_C i_B,$$

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -2(u_B i_B + u_C i_C) - u_B i_C - u_C i_B + 2(u_A i_A - u_A i_A) + (u_B i_C - u_B i_C),$$

откуда окончательно получаем

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = q_A + 2(u_C i_B - u_A i_A) = 2(u_B i_C - u_A i_A) - q_A,$$

или по аналогии

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = q_B + 2(u_A i_C - u_B i_B) = 2(u_C i_A - u_B i_B) - q_B,$$

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = q_C + 2(u_B i_A - u_C i_C) = 2(u_A i_B - u_C i_C) - q_C.$$

Следствием из последних трех соотношений является равенство

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = 3q_{ABC} + 2(u_A i_C + u_B i_A + u_C i_B) = 2(u_A i_B + u_B i_C + u_C i_A) - 3q_{ABC},$$

на основании которого при чисто активной нагрузке с учетом (3.5) также становится справедливым

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = 2(u_A i_C + u_B i_A + u_C i_B) = 2(u_A i_B + u_B i_C + u_C i_A).$$

Если буквенные обозначения фаз представить по аналогии с последовательностью нижних индексов k, l, m в правилах умножения единиц кватернионов (1.17), то уравнение связи между вещественной и мнимой частями $\mathbf{P}_{ABC}$ примет следующий вид [63, 64]

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -\varepsilon_{klm} \circ q_k + 2(u_l i_m - u_k i_k).$$

Полученные выражения можно использовать на практике с целью минимизации вычислительного процесса выработки компенсационных воздействий в случае выполнения условия симметрии (1.2).

В целях упрощения исходного математического описания трехфазной системы в Q -базисе при линейной зависимости напряжений и токов осуществим ортогональное преобразование Е. Clarke по аналогии с уравнениями электрического равновесия статора и ротора асинхронной машины из раздела 1.7 в соответствии со следующей формулой:

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta o} = \Lambda_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{X}_{ABC} \circ \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} = x_\alpha \circ \mathbf{q}_1 + x_\beta \circ \mathbf{q}_2 + 0 \circ \mathbf{q}_3, \quad (3.49)$$

где $\Lambda_{\alpha\beta o}$ – нормированный кватернион перехода к координатам α, β, o с кинематическими параметрами Родрига-Гамильтона вида (1.105),

в результате чего уравнение баланса мгновенных мощностей (3.2) принимает следующий вид

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta o} = \mathbf{U}_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta o} = \text{scal}\mathbf{P}_{\alpha\beta o} + q_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{q}_3, \quad (3.50)$$

где $q_{\alpha\beta o}$ – вещественный коэффициент при мнимой единице $\mathbf{q}_3$, численно равный $q_{\alpha\beta}$ и q_o из исходной и расширенной $p-q$ теорий активной и реактивной мгновенных мощностей соответственно.

При этом также необходимо отметить, что данная математическая операция является изоморфной по отношению к скалярным величинам, в результате чего становятся справедливыми следующие равенства [63]

$$\text{scal}\mathbf{P}_{\alpha\beta o} = \text{scal}\mathbf{P}_{ABC}, \quad q_{\alpha\beta o} = \sqrt{3}q_{ABC},$$

что позволяет выполнять дальнейший анализ процесса потребления электрической энергии переменного тока в трехпроводной нагрузке с напряжениями вида (3.1) в исходном базисе без использования дополнительного преобразования координат состояния.

3.3.2 Кватернион мгновенной мощности трехфазной системы с нулевым проводом

В данном разделе будет выполнено аналитическое исследование $\mathbf{P}_{ABC}$ в наиболее общем случае, при котором все трехфазные переменные представляют собой сложные нелинейные функции произвольного вида, для которых справедливо неравенство (1.4). Воспользовавшись результатами гармонического разложения напряжений и токов, представленными в приложении Б, постоянная и переменная составляющие скалярной части кватерниона мгновенной мощности описываются следующими соотношениями

$$\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} = -\sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+}I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-}I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \quad (3.51)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0}I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}).$$

$$\begin{aligned} \text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC} = & -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+}I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-}I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}).
\end{aligned}$$

При этом также необходимо отметить, что в силу инвариантности скалярных величин после линейного ортогонального преобразования Е. Clarke вида (1.10) справедливо равенство

$$\text{scal} \mathbf{P}_{ABC} = -(p_{\alpha\beta} + p_o),$$

связывающее между собой скалярную часть $\mathbf{P}_{ABC}$ и мгновенные мощности из исходной $p-q$ теории, которое проверяется простыми вычислениями с использованием формул (2.39) и (2.40).

По аналогии с вышеизложенным подходом, воспользовавшись представлением вещественного коэффициента q_A мнимой части $\mathbf{P}_{ABC}$ в виде прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз для n гармоник фазных переменных, которые приведены в приложении Б, постоянная и переменная составляющие при $\mathbf{q}_1$ находятся как

$$\bar{q}_A = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 120^\circ),
\end{aligned}$$

или с учетом тригонометрической формулы (2.38)

$$\begin{aligned}
\bar{q}_A = & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in0}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in-}).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

В свою очередь элементы гармонического разложения q_A в функции различных угловых частот имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_A = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 120^\circ),
\end{aligned}$$

откуда при использовании (2.38) окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_A = & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right) -
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+}).
\end{aligned}$$

Далее, выполняя объединение всех членов гармонического разложения q_B , приведенного в приложении Б, применительно к постоянной составляющей, получаем

$$\begin{aligned}
\bar{q}_B = & \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 120^\circ),
\end{aligned}$$

или с учетом тригонометрической формулы

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3.55)$$

данная скалярная переменная окончательно принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
\bar{q}_B = & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 60^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 60^\circ).
\end{aligned} \quad (3.56)$$

В свою очередь переменная составляющая вещественного коэффициента q_B включает в себя следующие члены

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_B = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 120^\circ),
\end{aligned}$$

в результате чего воспользовавшись формулой (3.55) получаем следующие тригонометрические зависимости данной компоненты вещественного коэффициента

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_B = & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 60^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 60^\circ) \right) +
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 60^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 60^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 60^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 60^\circ).
\end{aligned}$$

В соответствии с аналитическими выражениями из приложения Б, постоянная составляющая вещественного коэффициента q_C удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}
\bar{q}_C = & \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 120^\circ) -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 120^\circ),$$

или окончательно при использовании тригонометрических формул (2.38) и (3.55)

$$\begin{aligned} \bar{q}_C = & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 60^\circ) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 60^\circ). \end{aligned} \quad (3.58)$$

По аналогии выполняя необходимые математические действия, переменная составляющая q_C находится как

$$\begin{aligned} \tilde{q}_C = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 120^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 120^\circ) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 120^\circ) -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

или после преобразования соответствующих гармонических составляющих при использовании (3.55)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_C = & -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 60^\circ) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 60^\circ) \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 60^\circ) \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{r0} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 60^\circ) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 60^\circ) \right) + \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 60^\circ) \right) - \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 60^\circ) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n-} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n+} I_{n0} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 60^\circ) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 60^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} U_{n0} I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 60^\circ).
\end{aligned}$$

В целях проверки правильности полученных аналитических выражений для расчета векторной части кватерниона мгновенной мощности, осуществим преобразование q_A, q_B, q_C к координатам состояния α, β, γ при помощи кинематических параметров Родрига-Гамильтона с численными значениями (1.105), на основании которого становится справедливым

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_A + q_B + q_C) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(i_A(u_B - u_C) + i_B(u_C - u_A) + i_C(u_A - u_B)).$$

Как нетрудно заметить, правая часть последнего равенства совпадает со скалярной величиной $q_{\alpha\beta}$ вида (2.97) из исходной $p-q$ теории, в результате чего при использовании тригонометрической формулы [44, 116]

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3.60)$$

применительно к постоянным составляющим векторной части $\mathbf{P}_{ABC}$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{q}_A + \bar{q}_B + \bar{q}_C) = \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-} I_{n-} \sin(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+} I_{n+} \sin(\phi_{un+} - \phi_{in+}),$$

т.е. последняя сумма полностью совпадает с соответствующим членом $\bar{q}_{\alpha\beta}$ из правой части (2.41).

По аналогии, определим сумму членов гармонического разложения $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ в функции различных угловых частот, которая на основании формулы (3.60) находится как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}(\tilde{q}_A + \tilde{q}_B + \tilde{q}_C) = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-}I_{r-} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+}I_{r+} \sin((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n-}I_{r+} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right) - \\ & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} 3U_{n+}I_{r-} \sin((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n-}I_{n+} \sin(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} 3U_{n+}I_{n-} \sin(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-}) \end{aligned}$$

и имеет такой же вид, что и $\tilde{q}_{\alpha\beta}$ в (2.41).

При этом необходимо отметить, что помимо вышеперечисленных достоинств алгебры кватернионов, последняя также позволяет в уравнении баланса мощностей отдельно выделять вещественную и мнимую составляющие, создавая таким образом теоретические основы к построению силовых преобразовательных устройств компенсации для коррекции искажений и симметрирования по мгновенным значениям трехфазных переменных при несбалансированной и/или нелинейной нагрузке.

3.4 Баланс мгновенных мощностей и электромагнитный момент асинхронного двигателя в кватернионном базисе

В целях дополнения представленных в разделе 1.7 математических моделей асинхронной машины в Q -базисе, далее получим формулу для расчета мгновенной мощности при помощи умножения справа всех членов дифференциальных уравнений электрического равновесия статора и ротора вида (1.109) на соответствующий кватернион тока $\mathbf{I}_{dqo}^i$

$$\mathbf{U}_{dqo}^i \circ \mathbf{I}_{dqo}^i = R_i \mathbf{I}_{dqo}^i \circ \mathbf{I}_{dqo}^i + \frac{d\Psi_{dqo}^i}{dt} \circ \mathbf{I}_{dqo}^i + \dot{\Theta}_3^i \circ \text{vect}(\Psi_{dqo}^i \circ \mathbf{q}_3) \circ \mathbf{I}_{dqo}^i,$$

в результате чего, на основании формальной аналогии, составляющая в функции угловой скорости вращения плоскости $\dot{\Theta}_3^i$ относительно третьей мнимой единицы $\mathbf{q}_3$ отвечает за активную мощность на валу [68, 80], откуда становится справедливым следующее аналитическое выражение для вычисления кватерниона электромагнитного момента

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{\omega} \left(\dot{\Theta}_3^s \circ \text{vect}(\Psi_{dqo}^s \circ \mathbf{q}_3) \circ \mathbf{I}_{dqo}^s + \dot{\Theta}_3^r \circ \text{vect}(\Psi_{dqo}^r \circ \mathbf{q}_3) \circ \mathbf{I}_{dqo}^r \right),$$

где ω – угловая скорость ротора.

Выбирая различные численные значения производных угла поворота статора $\dot{\Theta}_3^s$ и ротора $\dot{\Theta}_3^r$ электрической машины относительно $\mathbf{q}_3$, которые связаны между собой на основании равенства [69]

$$\dot{\Theta}_3^r = \dot{\Theta}_3^s - z_p \omega, \quad (3.61)$$

здесь z_p – число пар полюсов,

можно получить соответствующие формулы для определения $\mathbf{M}_e$. Так, например, при выполнении условия $\dot{\Theta}_3^s = 0$, при котором координаты состояния d, q, o вырождаются в α, β, o , получаем

$$\mathbf{M}_e = -z_p \circ \text{vect}(\Psi_{\alpha\beta o}^r \circ \mathbf{q}_3) \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta o}^r,$$

$$\mathbf{M}_e = z_p \left((\psi_{\beta}^r i_{\alpha}^r - \psi_{\alpha}^r i_{\beta}^r) \circ 1 + \psi_{\alpha}^r i_o^r \circ \mathbf{q}_1 + \psi_{\beta}^r i_o^r \circ \mathbf{q}_2 - (\psi_{\alpha}^r i_{\alpha}^r + \psi_{\beta}^r i_{\beta}^r) \circ \mathbf{q}_3 \right), \quad (3.62)$$

а при $\dot{\Theta}_3^r = 0$

$$\mathbf{M}_e = z_p \circ \text{vect}(\Psi_{dqo}^s \circ \mathbf{q}_3) \circ \mathbf{I}_{dqo}^s,$$

или в развернутом виде

$$\mathbf{M}_e = z_p \left((\psi_d^s i_q^s - \psi_q^s i_d^s) \circ 1 - \psi_d^s i_o^s \circ \mathbf{q}_1 - \psi_q^s i_o^s \circ \mathbf{q}_2 + (\psi_d^s i_d^s + \psi_q^s i_q^s) \circ \mathbf{q}_3 \right). \quad (3.63)$$

Как видно из последних соотношений, абсолютное значение $\text{scal} \mathbf{M}_e$ полностью совпадает с классическими выражениями для расчета электромагнитного момента асинхронной машины в двигательном режиме работы [84], однако при этом имеет обратный знак в соответствии с правилами произведения мнимых единиц (1.17).

В свою очередь при использовании аддитивного базиса из матриц Паули, кватернионы мгновенной мощности фазных обмоток статора и ротора получают-ся после умножения справа всех частей соответствующих уравнений электриче-ского равновесия (1.113) на $\mathbf{I}_{qod}^i$, в которых за процесс электромеханического преобразования энергии отвечают последние два слагаемых, в результате чего становится справедливым

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{\omega} \left(\dot{\Theta}_2^s (\psi_q^s (-j\mathbf{S}_3) - \psi_d^s (-j\mathbf{S}_1)) \cdot \mathbf{I}_{qod}^s + \dot{\Theta}_2^r (\psi_q^r (-j\mathbf{S}_3) - \psi_d^r (-j\mathbf{S}_1)) \cdot \mathbf{I}_{qod}^r \right),$$

или при выборе различных угловых скоростей с учетом формулы (3.61)

$$\mathbf{M}_e = z_p (\lambda_0^s \mathbf{I} - \lambda_1^s j\mathbf{S}_1 - \lambda_2^s j\mathbf{S}_2 - \lambda_3^s j\mathbf{S}_3) = -z_p (\lambda_0^r \mathbf{I} - \lambda_1^r j\mathbf{S}_1 - \lambda_2^r j\mathbf{S}_2 - \lambda_3^r j\mathbf{S}_3),$$

где вещественные коэффициенты в соответствии со структурой векторов $\mathbf{X}_{\beta o \alpha}^i$ и $\mathbf{X}_{qod}^i$ из раздела 1.7.2 подчиняются следующим аналитическим зависимостям

$$\lambda_0^s = \psi_d^s i_q^s - \psi_q^s i_d^s, \quad \lambda_0^r = \psi_{\beta}^r i_{\alpha}^r - \psi_{\alpha}^r i_{\beta}^r,$$

$$\lambda_1^s = -\psi_q^s i_o^s, \quad \lambda_1^r = \psi_{\beta}^r i_o^r,$$

$$\lambda_2^s = \psi_d^s i_d^s + \psi_q^s i_q^s, \quad \lambda_2^r = -\psi_{\alpha}^r i_{\alpha}^r - \psi_{\beta}^r i_{\beta}^r,$$

$$\lambda_3^s = -\psi_d^s i_o^s, \quad \lambda_3^r = \psi_{\alpha}^r i_o^r.$$

Последние формулы полностью совпадают с (3.62) и (3.63), а отличие в нижних индексах λ_j^i объясняется изменением порядкового номера мнимых единиц при начальном расположении фазных переменных вида (1.112)

По аналогии с вышеизложенным, далее получим формулу для расчета $\mathbf{M}_e$ асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором в рамках математической модели, которая традиционно применяется при синтезе систем векторного управления частотой вращения и не содержит в себе токи ротора, не поддающиеся прямому измерению, а также потокосцепления статора [69]. При общепринятых допущениях и соединении фазных обмоток неподвижной части “в звезду”, которые подключены к источнику с симметричной системой напряжений вида (3.1), уравнения электрического равновесия в обобщенной системе координат имеют следующий вид [68, 80]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}}_s = \frac{1}{L'_s} \left(\mathbf{U}_s - R_s \mathbf{I}_s - \frac{L_m}{L_r} \dot{\Psi}_r - \omega_k \mathbf{D} \left(L'_s \mathbf{I}_s + \frac{L_m}{L_r} \Psi_r \right) \right), \\ \dot{\Psi}_r = \frac{1}{T_r} (L_m \mathbf{I}_s - \Psi_r) - (\omega_k - z_p \omega) \mathbf{D} \Psi_r, \end{cases} \quad (3.64)$$

где $\mathbf{U}_s, \mathbf{I}_s, \Psi_r$ – двумерные алгебраические векторы напряжений, токов и потокосцеплений; ω_k – угловая скорость вращения плоскости поперечного сечения электрической машины относительно вала; L_m – эквивалентная взаимная индуктивность; L_r – эквивалентная индуктивность, вызванная полным магнитным потоком, сцепленным с фазной обмоткой ротора; $T_r = L_r R_r^{-1}$ – электромагнитная постоянная времени роторной цепи; L'_s – переходная индуктивность статора [42]

$$L'_s = L_s - \frac{L_m^2}{L_r},$$

в которой в качестве L_s выступает эквивалентная индуктивность, вызванная полным магнитным потоком, сцепленным с фазной обмоткой статора; $\mathbf{D}$ – ортогональная кососимметрическая матрица поворота вектора на электрический угол $\pi/2$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая тот факт, что в неподвижной части асинхронного двигателя отсутствует цепь протекания токов нулевой составляющей, то далее представим фазные переменные в форме чисто векторного кватерниона вида (3.49), в результате чего система уравнений (3.64) примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s}{dt} = \frac{1}{L_s'} \left(\mathbf{U}_{\alpha\beta}^s - R_s \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s - \frac{L_m}{L_r} \frac{d\mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r}{dt} - \omega_k \mathbf{q}_3 \circ \left(L_s' \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s + \frac{L_m}{L_r} \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r \right) \right), \\ \frac{d\mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r}{dt} = \frac{1}{T_r} \left(L_m \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s - \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r \right) - (\omega_k - z_p \omega) \circ \mathbf{q}_3 \circ \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r, \end{cases} \quad (3.65)$$

где $\mathbf{U}_{\alpha\beta}^s, \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s, \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r$ – векторные кватернионы напряжений и токов статора, а также потокосцеплений ротора соответственно.

Для получения формулы баланса мгновенных мощностей в двумерном подпространстве $\mathbf{H}$, образованном $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, первоначально выполним подстановку второго уравнения (3.65) в первое с последующим умножением справа на $\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s$, в результате чего получаем

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}^s = \left(R_s + \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r \right) \|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s\| + L_s' \left(\frac{d\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s}{dt} + \omega_k \mathbf{q}_3 - \frac{L_m}{T_r L_r} \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r \right) \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s + z_p \omega \frac{L_m}{L_r} \mathbf{q}_3 \circ \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s.$$

На основании формальной аналогии с аналогичным уравнением в векторно-матричной форме записи можно заключить, что [69]:

- чисто скалярная величина в функции $\|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s\|$ однозначно определяет тепловые потери, выделяемые на активных сопротивлениях фазных обмоток электрической машины;
- второе слагаемое связано с изменением запаса электромагнитной энергии;
- составляющая в функции угловой скорости ω отвечает за преобразуемую на валу мощность, откуда

$$\mathbf{M}_e = z_p \frac{L_m}{L_r} \mathbf{q}_3 \circ \mathbf{\Psi}_{\alpha\beta}^r \circ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s = z_p \frac{L_m}{L_r} \left((\psi_{\beta}^r i_{\alpha}^r - \psi_{\alpha}^r i_{\beta}^r) \circ 1 - (\psi_{\alpha}^r i_{\alpha}^r + \psi_{\beta}^r i_{\beta}^r) \circ \mathbf{q}_3 \right),$$

которое полностью совпадает с формулой (3.62) при исключении нулевых компонент.

В заключении также необходимо отметить, что в силу использования только нормированных кватернионов преобразования с соблюдением условия (1.35), в формулах для нахождения $\mathbf{M}_e$ отсутствует согласующий коэффициент, который, как правило, присутствует в векторно-матричных математических моделях электрических машин переменного тока [69].

3.5 Заключение

На основании представленных в данной главе теоретических результатов аналитического исследования уравнения баланса мгновенных мощностей трехфазных нагрузок произвольного вида, в том числе и с нелинейными элементами, которое выполнено в рамках некоммутативных правил произведения четырехмерных гиперкомплексных чисел, можно сделать следующие выводы:

1. Кватернионный подход, в отличие от классических методов расчета линейных электрических цепей переменного тока, позволяет выполнять анализ режимов работы трехфазных систем произвольного вида по мгновенным значениям, а не по среднеквадратичным величинам в установившемся процессе.
2. Практическое использование Q -базиса позволяет описать процесс энергопотребления в рамках единого математического аппарата без привлечения, например, элементов аналитической геометрии или матричного исчисления, что в конечном итоге позволяет устранить ряд теоретических противоречий современных теорий мгновенной мощности, вызванных, например, отсутствием строго определения векторного произведения применительно к матрицам-столбцам [121].
3. Разделение уравнения баланса мгновенных мощностей (3.2) на вещественную и мнимую части дает наглядную интерпретацию потоков электрической

энергии в единицу времени, выделяя в них “полезную” и неэффективную (подлежащую компенсации) составляющие.

4. Наличие реактивных элементов вызывает появление среднего значения в $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$, которое является аналогом классической реактивной мощности сдвига при переходе к действующим величинам и непосредственно определяется из результата произведения кватернионов без дополнительного интегрирования квадратичных зависимостей переменных.

5. Отличие в параметрах любой из фаз по отношению к двум другим будет приводить к уменьшению абсолютного значения эталонной константы $\bar{P}_{ABC}$ вида (3.4), отвечающей за полезную активную мощность преобразования на стороне нагрузки, с одновременным появлением $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$.

6. При асимметрии или нелинейности энергопотребителя в скалярной и векторной частях $\mathbf{P}_{ABC}$ одновременно возникают периодические колебания, которые носят мультигармонический характер с интервалом повторения, равным периоду питающего напряжения.

7. При подключении трехфазной нагрузки с изолированной средней точкой к источнику с симметричной системой напряжений (3.1), вещественные коэффициенты мнимой составляющей кватерниона мгновенной мощности равны друг другу, в результате чего при использовании модуля $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ представляется возможным описать во времени энергетические процессы при помощи только скалярных величин и таким образом существенно упростить процедуру синтеза алгоритмов активной фильтрации.

4 МЕТОДЫ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ КОМПЕНСАЦИИ НЕАКТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ

4.1 Силовые полупроводниковые устройства активной фильтрации

Прежде чем непосредственно перейти к аналитической процедуре определения компенсационных воздействий на основе современных теорий мгновенной мощности и алгебры кватернионов, которые предназначены для исключения из общего потока электрической энергии в единицу времени различного рода неактивных составляющих, первоначально рассмотрим классификационные признаки и структурные принципы построения АСФ.

4.1.1 Общие принципы построения активных силовых фильтров

Все многообразие силовых полупроводниковых устройств активной фильтрации можно условно разделить на две обширные группы, а именно однофазные и трехфазные АСФ, причем в последнем случае также различают трехпроводное или четырехпроводное исполнения [159]. В свою очередь в зависимости от конкретного выбора компенсационных воздействий в форме токов или напряжений различают параллельные (shunt active power filter) и последовательные (series active power filter) АСФ [1, 31, 90, 119, 124, 125, 134, 198], а также их последовательно-параллельную комбинацию, которая при ее дополнении аккумуляторными батареями в зарубежных литературных источниках получила название Unified power quality conditioner [100, 103, 122, 131, 172, 173, 197]. В качестве графической иллюстрации данного классификационного признака, на рисунках 4.1–4.3 изображены упрощенные функциональные схемы данных типов технических средств энергосбережения [60, 120].

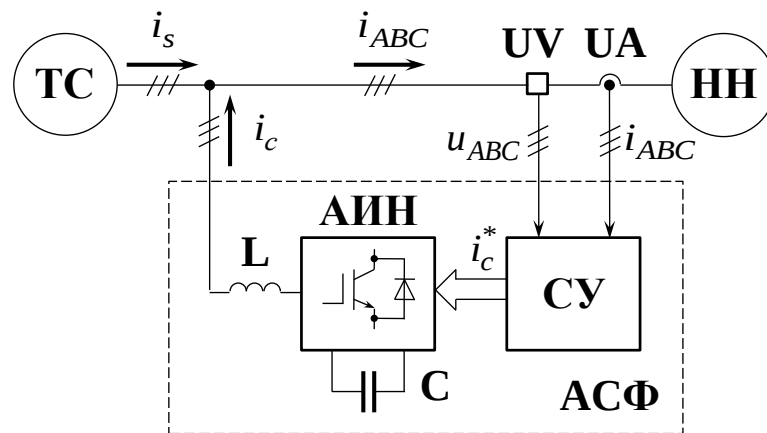


Рисунок 4.1 – Упрощенная функциональная схема
параллельного АСФ

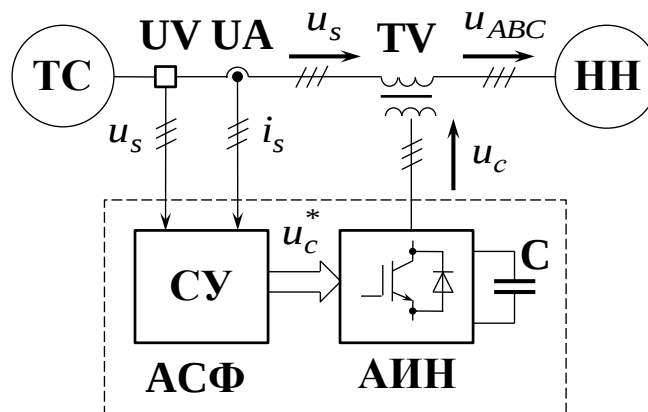


Рисунок 4.2 – Упрощенная функциональная схема
последовательного АСФ

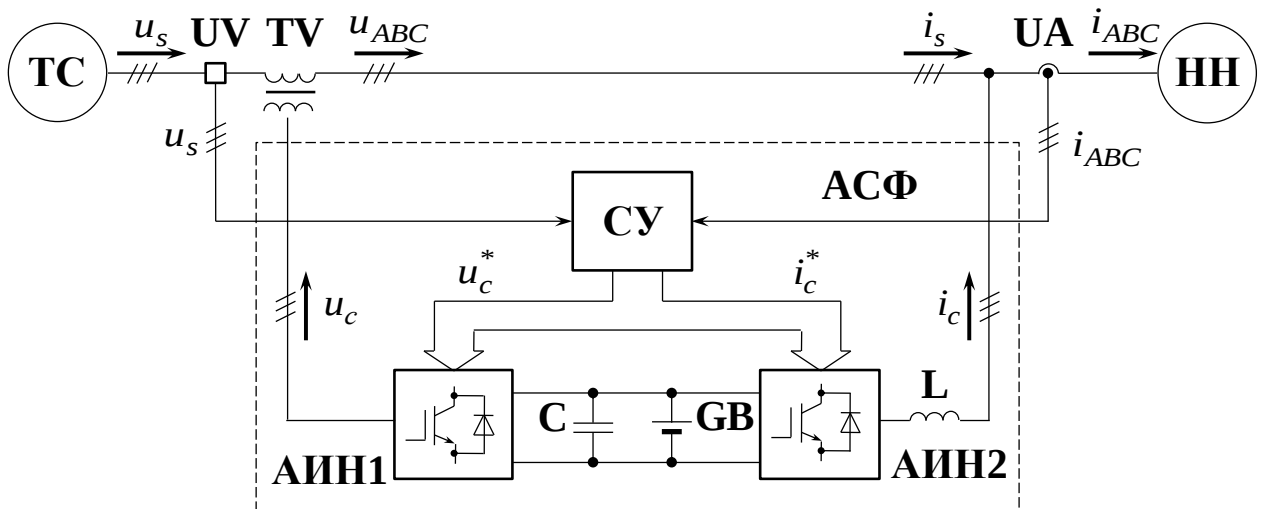


Рисунок 4.3 – Упрощенная функциональная схема последовательно-параллельного АСФ

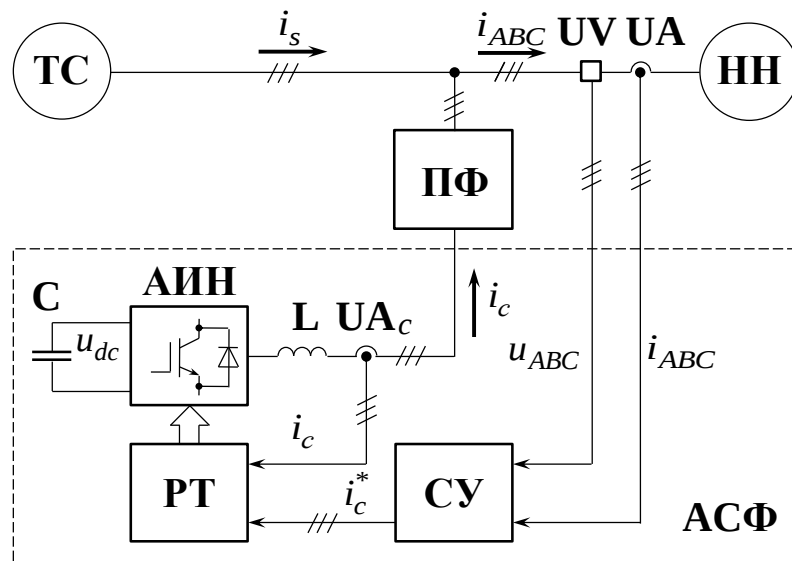


Рисунок 4.4 – Функциональная схема трехфазной системы с параллельным АСФ

На рисунках 4.1–4.3 используются следующие обозначения: **СУ** – система управления, осуществляющая выработку задающих воздействий i_c^* или u_c^* на основании текущей информации с датчиков тока **UA** и напряжения **UV**; **АИН** – автономный инвертор напряжения (АИН) с частотой коммутации полупроводниковых приборов не менее 10 кГц [127, 158]; **С** – конденсаторная батарея; **GB** – аккумулятор; **TV** – согласующий трансформатор; **L** – индуктивный дроссель.

Как показывает многолетний опыт применения силовых преобразовательных устройств активной фильтрации при решении прикладных задач повышения энергоэффективности трехфазных систем различного назначения [125], параллельный способ подключения АСФ относительно нагрузки получил более широкое распространение на практике, чем последовательный, в связи с чем остановимся на более подробном рассмотрении организации структуры формирования токовой компенсации. Как видно из рисунка 4.4, управляющая часть **СУ** вырабатывает задающие воздействия i_c^* , которые в дальнейшем поступают на вход трехканального непрерывного или дискретного регулятора **РТ**, выбор параметров которого осуществляется из условия настройки на полосу пропускания контура регулирования i_c в замкнутом состоянии не менее 1 кГц [127].

Выходной дроссель **L**, выступающий в качестве нагрузки **АИН**, предназначен для снижения пульсаций выходных токов с одновременным ограничением производных i_c при коммутации полупроводниковых ключей [132, 158], период переключения которых должен быть более чем на порядок меньше, чем аналогичный временной интервал наивысшей компенсируемой гармоники [131]. В свою очередь конденсаторная батарея **С** осуществляет поддержание на постоянном уровне напряжения u_{dc} с низким уровнем пульсаций в установившихся процессах, а также выступает в качестве реактивного накопителя электрической энергии при компенсации переменной составляющей мгновенной мощности [185, 204]. В соответствии с функциональным назначением каждого из элементов си-

ловой цепи АСФ, величина индуктивности L определяется на основании формулы [188]

$$L = \frac{u_{dc}^*}{4 f_0 \Delta i_{mc}^{\max}},$$

где f_0 – частота коммутации IGBT-модулей АИН; $\Delta i_{mc}^{\max}$ – максимально-допустимая амплитуда пульсаций выходных токов АСФ; u_{dc}^* – желаемое значение напряжения звена постоянного тока, выбираемое из интервального требования [164]

$$u_{dc}^* = (\sqrt{3} \dots 2) \cdot u_m,$$

а суммарная емкость конденсаторной батареи находится как [120]

$$C = \frac{p_c}{\omega \cdot \Delta u_{dc}^{\max} u_{dc}^*},$$

где p_c – активная мгновенная мощность компенсации; $\Delta u_{dc}^{\max}$ – максимально-допустимое отклонение текущего напряжения от $u_{dc}^* = \text{const}$.

По причине наличия в выходных сигналах АСФ широкого спектра высокочастотных гармоник вследствие дискретного характера работы АИН, между выходной индуктивностью L и трехфазной сетью может дополнительно устанавливаться пассивный фильтр ПФ, например, в виде корректирующей RC-цепи [131] или резонансного LCL-контура третьего порядка [90], который предназначен для снижения амплитуды пульсаций i_c от действия ШИМ [183].

Силовая часть АСФ может быть также построена по схеме автономного инвертора тока с индуктивным реактором [159], однако, в виду высокой стоимости и больших массогабаритных показателей в настоящее время практически не используется [127]. При этом, как отмечено в [131, 134], наилучшим вариантом выбора места подключения преобразовательного устройства активной фильтрации является его установка в непосредственной близости от потребителя, что позволяет более эффективно и оперативно отрабатывать различного рода сигналь-

ные и параметрические возмущения, а также существенно снизить стоимость полупроводниковых приборов за счет уменьшения амплитудных значений i_c .

В заключении также необходимо отметить, что последовательные АСФ помимо своей основной функции, заключающейся в фильтрации высокочастотных помех питающего напряжения, также предназначены для исключения влияния нелинейной нагрузки на качество процессов передачи и распределения электрической энергии переменного тока [172].

4.1.2 Математическая модель силовой части активного силового фильтра

Прежде чем непосредственно перейти к решению задачи синтеза алгоритмов активной фильтрации, первоначально рассмотрим вопросы математического описания электромагнитных процессов в силовой части АСФ, включающей в себя АИН с IGBT-модулями и емкостным фильтром С звена постоянного тока, что иллюстрирует рисунок 4.5.

Учет дискретности формирования выходных напряжений u_{cA}, u_{cB}, u_{cC} выполним в рамках стационарной математической модели с идеальными полупроводниковыми ключами, которая описывается следующей нелинейной системой алгебраических уравнений [25]

$$u_{cA} = f_A u_{dc}, \quad u_{cB} = f_B u_{dc}, \quad u_{cC} = f_C u_{dc}, \quad (4.1)$$

где f_A, f_B, f_C – нелинейные функции переключения, численно равные $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$ или 0, подчиняющиеся равенствам [207]

$$f_A = \frac{2g_A - (g_B + g_C)}{3}, \quad f_B = \frac{2g_B - (g_A + g_C)}{3}, \quad f_C = \frac{2g_C - (g_A + g_B)}{3},$$

здесь g_A, g_B, g_C – выходы управляющего устройства УУ, принимающие фиксированные значения 1 или 0 в зависимости от нахождения в проводящем состоянии верхнего или нижнего полупроводникового ключа соответствующей стойки.

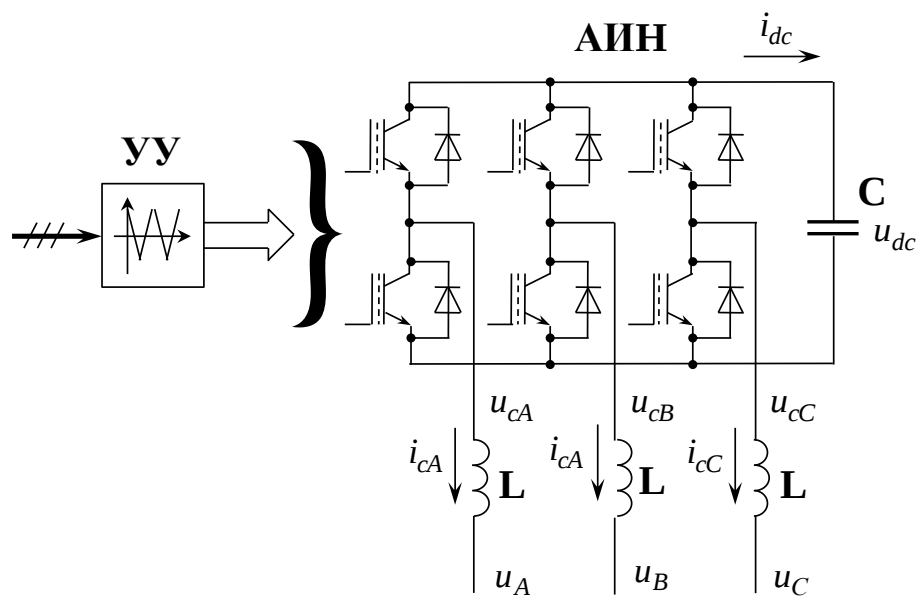


Рисунок 4.5 – Упрощенная функциональная схема силовой части АСФ

В свою очередь для получения аналитического выражения, связывающего между собой ток силового конденсатора i_{dc} и компенсационные воздействия i_{cA}, i_{cB}, i_{cC} , воспользуемся уравнением баланса мгновенных мощностей

$$u_{dc}i_{dc} = u_{cA}i_{cA} + u_{cB}i_{cB} + u_{cC}i_{cC},$$

которое после подстановки в правую часть формул (4.1) окончательно преобразуется к виду [57, 175, 178]

$$i_{dc} = f_A i_{cA} + f_B i_{cB} + f_C i_{cC}.$$

Представленные выше расчетные соотношения справедливы в частном случае $u_{dc} = \text{const}$ и $u_A = u_B = u_C = 0$, для учета влияния которых на динамические режимы работы АСФ осуществим переход к следующей системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} L \frac{di_{cA}}{dt} = u_{cA} - u_A - Ri_{cA}, \\ L \frac{di_{cB}}{dt} = u_{cB} - u_B - Ri_{cB}, \\ L \frac{di_{cC}}{dt} = u_{cC} - u_C - Ri_{cC}, \\ C \frac{du_{dc}}{dt} = i_{dc}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где R, L – параметры индуктивного дросселя L .

Далее, представим (4.2) в более компактной векторно-матричной форме с использованием метода пространства состояний [70, 85, 88, 89] при принятии допущения о симметрии трехфазных переменных (1.2), в соответствии с которым

$$i_{dc} = (f_A - f_C)i_{cA} + (f_B - f_C)i_{cB} = (2f_A + f_B)i_{cA} + (2f_B + f_A)i_{cB},$$

в результате чего принимая во внимание (4.1) окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

где $\mathbf{x}$ – трехмерный алгебраический вектор-столбец координат состояния

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [i_{cA} \quad i_{cB} \quad u_{dc}]^T;$$

$\mathbf{u}$ – двумерный алгебраический вектор-столбец внешних воздействий

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T = [u_A \quad u_B]^T;$$

$\mathbf{A}$ – собственная матрица размерностью $\dim \mathbf{A} = 3 \times 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \frac{f_A}{L} \\ 0 & -\frac{R}{L} & \frac{f_B}{L} \\ \frac{2f_A + f_B}{C} & \frac{2f_B + f_A}{C} & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{B}$ – матрица при управлениях размерностью $\dim \mathbf{B} = 3 \times 2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, представленная в данном разделе математическая модель силовой части АСФ при общепринятых допущениях полностью описывает электромагнитные процессы в АИН с емкостным фильтром и может выступать в качестве основы при синтезе алгоритмов управления выходными токами/напряжениями компенсации.

4.1.3 Синтез трехканального контура регулирования токов компенсации

При параллельном подключении АСФ относительно трехфазной нагрузки, силовое полупроводниковое устройство активной фильтрации функционирует в режиме безынерционного источника тока, реализуемого в классе законов разрывного или непрерывного управления, синтез которых выполним при пренебрежении активным сопротивлением выходного дросселя, в результате чего данный реактивный элемент будет описываться только собственной индуктивностью L .

На рисунке 4.6 изображена структурная схема трехканального релейного контура регулирования токов компенсации $\mathbf{I}_c$, работающего в реальном скользя-

щем режиме [85], на котором используются следующие обозначения: **PPT** – релейный регулятор совместно с автономным инвертором и конденсаторной батареей; **ДФ** – дифференцирующий фильтр второго порядка с постоянной времени T_ϕ и коэффициентом демпфирования ξ_ϕ , стабилизирующий частоту переключения выхода **PPT**; **UA** – безынерционный датчик тока с коэффициентом передачи k_i .

Для анализа автоколебательных процессов в нелинейной системе с амплитудой A по задающим воздействиям $\mathbf{I}_c^*$ воспользуемся приближенным методом гармонической линеаризации [91], заменив “идеальное двухпозиционное реле” коэффициентом

$$q(A) = \frac{4u_{dc}}{A\pi},$$

в результате чего передаточная функция контура регулирования токов в замкнутом состоянии находится как

$$W_{\text{крт}}(p) = \frac{q(A)(T_\phi^2 p^2 + 2\xi_\phi T_\phi p + 1)}{Lp(T_\phi^2 p^2 + 2\xi_\phi T_\phi p + 1) + k_i q(A)},$$

где p – оператор дифференцирования.

Далее, осуществляя переход к оператору Фурье $j\omega$ в характеристическом полиноме на основании метода Е. П. Попова выделим вещественную и мнимую части годографа А. В. Михайлова [89]

$$M(j\omega) = P_M(\omega) + jQ_M(\omega),$$

$$M(j\omega) = k_i q(A) - 2\omega^2 \xi_\phi T_\phi L + j\omega L(1 - \omega^2 T_\phi^2),$$

откуда из равенств $Q_M(\omega) = P_M(\omega) = 0$ получаем, что частота переключения релейного регулятора **PPT** как в установившемся, так и в переходном процессах будет однозначно определяться постоянной времени в соответствии со следующим равенством

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi T_\phi},$$

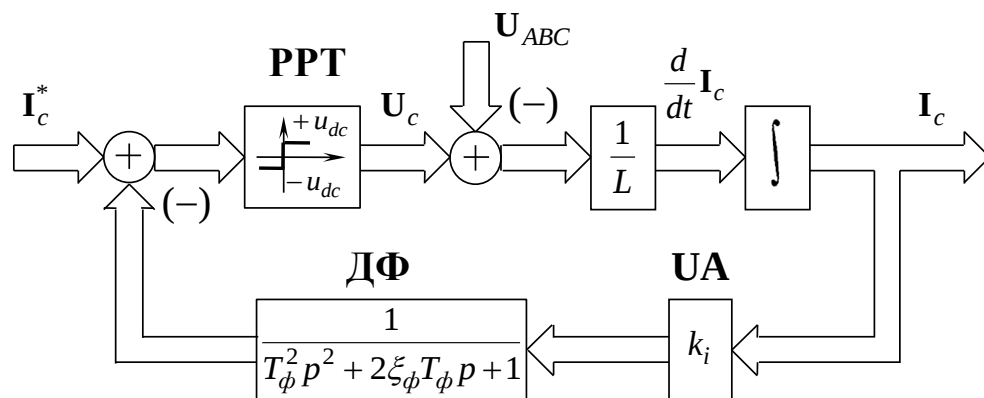


Рисунок 4.6 – Структурная схема трехканального релейного контура регулирования выходных токов АСФ

а амплитуда пульсаций $\mathbf{I}_c$ будет описываться следующей аналитической зависимостью

$$A_0 = \frac{2u_{dc}k_i}{\pi\xi_\phi L} T_\phi = \frac{2u_{dc}k_i}{\pi\xi_\phi L} \Omega_0^{-1} = \frac{u_{dc}k_i}{\pi^2\xi_\phi L} f_0^{-1}.$$

Таким образом, осуществляя выбор T_ϕ из условия заданной частоты коммутации полупроводниковых ключей f_0 можно добиться технической регуляризации реальных скользящих режимов, связанных с отработкой задающих воздействий $\mathbf{I}_c^*$ [85].

Далее, рассмотрим второй вариант построения быстродействующего источника токов в классе непрерывных законов управления, приняв допущение о пренебрежении разрывным характером процессов в АИН, имеющим место при выполнении неравенства [77]

$$\omega_{\text{пн}} \leq \frac{f_0}{2 \dots 3}, \quad (4.3)$$

где $\omega_{\text{пн}}$ – полоса пропускания контура регулирования токов в замкнутом состоянии,

в результате чего динамические характеристики силовой части АСФ описываются пропорциональным звеном с коэффициентом передачи $k_{\text{п}}$, что иллюстрирует рисунок 4.7.

Для обеспечения желаемого качества переходных процессов по выходу $\mathbf{I}_c$ примем в качестве базовой структуры последовательного корректирующего устройства ПИ-регулятор

$$W_{\text{рт}}(p) = k_{\text{рт}} \frac{(T_{\text{рт}}p + 1)}{p}, \quad (4.4)$$

где $k_{\text{рт}}$ – коэффициент передачи интегральной составляющей; $T_{\text{рт}}$ – постоянная времени форсирующего звена первого порядка, откуда передаточная функция контура в замкнутом состоянии

$$W_{\text{крт}}(p) = \frac{k_i^{-1}(T_{\text{рт}}p + 1)}{\frac{L}{k_i k_{\text{рт}} k_{\text{п}}} p^2 + T_{\text{рт}}p + 1} = \frac{k_i^{-1}(T_{\text{рт}}p + 1)}{T_{\text{крт}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{крт}} T_{\text{крт}} p + 1}, \quad (4.5)$$

где $T_{\text{крт}} = \omega_{\text{пн}}^{-1}$ – постоянная времени, отвечающая за время регулирования переходных процессов “в малом”.

В итоге, задаваясь желаемым расположением полюсов (4.5) на комплексной плоскости, одновременно зависящим от $T_{\text{крт}}$ и $\xi_{\text{крт}}$, численные значения параметров **РТ** вычисляются по формулам

$$k_{\text{рт}} = \frac{L}{T_{\text{крт}}^2 k_i k_{\text{п}}}, \quad T_{\text{рт}} = 2\xi_{\text{крт}} T_{\text{крт}}.$$

Помимо вышеописанной процедуры расчета трехканального регулятора токов АСФ, можно также воспользоваться методом синтеза, основанном на построении желаемой ЛАЧХ в разомкнутом состоянии. В этом случае с учетом передаточной функции последовательного корректирующего устройства **РТ** вида (4.4) последняя представляет собой две асимптотические прямые с наклонами -40 дБ/дек и -20 дБ/дек соответственно, сопрягаемые на частоте

$$\omega_{\text{сomp}} = T_{\text{рт}}^{-1},$$

что иллюстрирует рисунок 4.8, из которого следует, что при выполнении неравенства $\omega > \omega_{\text{сomp}}$ динамические свойства контура описываются интегрирующим звеном с частотой среза, равной коэффициенту передачи, т.е.

$$\omega_c = \frac{T_{\text{рт}} k_{\text{рт}} k_i k_{\text{п}}}{L}.$$

В итоге, осуществляя выбор требуемой величины ω_c и разнося точку излома ЛАЧХ влево из условия [9]

$$\omega_{\text{сomp}} = \frac{\omega_c}{a_c}, \quad (4.6)$$

здесь $a_c = 2...3$ – коэффициент разделения частот, который связан параметром $\xi_{\text{крт}}$ из передаточной функции (4.5) как

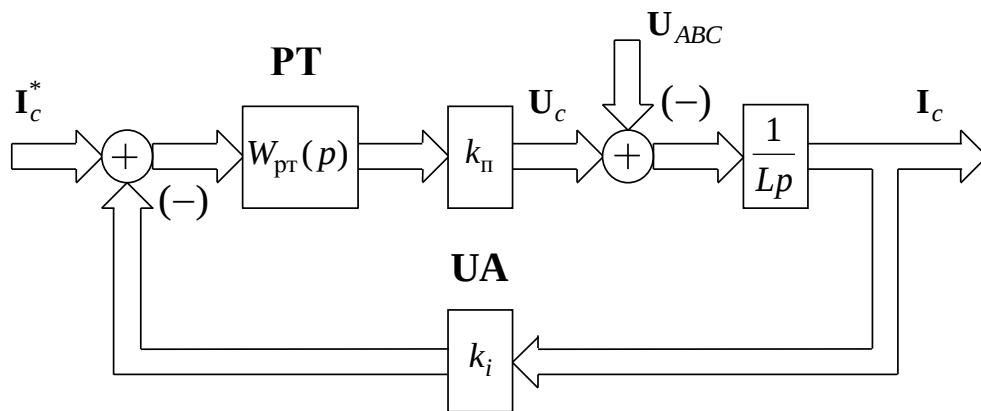


Рисунок 4.7 – Структурная схема непрерывного контура регулирования токов АСФ

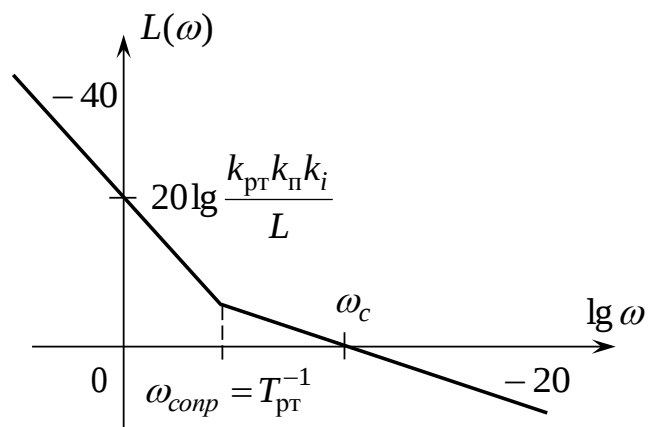


Рисунок 4.8 – Асимптотическая ЛАЧХ контура регулирования токов АСФ в разомкнутом состоянии при ПИ-законе управления

$$\xi_{\text{крт}} = \frac{\sqrt{a_c}}{2},$$

получаем следующие расчетные формулы для определения численных значений параметров ПИ-регулятора тока **РТ**

$$k_{\text{рт}} = \frac{L \omega_c}{T_{\text{рт}} k_i k_{\text{п}}} = \frac{L \omega_c^2}{a_c k_i k_{\text{п}}}, \quad T_{\text{рт}} = \frac{a_c}{\omega_c}, \quad (4.7)$$

в результате чего в замкнутом контуре регулирования будет обеспечиваться желаемое качество переходных процессов по I_c при колебательном характере процессов “в малом”, зависящим от выбора численных значений ω_c и коэффициента в знаменателе (4.6).

В качестве графической иллюстрации представленных выше результатов структурно-параметрического синтеза, на рисунках 4.9–4.11 изображены временные зависимости токов компенсации АСФ с амплитудой $i_m = 15$ А при гармонической форме задающих воздействий I_c^* и соответствующие переходные характеристики, полученные методом цифрового моделирования в программе “MATLAB” R2008b при следующих параметрах силовой части АСФ: частота коммутации полупроводниковых ключей АИН $f_0 = 5$ кГц; индуктивность выходных дросселей 18 мГн; максимальное мгновенное значение симметричной системы напряжений источника вида (3.1) $u_m = \sqrt{2} \cdot 220$ В; напряжение емкостного фильтра $u_{dc} = 2,6u_m$.

Как видно из представленных временных зависимостей, синтезированные разрывные и непрерывные алгоритмы управления выходными токами АИН обеспечивают приемлемое качество процессов, как в статических, так и в динамических режимах работы АСФ. При этом разнесение частот сопряжения $\omega_{\text{сopr}}$ и среза ω_c в два раза по отношению друг к другу соответствует случаю настройки характеристического полинома (4.5) на фильтр Баттерворта второго порядка, а при $a_c = 3$ стандартной линейной форме Бесселя [85, 88].

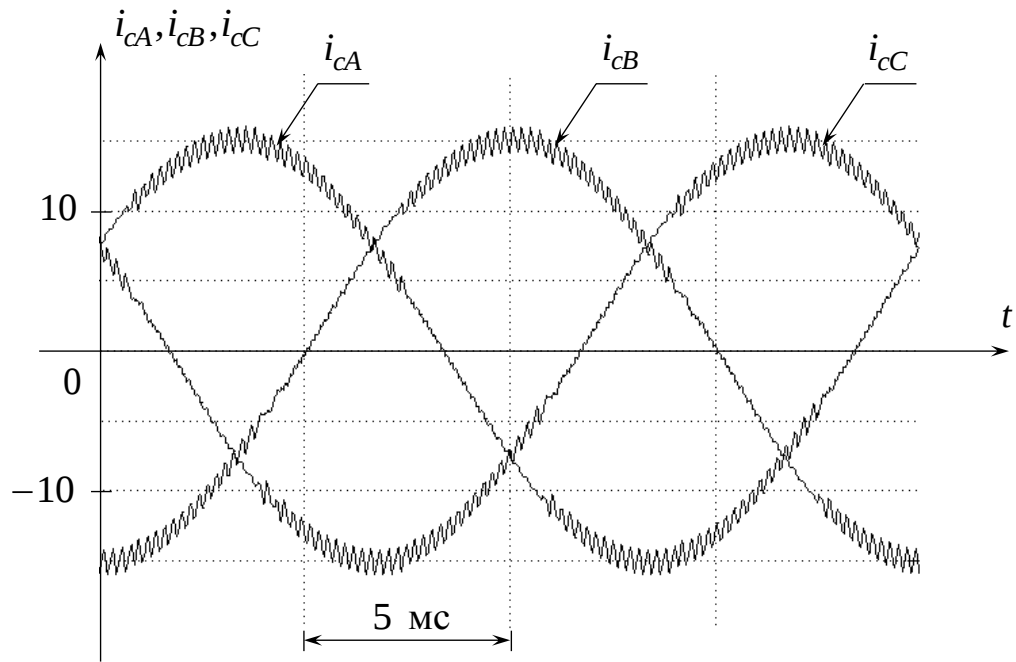


Рисунок 4.9 – Автоколебательный режим работы трехканального релейного контура регулирования токов

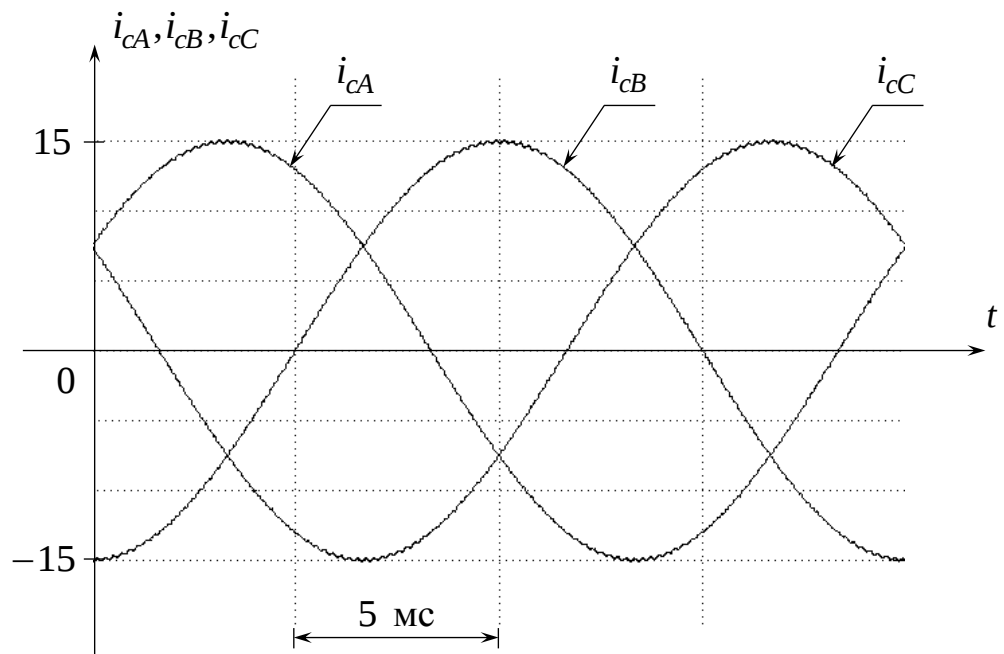


Рисунок 4.10 – Установившийся процесс в непрерывном контуре регулирования токов при его настройке на фильтр Баттерворта второго порядка

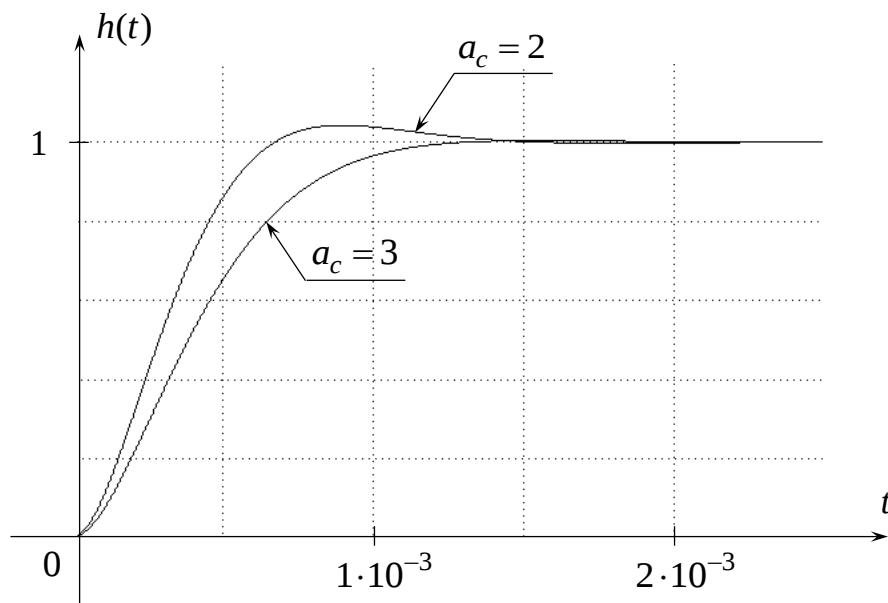


Рисунок 4.11 – Переходные характеристики в непрерывном контуре регулирования токов с компенсацией “левого” нуля в (4.5) и различных численных значениях a_c

В заключении необходимо отметить, что релейный контур регулирования токов обладает лучшими динамическими характеристиками по отношению к непрерывному ПИ-закону в силу того, что в последнем случае присутствует дополнительное условие разделения частот (4.3), снижающее полосу пропускания сигналов, а также разрывное управление более полно учитывает ключевой режим работы АИН.

4.2 Обобщенная задача минимизации евклидовой нормы алгебраического вектора токов

На начальном этапе процедуры синтеза алгоритмов активной фильтрации рассмотрим решение прикладной задачи снижения активных потерь в рамках теории оптимального управления, воспользовавшись следующим квадратичным функционалом [131, 168, 187, 192]

$$f_0(\|\mathbf{i}_{ABC}\|^2) = \mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} = \sum_{\forall j} i_j^2, \quad (4.8)$$

с ограничением [67]

$$\varphi_1(\mathbf{i}_{ABC}) = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} - p_{ABC} = 0. \quad (4.9)$$

По аналогии с теоретическим приемом определения минимума обобщенного тока S. Fryze (см. раздел 2.1.2), зададим функцию Лагранжа в следующем виде [85]

$$\mathcal{L}_1 = f_0(\|\mathbf{i}_{ABC}\|^2) + \psi_1 \cdot \varphi_1(\mathbf{i}_{ABC}) = \mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} + \psi_1 (\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} - p_{ABC}),$$

на основании которой экстремум (4.8) достигается при выполнении равенства

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathbf{i}_{ABC}} = \mathbf{i}_{ABC}^T + \psi_1 \mathbf{u}_{ABC}^T = 0.$$

После умножение справа всех членов на $\mathbf{u}_{ABC}$

$$\mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{u}_{ABC} + \psi_1 \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{u}_{ABC} = p_{ABC} + \psi_1 \|\mathbf{u}_{ABC}\|^2 = 0,$$

множитель Лагранжа находится как

$$\psi_1 = -\frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2},$$

откуда минимальное значение (4.8) будет иметь место при токах трехфазной системы

$$\mathbf{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC}. \quad (4.10)$$

Как нетрудно заметить, последнее выражение совпадает с формулой для обобщенного тока *S. Fryze* вида (2.19), но в отличие от нее является функцией мгновенных значений фазных переменных.

Техническая реализация экстремальной зависимости (4.10) осуществляется при помощи параллельного АСФ в соответствии с рисунком 4.1, в результате чего на основании первого закона Кирхгофа компенсационные воздействия описываются следующей зависимостью [67, 114]

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{i}_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC}.$$

При этом также необходимо отметить, что в силу выполнения равенства

$$p_c = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_c = \mathbf{u}_{ABC}^T \left(\mathbf{i}_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC} \right) = p_{ABC} - p_{ABC} = 0, \quad (4.11)$$

представляется возможным в идеализированном случае исключить из силовой схемы реактивные элементы, служащие для хранения и обмена электромагнитной энергией [131, 141, 146, 167, 168, 185, 187, 208].

Практическое применение оптимального в рамках критерия (4.8) алгоритма компенсации обеспечивает снижение активных потерь в трехфазных системах передачи, распределения и преобразования электрической энергии, но не исключает ток в нулевом проводе. Действительно, если воспользоваться линейным разложением $\tilde{\mathbf{i}}_{ABC}$ в виде (2.92) из векторной формулировки, то с учетом формулы (2.86) получаем [67]

$$\vec{i}_{ABC} = \frac{p_{ABC}^p + p_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} (\vec{u}_{ABC}^p + \vec{u}_{ABC}^0) = \|\vec{u}_{ABC}\|^{-2} \left(\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2 \vec{i}_{ABC} + \|\vec{u}_{ABC}^0\|^2 \vec{i}_{ABC}^0 \right).$$

Для устранения данного недостатка, добавим к существующему ограничению (4.9) следующее уравнение связи [143, 192]

$$\varphi_2(\mathbf{i}_{ABC}) = \mathbf{1}^T (\mathbf{i}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^0) = \mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{1} - \sum_{\forall j} i_j = 0,$$

где $\mathbf{i}_{ABC}^0 = \frac{i_o}{\sqrt{3}} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sum_{\forall j} i_j & \sum_{\forall j} i_j & \sum_{\forall j} i_j \end{bmatrix}^T$ – алгебраический вектор-столбец нулевых составляющих вида (2.99), каждая координата которого в соответствии с

(1.5) и (2.95) однозначно определяет ток в нейтральном проводе [167],

при учете которого исходный Лагранжиан $\mathbf{L}_1$ преобразуется к виду

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} + \psi_1 (\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} - p_{ABC}) + \psi_2 \left(\mathbf{i}_{ABC}^T \mathbf{1} - \sum_{\forall j} i_j \right).$$

В этом случае экстремум функционала $f_0(\|\mathbf{i}_{ABC}\|^2)$ достигается при совместном выполнении необходимых условий

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{i}_{ABC}} = \mathbf{i}_{ABC}^T + \psi_1 \mathbf{u}_{ABC}^T = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{i}_{ABC}^T} = \mathbf{i}_{ABC} + \psi_2 \mathbf{1} = 0,$$

которые после умножения первого матричного равенства справа на $\mathbf{u}_{ABC}$, а второго слева на $\mathbf{1}^T$ также можно представить как

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{i}_{ABC}} = (\mathbf{i}_{ABC}^T + \psi_1 \mathbf{u}_{ABC}^T) \mathbf{u}_{ABC} = p_{ABC} + \psi_1 \|\mathbf{u}_{ABC}\|^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{i}_{ABC}^T} = \mathbf{1}^T (\mathbf{i}_{ABC} + \psi_2 \mathbf{1}) = \sum_{\forall j} i_j + 3\psi_2 = 0.$$

В итоге, после непосредственного выражения множителей Лагранжа

$$\psi_1 = -\frac{p_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2}, \quad \psi_2 = -\frac{i_o}{\sqrt{3}},$$

экстремальная зависимость для токов трехфазной системы определяется из однородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{i}_{ABC}^T} = \mathbf{i}_{ABC} + \psi_1 \mathbf{u}_{ABC} + \psi_2 \mathbf{1} = \mathbf{i}_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^0 = 0$$

и описывается функцией [192]

$$\mathbf{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC} + \mathbf{i}_{ABC}^0, \quad (4.12)$$

в результате чего окончательно получаем следующий закон оптимального управления

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{i}_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} \mathbf{u}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^0. \quad (4.13)$$

Аналитическое выражение (4.12) можно также преобразовать к более простому виду, если воспользоваться условием ортогональности $\vec{i}_{ABC}^p \perp \vec{i}_{ABC}^0$ и линейной комбинацией $\vec{u}_{ABC}$ вида (2.79) из векторной формулировки мгновенной мощности (см. раздел 2.5.2), на основании которых при переходе к мгновенным мощностям становится справедливым [67]

$$\vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC}^* = \vec{u}_{ABC} \frac{P_{ABC}}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} \vec{u}_{ABC} + (\vec{u}_{ABC}^p + \vec{u}_{ABC}^0) \cdot \vec{i}_{ABC}^0 = P_{ABC} + \vec{u}_{ABC}^0 \cdot \vec{i}_{ABC}^0,$$

откуда после умножения обеих частей на обратный вектор $\|\vec{u}_{ABC}^p\|^{-2} \cdot \vec{u}_{ABC}^p$

$$\frac{\vec{u}_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} (\vec{u}_{ABC}^p + \vec{u}_{ABC}^0) \cdot \vec{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{\vec{u}_{ABC}^p \cdot \vec{u}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{i}_{ABC}^0,$$

окончательно получаем [187]

$$\vec{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p,$$

или при переходе в соответствии с (2.98) к векторно-матричной форме записи

$$\mathbf{i}_{ABC}^* = \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \mathbf{u}_{ABC}^p.$$

Таким образом, для исключения нулевого тока и достижения экстремума (4.8), алгоритм компенсации (4.13) окончательно преобразуется к следующему виду

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{i}_{ABC} - \mathbf{i}_{ABC}^* = \mathbf{i}_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \mathbf{u}_{ABC}^p,$$

причем, как и в предыдущем случае (4.11), мгновенная мощность на выходе АСФ равна нулю

$$p_c = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_c = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} - (\mathbf{u}_{ABC}^p + \mathbf{u}_{ABC}^0)^T \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} \mathbf{u}_{ABC}^p,$$

$$p_c = p_{ABC} - p_{ABC} - \frac{P_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}^p\|^2} (\mathbf{u}_{ABC}^0)^T \mathbf{u}_{ABC}^p = 0,$$

где $(\mathbf{u}_{ABC}^0)^T \mathbf{u}_{ABC}^p = 0$ – матричное равенство вида (2.100), являющееся аналогом скалярного произведения взаимно ортогональных пространственных векторов $\vec{u}_{ABC}^0$ и $\vec{u}_{ABC}^p$ в трехмерном пространстве состояний $\mathcal{R}^3$.

4.3 Синтез алгоритмов активной фильтрации на основе современных теорий мгновенной мощности

4.3.1 Общие цели и задачи компенсации

Как указывалось во введении, силовые полупроводниковые устройства активной фильтрации предназначены для решения прикладных задач повышения энергоэффективности трехфазных систем различного назначения за счет полного или частичного исключения из состава потребляемой от источника мгновенной мощности $p_s(t)$ всех составляющих, которые обусловлены негативным действием параметрической асимметрии и искажением в гармонической форме сигналов. Как следует из представленных в главе 2 основных результатов подробного анализа базовых положений современных теорий, к их числу относятся:

- мгновенная реактивная (неактивная) мощность, вызванная циркуляцией потоков электрической энергии в единицу времени между фазными токопроводящими контурами;
- нулевая мгновенная мощность, отвечающая за тепловые потери в нейтральном проводе;
- переменная составляющая активной мгновенной мощности, описывающая энергетические процессы обмена электрической энергией между сетью и потребителем.

Сформулированную в данном виде конечную цель компенсационной задачи можно представить в аналитической форме как

$$p_s(t) = p_l(t) - p_c(t) = p_s^*, \quad (4.14)$$

$$q(t) = q^*, \quad (4.15)$$

где $q(t)$ – мгновенная реактивная мощность, представленная в виде скалярной величины или пространственного вектора; $p_l(t) = \mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_{ABC} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o}$ – мгновенная мощность нагрузки в фазных переменных или координатах состояния Е. Clarke; $p_c(t)$ – мгновенная мощность компенсации на выходе АСФ; p_s^*, q^* – желаемые значения потребляемой от источника мгновенной мощности и ее реактивной компоненты соответственно.

В общем случае эталонное значение q^* может задаваться в произвольном виде, как, например, в [128], однако на практике ее численное значение выбирают из условия

$$q^* = 0, \quad (4.16)$$

а p_s^* принимается равной мгновенной мощности чисто резистивной симметричной нагрузки, которая является неизменной во времени и соответствует случаю идеального энергопотребления [154, 206], т.е.

$$p_s^* = \bar{p}_l = \text{const}, \quad (4.17)$$

следствием чего является следующее интегральное ограничение [59, 136]

$$\bar{p}_c = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{u}_{ABC}^T \mathbf{i}_c) dt = 0, \quad (4.18)$$

где T – временной интервал усреднения,

физически означающее отсутствие активной среднеквадратичной мощности на выходе АСФ.

Формирование компенсационных воздействий с соблюдением требований (4.17) и (4.18) в англоязычных литературных источниках получило название алгоритма активной фильтрации с постоянством потребляемой от источника мгновенной мощности [131, 154, 155]. При этом на выбор желаемого значения p_s^* в правой части (4.14) может также накладываться дополнительное условие, заключающееся, например, в исключении тока в нулевом проводе

$$\sum_{\forall j} i_j = \frac{1}{\sqrt{3}} i_o = 0. \quad (4.19)$$

При параллельном подключении АСФ относительно нагрузки и наличии в составе трехфазных напряжений высокочастотных гармоник, соблюдение равенств (4.14) и (4.16) будет приводить к нелинейному характеру переходных процессов по токам, по причине чего конечные цели компенсации в данном случае формулируются в следующем виде [194]:

- обеспечение единичного коэффициента мощности за счет повторения токами источника мгновенной формы соответствующих напряжений;
- соблюдение синусоидального закона изменения потребляемых токов без углового сдвига относительно соответствующих компонентов прямой последовательности фаз $\mathbf{u}_{ABC}$ или $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$.

На основании вышеизложенного дальнейший анализ различных подходов к организации структуры управляющей части силовых преобразовательных устройств компенсации будет производиться при принятии допущения о питании трехфазной нагрузки от сети с симметричной системой напряжений вида (3.1).

4.3.2 Синтез алгоритмов компенсации на базе исходной и расширенной $p-q$ теорий активной и реактивной мгновенных мощностей

Определение компенсационных воздействий на основании постулированных в рамках исходной $p-q$ теории мгновенных мощностей выполним в соответствии с критерием (4.17), который с учетом (2.29) находится как [169]:

$$p_s(t) = p_l(t) - p_c(t) = \bar{p}_{\alpha\beta} + \bar{p}_o = \text{const},$$

откуда

$$p_c(t) = p_l(t) - p_s(t) = (\bar{p}_{\alpha\beta} + \tilde{p}_{\alpha\beta} + \bar{p}_o + \tilde{p}_o) - (\bar{p}_{\alpha\beta} + \bar{p}_o). \quad (4.20)$$

Таким образом, дополняя последнее соотношение условием (4.16), окончательно получаем следующий алгебраический вектор мгновенной мощности в координатах состояния α, β, o , подлежащей исключению из общего потока электрической энергии в единицу времени [194]

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta o}^* = [\tilde{p}_{\alpha\beta} \quad q_{\alpha\beta} \quad \tilde{p}_o]^T.$$

В свою очередь для полного исключения активных потерь в нулевом проводе с одновременным соблюдением интегрального ограничения (4.18) выберем в качестве третьей координаты $\mathbf{p}_{\alpha\beta o}^*$ следующую скалярную величину

$$p_o = \bar{p}_o + \tilde{p}_o,$$

в результате чего уравнение (4.20) будет содержать одно неизвестное $p_{\alpha\beta}^*$ и преобразуется к виду

$$p_s(t) + p_c(t) = (\bar{p}_{\alpha\beta} + \bar{p}_o) + (p_{\alpha\beta}^* + p_o) = p_l(t),$$

из которого [154, 155]

$$p_{\alpha\beta}^* = \tilde{p}_{\alpha\beta} - \bar{p}_o,$$

или окончательно с учетом требования (4.16)

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta o}^* = [\tilde{p}_{\alpha\beta} - \bar{p}_o \quad q_{\alpha\beta} \quad p_o]^T. \quad (4.21)$$

В итоге, для совместного достижения конечных целей управления АСФ в виде (4.17) и (4.19), алгоритм формирования компенсационных токов в соответствии с формулой для обратного перехода к фазным переменным (1.13) и линейной комбинацией (2.27) принимает следующий вид [56]:

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-2} \left((\tilde{p}_{\alpha\beta} - \bar{p}_o - \Delta\bar{p}_c) \mathbf{D}_o^2 + q_{\alpha\beta} \mathbf{D}_o + \frac{p_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^2}{u_o^2} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o}, \quad (4.22)$$

здесь $\Delta\bar{p}_c$ – активная составляющая мгновенной мощности, характеризующая потери в цепи звена постоянного тока, сглаживающих дросселях и полупроводниковых ключах автономного инвертора [28, 57, 61, 131, 175, 178].

Таким образом, как видно из (4.21), через АСФ происходит непрерывный обмен постоянной составляющей мгновенной мощности $p_s(t)$ от источника в плоскости α, β к нагрузке по координате состояния o , что иллюстрирует рисунок 4.12 [59, 136].

Определение компенсационных воздействий $\mathbf{i}_c$ в рамках расширенной $p-q$ теории выполним из условия исключения из состава четырехмерного алгебраического вектора-столбца мгновенной мощности (2.46) линейно-зависимых координат $\mathbf{q}_{\alpha\beta o}$ [135] и выбора правой части (4.14) в соответствии с равенством

$$p_s^* = \bar{p}_l = \bar{p}_{\alpha\beta o} = \text{const},$$

в результате чего алгоритм активной фильтрации с учетом линейной комбинации (2.50) принимает следующий вид [56]:

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} \left((\tilde{p}_{\alpha\beta o} - \Delta\bar{p}_c) \mathbf{E} + q_\alpha \mathbf{D}_\alpha + q_\beta \mathbf{D}_\beta + q_o \mathbf{D}_o \right) \mathbf{u}_{\alpha\beta o}, \quad (4.23)$$

где $\tilde{p}_{\alpha\beta o}$ – переменная составляющая активной мгновенной мощности $p_{\alpha\beta o}$.

В заключении также необходимо отметить, что практическое использование закона управления АСФ вида (4.23) не позволяет полностью устранить ток в нулевом проводе при $u_o \neq 0$, т.к. в соответствии с (2.53) некомпенсируемая постоянная составляющая $\bar{p}_{\alpha\beta o}$ будет включать в себя слагаемое в функции третьей координаты состояния $u_o i_o$ [154, 191].

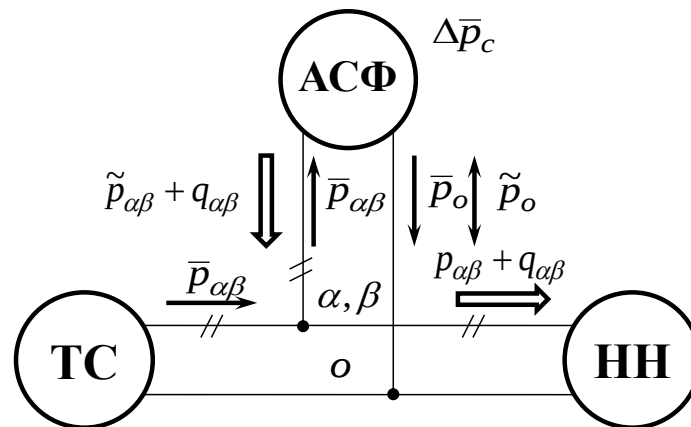


Рисунок 4.12 – Функциональная схема распределения мгновенных мощностей в трехфазной системе с компенсацией алгебраического вектора (4.21)

4.3.3 Синтез алгоритмов компенсации с использованием

$p-q-r$ и $d-q$ теорий мгновенной мощности

Как указано в [163], применение $p-q-r$ теории при синтезе алгоритмов активной фильтрации позволяет осуществить декомпозицию закона управления АСФ на две отдельные функциональные подзадачи, а именно совместную компенсацию реактивных мгновенных мощностей q_q, q_r и переменной составляющей $\tilde{p}_{pqr}$, а также исключение тока в нулевом проводе, который на основании (2.64) и (2.65) находится как

$$i_o = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} (p_{pqr} u_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| q_q). \quad (4.24)$$

Из последней формулы следует, что равенство $i_o = 0$ будет иметь место, если при исключении $q_q = -u_p i_r$ также соблюдается условие

$$(p_{pqr} u_o - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| q_q) = 0,$$

реализуемое за счет добавки к сигналу задания на i_r в виде [58]

$$\Delta i_r = u_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} i_p.$$

Другим подходом к снижению тепловых потерь от действия асимметрии является формирование компенсационного воздействия по оси p в следующем виде

$$i_p^* = \tilde{p}_{pqr} - \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| u_o^{-1} q_q,$$

в результате чего равенство (4.24) преобразуется к виду

$$i_o = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-2} \bar{p}_{pqr} u_o,$$

при котором, однако, не выполняется условие (4.19).

Таким образом, закон управления АСФ в рамках $p-q-r$ теории на основании (2.62) и (2.63) описываются аналитической зависимостью

$$\mathbf{i}_c = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^{-1} \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{L}^T (\varphi_3, \varphi_2) \left((\mathbf{E} + \mathbf{D}_\alpha^2) + \mathbf{D}_o \mathbf{D}_\beta - \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_o \right) \mathbf{p}_{pqr}^*, \quad (4.25)$$

здесь $\mathbf{p}_{pqr}^* = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{pqr} & q_q - u_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} p_{pqr} & q_r \end{bmatrix}^T$ – трехмерный алгебраический вектор-столбец мгновенной мощности, подлежащий компенсации.

При этом необходимо отметить, что в целях минимизации временных затрат на техническую реализацию алгоритма (4.25) целесообразно исключить промежуточное вычисление $\mathbf{p}_{pqr}^*$, выполняя непосредственный расчет компенсирующих токов в координатах p, q, r [161, 163], которые с учетом (1.13) и (2.63) принимают следующий вид [58]

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{L}^T(\varphi_3, \varphi_2) \mathbf{i}_{pqr}^*, \quad (4.26)$$

где $\mathbf{i}_{pqr}^* = \begin{bmatrix} \tilde{i}_{pqr} & i_q & i_r + u_o \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} i_p \end{bmatrix}^T$ – алгебраический вектор выходных токов АСФ.

Далее перейдем к решению задачи синтеза на основе математического описания процесса энергопотребления трехфазной нагрузки в функции комплексной переменной с использованием мгновенной мощности R. Н. Park вида (2.66). Как нетрудно заметить из формул (2.69)–(2.71), расчетные соотношения для определения p_o, p_p и обратного значения q_p полностью совпадают с соответствующим векторно-матричным уравнением (2.24) из исходной $p-q$ теории, в связи с чем практический интерес представляет более общий случай, при котором $\Theta \neq 0^\circ$. При соблюдении последнего неравенства, ориентации продольной оси d по опорному вектору напряжения $\mathbf{u}_{\alpha\beta o}$ и выполнении условия симметрии по мгновенным значениям (1.2), в [199, 200, 207] изложены основные положения так называемого $i_d - i_q$ метода активных и реактивных мгновенных токов [169].

Как видно из рисунка 4.13, направляющие косинусы подчиняются следующим тригонометрическим зависимостям

$$\cos \Theta = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} u_\alpha, \quad \sin \Theta = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} u_\beta,$$

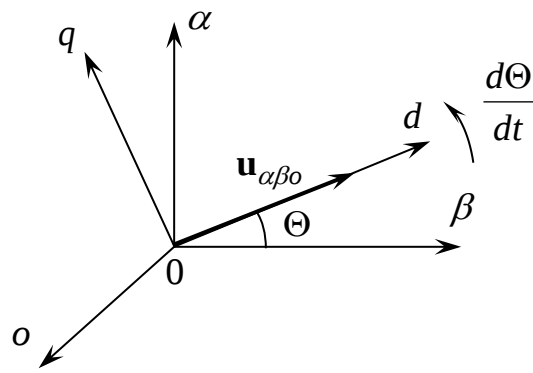


Рисунок 4.13 – Пространственное расположение координатных осей d, q и α, β

на основании которых матрица поворота (1.15) примет следующий вид [114, 154, 169]

$$\mathbf{A}(\Theta) = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \begin{bmatrix} u_\alpha & u_\beta & 0 \\ -u_\beta & u_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \end{bmatrix} = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \left(\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) - u_\alpha \mathbf{D}_o^2 - u_\beta \mathbf{D}_o \right).$$

При данном угловом положении плоскости d, q в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$ отсутствует поперечная составляющая u_q , в результате чего становится справедливым равенство $u_d = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|$ и, как следствие, в формулах (2.67), (2.68) исключаются слагаемые в функции u_q

$$p_p = u_d i_d = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| i_d, \quad q_p = -u_d i_q = -\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| i_q,$$

а токи нагрузки преобразуются к виду

$$\mathbf{i}_{dqo} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & u_o^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_p \\ q_p \\ p_o \end{bmatrix},$$

или в более компактной векторно-матричной форме записи

$$\mathbf{i}_{dqo} = \left(\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} (\mathbf{D}_\alpha^2 - \mathbf{D}_\beta^2) + u_o^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) \right) \mathbf{p}_{dqo}.$$

Как показано в [200], каждую из координат $\mathbf{i}_{dqo}$ в двумерном подпространстве d, q можно представить в виде линейной комбинации из двух слагаемых [169]

$$i_d = \bar{i}_d + \tilde{i}_d, \quad i_q = \bar{i}_q + \tilde{i}_q, \quad (4.27)$$

первые из которых обусловлены основной гармоникой прямой последовательности фаз, а все остальные образуют переменные составляющие, которые подлежат последующему исключению при помощи АСФ.

Таким образом, при использовании $i_d - i_q$ метода в силу ортогональности линейного преобразования Р. Н. Park вида (1.14), компенсационные воздействия описываются следующей аналитической зависимостью:

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{A}^T(\Theta) \mathbf{i}_{dqo}^* = \|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\|^{-1} \mathbf{P}_{\alpha\beta o}^T \left(\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| (\mathbf{E} + \mathbf{D}_o^2) - u_\alpha \mathbf{D}_o^2 - u_\beta \mathbf{D}_o \right) \cdot \mathbf{i}_{dqo}^*, \quad (4.28)$$

где $\mathbf{i}_{dqo}^* = [\tilde{i}_d \quad \tilde{i}_q \quad i_o]^T$ – алгебраический вектор компенсируемых токов.

В заключении также необходимо отметить, что в отличие от рассмотренных выше законов управления АСФ вида (4.23), (4.25) и (4.26), при данном методе синтеза формирование $\mathbf{i}_c$ осуществляется при помощи непосредственного разделения токов в виде (4.27), а не мгновенных мощностей, что повышает быстродействие силового полупроводникового устройства активной фильтрации из-за отсутствия промежуточных вычислений. В тоже время в соответствии с (2.71) становится справедливым равенство

$$\tilde{q}_p = -\|\mathbf{u}_{\alpha\beta}\| \tilde{i}_q = -\tilde{q}_{\alpha\beta},$$

из которого следует, что в трехфазной системе не компенсируется среднее значение мнимой мощности R . Н. Park вида (2.68), следствием чего является наличие углового сдвига между соответствующими фазными токами и напряжениями [191].

4.3.4 Синтез алгоритмов компенсации на основе векторных формулировок мгновенной мощности

При построении системы управления АСФ на базе обобщенной теории с привлечением математического аппарата векторной алгебры, алгоритм активной фильтрации имеет следующий вид [185]

$$\vec{i}_c = \frac{p_c \cdot \vec{u}_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2} + \frac{\vec{q}_c \times \vec{u}_{ABC}}{\|\mathbf{u}_{ABC}\|^2}, \quad (4.29)$$

где $p_c, \vec{q}_c$ – компенсируемые активная и реактивная мгновенные мощности соответственно, конкретный выбор которых зависит от типа потребителя электрической энергии.

В этом случае, основываясь на предварительном представлении (2.72) и (2.73) в виде суммы постоянной и переменной составляющих

$$p_{ABC} = \bar{p}_{ABC} + \tilde{p}_{ABC}, \quad \bar{q}_{ABC} = \bar{\bar{q}}_{ABC} + \tilde{\bar{q}}_{ABC},$$

причем последние слагаемые в правой части также разделяются на две компоненты, одна из которых является функцией удвоенной частоты (нижний индекс 2ω), а другая включает в себя гармоники более высокого порядка, т.е.

$$\tilde{p}_{ABC} = \tilde{p}_{2\omega} + \tilde{p}_h, \quad \tilde{\bar{q}}_{ABC} = \tilde{\bar{q}}_{2\omega} + \tilde{\bar{q}}_h,$$

в рамках обобщенной теории формулируются следующие конечные цели повышения энергоэффективности трехфазных систем с АСФ [185]:

– компенсация вектора мгновенной реактивной мощности, реализуемая при выполнении следующих условий

$$p_c = 0, \quad \bar{q}_c = \bar{q}_{ABC},$$

в результате чего из состава силовой части АСФ можно исключить накопитель электромагнитной энергии;

– совместная компенсация обратной последовательности фаз и высокочастотных гармоник в потребляемых токах, осуществляемая за счет выбора p_c и $\bar{q}_c$ из требований

$$p_c = \tilde{p}_{ABC}, \quad \bar{q}_c = \tilde{\bar{q}}_{ABC};$$

– компенсация постоянной составляющей мгновенной реактивной мощности

$$p_c = 0, \quad \bar{q}_c = \bar{\bar{q}}_{ABC},$$

при которой в составе выходного тока АСФ, главным образом, присутствует прямая последовательность фаз;

– одновременная компенсация переменной составляющей активной и полной реактивной мгновенных мощностей

$$p_c = \tilde{p}_{ABC}, \quad \bar{q}_c = \bar{q}_{ABC},$$

в результате чего токи источника становятся синусоидальными с нулевым угловым смещением относительно соответствующего напряжения;

– компенсация обратной последовательности фаз по основной гармонике, осуществляемая за счет формирования компенсационных воздействий в соответствии с равенствами

$$p_c = \tilde{p}_{2\omega}, \quad \bar{q}_c = \tilde{q}_{2\omega};$$

– компенсация высокочастотных составляющих в токах источника, достигаемая в случае

$$p_c = \tilde{p}_h, \quad \bar{q}_c = \tilde{q}_h.$$

Таким образом, в зависимости от конкретного вида правой части уравнений (4.14) и (4.15), из потоков электрической энергии в единицу времени исключаются различного рода комбинации неэффективных составляющих, вследствие чего обеспечивается снижение активных потерь в трехфазных системах. При этом также необходимо отметить, что представленные выше подходы к решению компенсационной задачи в рамках обобщенной теории не учитывают дополнительное ограничение (4.19), отвечающее за потери в нулевом проводе.

В свою очередь, воспользовавшись постулированными определениями мгновенных мощностей вида (2.83)–(2.85) с использованием ортогональной декомпозиции вектора напряжений $\vec{u}_{ABC}$ в трехмерном вещественном пространстве $\mathfrak{R}^3$, зададим желаемое состояние процесса энергопотребления в форме следующего уравнения

$$p_s^* = p_l(t) - p_c(t) = \vec{u}_{ABC} \cdot \vec{i}_{ABC} - p_c(t) = \bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0,$$

где $\bar{p}_{ABC}^p, \bar{p}_{ABC}^0$ – постоянные составляющие активной и нулевой мгновенных мощностей соответственно.

Далее, представив $\vec{i}_{ABC}$ на основании линейной комбинации (2.93) и осуществив переход к токам за счет умножения всех членов последнего равенства на обратный вектор $\vec{u}_{ABC}^{-1}$ вида (2.87), получаем следующий закон формирования компенсационных воздействий [155]

$$\vec{i}_c = \frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{p_{ABC}^0}{u_o^2} \vec{u}_{ABC}^0 + \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^q - \frac{\bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} \vec{u}_{ABC},$$

или иначе с учетом формулы (2.79)

$$\vec{i}_c = \left(\frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} - \frac{\bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} \right) \vec{u}_{ABC}^p + \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^q + \vec{i}_{ABC}^0 - \frac{\bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} \vec{u}_{ABC}^0. \quad (4.30)$$

Как видно из содержимого правой части (4.30), применение данного алгоритма на практике не позволит полностью устранить потери в нейтральном токопроводящем контуре, которые в силу взаимной ортогональности $\vec{u}_{ABC}^p, \vec{u}_{ABC}^q, \vec{u}_{ABC}^0$ будут определяться как

$$\vec{u}_{ABC}^0 \cdot (\vec{i}_{ABC} - \vec{i}_c) = \bar{p}_{ABC}^0 - \bar{p}_{ABC}^0 + (\bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0) \frac{\|\vec{u}_{ABC}^0\|^2}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2} = (\bar{p}_{ABC}^p + \bar{p}_{ABC}^0) \frac{u_o^2}{\|\vec{u}_{ABC}\|^2}.$$

Для устранения данного недостатка воспользуемся уравнениями (4.16) и (4.19), задав неактивную и нулевую компоненты $\vec{i}_c$ в следующем виде

$$\vec{i}_c^q = \vec{i}_{ABC}^q = \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^q, \quad \vec{i}_c^0 = \vec{i}_{ABC}^0 = \frac{p_{ABC}^0}{u_o^2} \vec{u}_{ABC}^0,$$

а активную составляющую определим в соответствии с первым законом Кирхгофа из уравнения

$$\vec{i}_c^p = \vec{i}_{ABC}^p - \vec{i}_s^p = \frac{p_{ABC}^p}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p - \frac{p_s^*}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p = \frac{p_{ABC}^p - \bar{p}_{ABC}^p - \bar{p}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p,$$

в результате чего окончательно получаем

$$\vec{i}_c = \frac{\tilde{p}_{ABC}^p - \bar{p}_{ABC}^0}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^p + \frac{q_{ABC}^q}{\|\vec{u}_{ABC}^p\|^2} \vec{u}_{ABC}^q + \vec{i}_{ABC}^0.$$

4.3.5 Синтез алгоритмов активной фильтрации трехфазных напряжений

Далее рассмотрим алгоритмические принципы построения систем управления последовательными АСФ, которые предназначены для улучшения гармонического состава трехфазных напряжений нагрузки в случае несоблюдения ус-

ловия симметрии (1.2) и/или значительных искажениях в мгновенной форме сигналов, коррекция которых, как это видно из рисунка 4.2, производится на основании следующего закона [60, 131]

$$u_c = u_{ABC} - u_s \quad (4.31)$$

и может реализовываться на основании базовых положений одной из описанных выше современных теорий мгновенной мощности, непосредственном определении высокочастотных составляющих в u_{sA}, u_{sB}, u_{sC} или выделении из их полного спектра прямой последовательности фаз по основной гармонике.

Так, например, при использовании исходной $p-q$ теории, формирование компенсационных воздействий на выходе последовательного АСФ применительно к трехфазным цепям с изолированной средней точкой с учетом требований (4.16) и (4.17) описывается следующей аналитической зависимостью

$$\begin{bmatrix} u_{c\alpha} \\ u_{c\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{i_\alpha^2 + i_\beta^2} \begin{bmatrix} i_\alpha & -i_\beta \\ i_\beta & i_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{p}_{\alpha\beta} - \Delta \bar{p}_c \\ q_{\alpha\beta} \end{bmatrix}.$$

Как отмечено в [131], техническая реализация данного алгоритма активной фильтрации позволяет обеспечить полное исключение $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ только в случае симметричной гармонической системы токов нагрузки, что представляет интерес только с теоретической точки зрения и не имеет практического приложения, по причине чего далее остановимся более подробно на анализе двух других способов расчета u_c .

Один из вариантов функциональной схемы системы управления последовательным АСФ иллюстрирует рисунок 4.14 [1], в соответствии с которым трехфазные напряжения источника через понижающий делитель оцифровываются с помощью аналогово-цифрового преобразователя **АЦП** и поступают на центральный процессор обработки сигналов **ЦПОС**. Далее, из дискретных значений u_{sA}, u_{sB}, u_{sC} вычитаются основные гармоники, получаемые при помощи рекурсивного фильтра низких частот **ФНЧ**, и полученная разность через цифро-

аналоговый преобразователь **ЦАП** подается в качестве задающих воздействий u_c^* на трехканальный широтно-импульсный модулятор автономного инвертора.

В свою очередь другой подход к определению текущих значений u_c базируется на принятии в качестве эталона для напряжений нагрузки прямой последовательности фаз по основной гармонике, соответствующей первой строке (2.32)

$$u_{1+} = \frac{1}{3} \mathbf{u}_{s1}^T \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} = u_{m1+} \cos(\omega t + \varphi_{1+}),$$

где $\mathbf{u}_{s1} = [u_{sA1} \quad u_{sB1} \quad u_{sC1}]^T$ – алгебраический вектор-столбец, составленный из элементов разложения в ряд Фурье с угловой частотой $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$, выделяемых из полного спектра фазных напряжений источника после прохождения измеренных сигналов через полосовой фильтр [165], передаточная функция которого в изображениях Лапласа, например, может быть выбрана в виде [106]

$$W(s) = \frac{Q^{-1}\omega^{-1}s}{\omega^{-2}s^2 + Q^{-1}\omega^{-1}s + 1},$$

здесь Q – добротность.

В свою очередь обратный переход от скалярной переменной u_{1+} к трем координатам $\mathbf{u}_{s1+}$ может быть выполнен при помощи (2.33) в следующем виде

$$\mathbf{u}_{s1+} = \begin{bmatrix} u_{sA1+} \\ u_{sB1+} \\ u_{sC1+} \end{bmatrix} = u_{m1+} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{1+}) \\ \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi_{1+}) \\ \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi_{1+}) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

или при использовании единичной матрицы-столбца $\mathbf{1}$, а также вырожденных косимметрических матриц $\mathbf{D}_\alpha, \mathbf{D}_\beta, \mathbf{D}_o$ из главы 2 [165]

$$\mathbf{u}_{s1+} = \frac{1}{3} \mathbf{u}_{s1} + \frac{1}{6} (\mathbf{E} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{u}_{s1} + b \frac{1}{2\sqrt{3}} (\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta + \mathbf{D}_o) \mathbf{u}_{s1},$$

где b – оператор поворота на угол 90° , реализуемый при помощи фазосдвигающего фильтра с передаточной функцией второго порядка

$$W(s) = \frac{s^2 - \omega s + 0,5\pi}{s^2 + \omega s + 0,5\pi}.$$

Выделение гармонических составляющих в функции ω из периодических несинусоидальных функций времени u_{sA}, u_{sB}, u_{sC} можно также выполнить в частотной области, воспользовавшись тригонометрическим рядом Фурье [91]

$$u_{sj} = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)),$$

где j – нижний индекс, показывающий буквенное обозначение одной из фаз A, B, C по аналогии с формулами (2.8) и (2.78); B_0, A_k, B_k – коэффициенты, соответственно определяемые как

$$A_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi\omega^{-1}} u_{sj} \sin(k\omega t) dt \text{ при } k=1,2,3,\dots,$$

$$B_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi\omega^{-1}} u_{sj} \cos(k\omega t) dt \text{ при } k=0,1,2,3,\dots$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами косинуса и синуса с аргументом кратным основной частоте $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$, численные значения A_1 и B_1 , отвечающие за амплитуду и угловой сдвиг первой гармоники u_{sj1} , вычисляют на основе текущей информации о первых членах следующих линейных комбинаций [124, 154, 190]

$$u_{sj} \cos \omega t = \frac{B_1}{2} + \frac{B_0}{2} \cos \omega t + \frac{B_1}{2} \cos 2\omega t + \frac{A_1}{2} \sin 2\omega t + \dots,$$

$$u_{sj} \sin \omega t = \frac{A_1}{2} + \frac{B_0}{2} \sin \omega t + \frac{B_1}{2} \sin 2\omega t - \frac{A_1}{2} \cos 2\omega t + \dots,$$

что иллюстрирует рисунок 4.15, на котором в качестве **ФНЧ** обозначен фильтр низких частот.

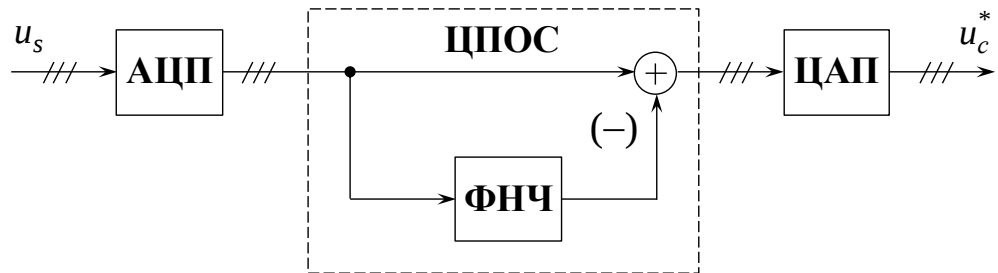


Рисунок 4.14 – Функциональная схема системы управления последовательного АСФ

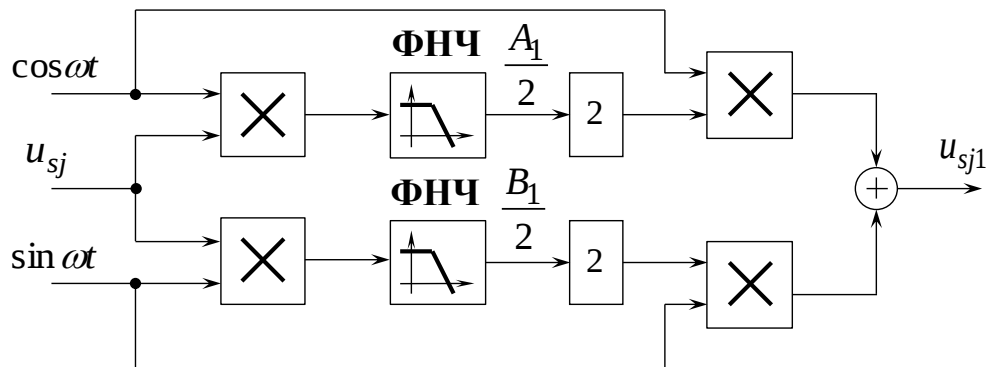


Рисунок 4.15 – Структурная схема выделения основной гармоники одной фазы напряжения u_{sj1}

В заключении рассмотрим базовые принципы теоретического приема к расчету компенсационных напряжений u_c в преобразованном пространстве состояний [165], основанном на последовательно выполняемых инвариантных относительно скалярных величин переходах от исходного базиса к α, β, o координатам [144] в соответствии с (1.10), а затем к d, q, o переменным [182] с помощью ортогональной матрицы (1.15), в которой аргумент тригонометрических функций определяется по аналогии с (1.12) как

$$\Theta_+ = -\arctg \frac{u_{s\beta 1+}}{u_{s\alpha 1+}},$$

в результате чего в соответствии с (4.31) окончательно получаем

$$\mathbf{u}_c = k_{u+}(\mathbf{u}_{s1+} - \mathbf{u}_s),$$

где k_{u+} – коэффициент приведения амплитуды u_m напряжений нагрузки вида (3.1) к номинальному уровню $\sqrt{2} \cdot 220 \text{ В}$, представляющий собой отношение желаемого значения евклидовой нормы алгебраического вектора $\|\mathbf{u}_{ABC}^*\| = \sqrt{3} \cdot 220 \text{ В}$ [69] к проекции на продольную ось u_{sd1+} [60].

Таким образом, описанные в данном разделе аналитические процедуры численного расчета компенсационных воздействий на выходе последовательного АСФ, в конечном итоге обеспечат коррекцию мгновенной формы трехфазных напряжений источника с целью обеспечения синусоидального закона изменения u_A, u_B, u_C с одновременным соблюдением условия симметрии (1.2) по мгновенным значениям.

4.3.6 Выводы по разделу

На основании представленных в данном разделе результатов синтеза алгоритмов компенсации на базе различных подходов к математическому описанию процесса энергопотребления трехфазных нагрузок произвольного вида, в том числе и с нелинейными элементами, можно сделать следующие выводы:

1. При симметричной системе напряжений (3.1) исключение из общего потока электрической энергии в единицу времени колебательной активной и полной реактивной мгновенных мощностей обеспечивает гармоническую форму потребляемых токов с нулевым угловым сдвигом, за исключением закона вида (4.28), при котором $\varphi \neq 0$, что объясняется присутствием в составе $p_s(t)$ постоянной составляющей мнимой мощности R. H. Park [191].

2. При выборе желаемого состояния трехфазной системы в соответствии с равенствами

$$p_s^* = p_l(t), \quad q^* = 0,$$

представляется возможным существенно снизить величину емкости конденсаторной батареи автономного инвертора, т.к. данный реактивный элемент не выступает в качестве накопителя электромагнитной энергии.

3. Техническая реализация алгоритма (4.28) в рамках $i_d - i_q$ метода не требует численного расчета мгновенных мощностей, что улучшает динамические показатели силовых полупроводниковых устройств активной фильтрации. При этом в силу несоблюдения интегрального требования (4.18), правая часть которого отлична от нуля и равна $\bar{p}_o$ [169], структуру АСФ необходимо дополнять внешним источником электрической энергии [154].

4. Применение закона вида (4.23) в рамках расширенной $p - q$ теории не позволяет полностью устранить ток в нейтральном проводе при $u_o \neq 0$, величина которого определяется на основании формулы

$$i_o = \frac{\bar{p}_{\alpha\beta o}}{\|\mathbf{u}_{\alpha\beta o}\|^2} u_o.$$

4.4 Синтез алгоритмов управления активным силовым фильтром в гиперкомплексном пространстве $\mathbb{H}$

4.4.1 Гармонический анализ компенсируемых составляющих кватерниона мгновенной мощности

На основании представленных в разделе 3.3.2 результатов математического представления кватерниона мгновенной мощности в виде тригонометрического ряда Фурье и в соответствии с конечными целями компенсации (4.14), (4.15), далее сформулируем общие требования к качественному составу исключаемых при помощи АСФ потоков электрической энергии переменного тока в терминах гиперкомплексных чисел. Решение данной прикладной задачи выполним для случая подключения нелинейного потребителя к источнику с симметричной системой напряжений (3.1), в которой присутствует только прямая последовательность фаз [65]

$$u_+ = u_m \cos \omega t,$$

а обратная и нулевая отсутствуют. При принятии данного допущения, вещественные коэффициенты скалярной и мнимой частей $\mathbf{P}_{ABC}$, описываемые в наиболее общем случае формулами (3.51)–(3.54) и (3.56)–(3.59), упростятся и примут следующий вид:

– скалярная часть

$$\begin{aligned} \text{scal} \mathbf{P}_{ABC} = & -3U_{1+}I_{1+} \cos(-\varphi_{n+}) - 3U_{1+}I_{1-} \cos(2\omega_1 t + \varphi_{1-}) - \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} 3U_{1+}I_{n+} \cos((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n+}) - \sum_{n=2}^{\infty} 3U_{1+}I_{n-} \cos((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n-}); \end{aligned} \quad (4.33)$$

– вещественные коэффициенты мнимой части $\text{vect} \mathbf{P}_{ABC}$:

$$\begin{aligned} q_A = & \sqrt{3}U_{1+}I_{1+} \sin \varphi_{1+} - \sqrt{3}U_{1+}I_{10} \sin \varphi_{10} + \\ & + \sqrt{3}U_{1+}I_{10} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{10}) - \sqrt{3}U_{1+}I_{1-} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{1-}) - \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n+} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n+}) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n-} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n-}) + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n0}) + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n0}), \\
& q_B = \sqrt{3} U_{1+} I_{1+} \sin \varphi_{1+} - \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(-\varphi_{10} + 60^\circ) - \\
& - \sqrt{3} U_{1+} I_{1-} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{1-}) - \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{10} + 60^\circ) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n+} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n+}) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n-} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n-}) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n0} + 60^\circ) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n0} + 60^\circ), \\
& q_C = \sqrt{3} U_{1+} I_{1+} \sin \varphi_{1+} + \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(\varphi_{10} + 60^\circ) - \\
& - \sqrt{3} U_{1+} I_{1-} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{1-}) - \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{10} - 60^\circ) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n+} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n+}) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n-} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n-}) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n0} - 60^\circ) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n0} - 60^\circ).
\end{aligned}
\tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
& q_C = \sqrt{3} U_{1+} I_{1+} \sin \varphi_{1+} + \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(\varphi_{10} + 60^\circ) - \\
& - \sqrt{3} U_{1+} I_{1-} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{1-}) - \sqrt{3} U_{1+} I_{10} \sin(2\omega_1 t + \varphi_{10} - 60^\circ) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n+} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n+}) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n-} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n-}) - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 - \omega_n) \cdot t - \varphi_{n0} - 60^\circ) - \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{3} U_{1+} I_{n0} \sin((\omega_1 + \omega_n) \cdot t + \varphi_{n0} - 60^\circ).
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

Воспользовавшись последними равенствами, далее выполним гармонический анализ кватерниона мгновенной мощности несимметричной трехфазной линейной нагрузки с периодическими токами вида (3.31)

$$\begin{cases} i_A = i_{mA} \cos(\omega t + \varphi_A), \\ i_B = i_{mB} \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi_B), \\ i_C = i_{mC} \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi_C), \end{cases}$$

в которых на основании матричного равенства (2.32) прямая, обратная и нулевая последовательности фаз находятся как

$$i_+ = \frac{1}{3} (i_{mA} \cos(\omega t + \varphi_A) + i_{mB} \cos(\omega t + \varphi_B) + i_{mC} \cos(\omega t + \varphi_C)),$$

$$i_- = \frac{1}{3} (i_{mA} \cos(\omega t + \varphi_A) + i_{mB} \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi_B) + i_{mC} \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi_C)),$$

$$i_0 = \frac{1}{3} \left(i_{mA} \cos(\omega t + \varphi_A) + i_{mB} \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi_B) + i_{mC} \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi_C) \right).$$

После использования тригонометрической формулы (1.6) и выполнения необходимых математических преобразований получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} i_+ = i_{m+} \cos(\omega t + \varphi_+) = A_{+1} \cos \omega t - A_{+2} \sin \omega t, \\ i_- = i_{m-} \cos(\omega t + \varphi_-) = A_{-1} \cos \omega t - A_{-2} \sin \omega t, \\ i_0 = i_{m0} \cos(\omega t + \varphi_0) = A_{01} \cos \omega t - A_{02} \sin \omega t, \end{cases} \quad (4.37)$$

где $A_{+1}, A_{-1}, A_{01}, A_{+2}, A_{-2}, A_{02}$ – амплитуды соответствующих гармоник со сдвигом относительно друг друга на четверть периода в функции угловой частоты питающего напряжения $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$

$$A_{+1} = \frac{1}{3} (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C),$$

$$A_{+2} = \frac{1}{3} (i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C),$$

$$A_{-1} = \frac{1}{3} \left(i_{mA} \cos \varphi_A - \frac{1}{2} i_{mB} \cos \varphi_B - \frac{1}{2} i_{mC} \cos \varphi_C - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mB} \sin \varphi_B + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mC} \sin \varphi_C \right),$$

$$A_{-2} = \frac{1}{3} \left(i_{mA} \sin \varphi_A - \frac{1}{2} i_{mB} \sin \varphi_B - \frac{1}{2} i_{mC} \sin \varphi_C + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mB} \cos \varphi_B - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mC} \cos \varphi_C \right),$$

$$A_{01} = \frac{1}{3} \left(i_{mA} \cos \varphi_A - \frac{1}{2} i_{mB} \cos \varphi_B - \frac{1}{2} i_{mC} \cos \varphi_C + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mB} \sin \varphi_B - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mC} \sin \varphi_C \right),$$

$$A_{02} = \frac{1}{3} \left(i_{mA} \sin \varphi_A - \frac{1}{2} i_{mB} \sin \varphi_B - \frac{1}{2} i_{mC} \sin \varphi_C - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mB} \cos \varphi_B + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{mC} \cos \varphi_C \right),$$

которые связаны с максимальными мгновенными значениями i_{m+}, i_{m-}, i_{m0} и угловыми сдвигами $\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0$ на основании следующих формул

$$i_{m+} = \sqrt{A_{+1}^2 + A_{+2}^2}, \quad i_{m-} = \sqrt{A_{-1}^2 + A_{-2}^2}, \quad i_{m0} = \sqrt{A_{01}^2 + A_{02}^2},$$

$$\varphi_+ = \arccos \frac{A_{+1}}{i_{m+}} = \arcsin \frac{A_{+2}}{i_{m+}},$$

$$\varphi_- = \arccos \frac{A_{-1}}{i_{m-}} = \arcsin \frac{A_{-2}}{i_{m-}},$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{A_{01}}{i_{m0}} = \arcsin \frac{A_{02}}{i_{m0}}.$$

Применительно к линейным электрическим цепям, в тригонометрических последовательностях (4.33)–(4.36) будут отсутствовать члены с порядковыми номерами $n \geq 2$, в результате чего в скалярной части будут отсутствовать последние два слагаемых

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -\frac{3}{2}u_m i_{m+} \cos \varphi_+ - \frac{3}{2}u_m i_{m-} \cos(2\omega t + \varphi_-),$$

а вещественные коэффициенты перед мнимыми единицами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} q_A &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m (i_{m+} \sin \varphi_+ - i_{m0} \sin \varphi_0 + i_{m0} \sin(2\omega t + \varphi_0) - i_{m-} \sin(2\omega t + \varphi_-)), \\ q_B &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m (i_{m+} \sin \varphi_+ - i_{m0} \sin(60^\circ - \varphi_0) - i_{m-} \sin(2\omega t + \varphi_-) - i_{m0} \sin(2\omega t + \varphi_0 + 60^\circ)), \\ q_C &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m (i_{m+} \sin \varphi_+ + i_{m0} \sin(\varphi_0 + 60^\circ) - i_{m-} \sin(2\omega t + \varphi_-) - i_{m0} \sin(2\omega t + \varphi_0 - 60^\circ)), \end{aligned}$$

или учитывая (4.37)

$$\begin{aligned} \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} &= -\frac{3}{2}u_m (A_{+1} + A_{-1} \cos 2\omega t - A_{-2} \sin 2\omega t), \\ q_A &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m (A_{+2} - A_{02} + (A_{02} - A_{-2}) \cos 2\omega t + (A_{01} - A_{-1}) \sin 2\omega t), \\ q_B &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \left(A_{+2} - \frac{\sqrt{3}}{2}A_{01} + \frac{1}{2}A_{02} \right) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \left(\left(A_{-2} + \frac{1}{2}A_{02} + \frac{\sqrt{3}}{2}A_{01} \right) \cos 2\omega t + \left(A_{-1} + \frac{1}{2}A_{01} - \frac{\sqrt{3}}{2}A_{02} \right) \sin 2\omega t \right), \\ q_C &= \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \left(A_{+2} + \frac{\sqrt{3}}{2}A_{01} + \frac{1}{2}A_{02} \right) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}u_m \left(\left(A_{-2} + \frac{1}{2}A_{02} - \frac{\sqrt{3}}{2}A_{01} \right) \cos 2\omega t + \left(A_{-1} + \frac{1}{2}A_{01} + \frac{\sqrt{3}}{2}A_{02} \right) \sin 2\omega t \right). \end{aligned}$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что использование в последних формулах аналитических выражений для определения максимальных мгновенных значений гармоник приводит к расчетным соотношениям (3.32)–(3.43), которые приведены в предыдущей главе пояснительной записки.

В свою очередь при токовой асимметрии вида (3.12), которая получается из системы уравнений (3.31) при соблюдении равенств

$$\varphi_B = \varphi_C = 0, \quad i_{mB} = i_{mC} = i_m,$$

соответствующие компоненты линейного разложения (2.32) описываются тригонометрическими функциями

$$i_+ = \frac{1}{3}((i_{mA} \cos \varphi_A + 2i_m) \cos \omega t - i_{mA} \sin \varphi_A \sin \omega t),$$

$$i_- = i_0 = \frac{1}{3}((i_{mA} \cos \varphi_A - i_m) \cos \omega t - i_{mA} \sin \varphi_A \sin \omega t),$$

в результате чего после их преобразования к виду (4.37) и последующей подстановки в (4.33)–(4.36) соответствующих амплитуд i_{m+}, i_{m-}, i_{m0} и фазовых сдвигов $\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0$ окончательно получаем

$$\text{scalP}_{ABC} = -\frac{1}{2} u_m ((i_{mA} \cos \varphi_A + 2i_m) + (i_{mA} \cos \varphi_A - i_m) \cos 2\omega t - i_{mA} \sin \varphi_A \sin 2\omega t),$$

$$q_A = 0,$$

$$q_B = \frac{1}{4} u_m (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A + \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A + (i_m - i_{mA} \cos \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A) \cos 2\omega t + (\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mA} \sin \varphi_A) \sin 2\omega t),$$

$$q_C = \frac{1}{4} u_m (i_{mA} \cos \varphi_A + \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A - i_m + (i_{mA} \cos \varphi_A - \sqrt{3} i_{mA} \sin \varphi_A - i_m) \cos 2\omega t + (\sqrt{3} i_m - \sqrt{3} i_{mA} \cos \varphi_A - i_{mA} \sin \varphi_A) \sin 2\omega t),$$

которые, как и в предыдущем случае, совпадают с аналитическими зависимостями вида (3.13), (3.15)–(3.17).

При симметричной линейной активно-реактивной нагрузке с одинаковым угловым смещением $\varphi \neq 0$ во всех трех фазах, применительно к которой справедливо [65]

$$i_+ = \frac{1}{3}(i_m \cos(\omega t + \varphi) + i_m \cos(\omega t + \varphi) + i_m \cos(\omega t + \varphi)) = i_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$i_- = i_0 = \frac{1}{3}(i_m \cos(\omega t + \varphi) + i_m \cos(\omega t + 120^\circ + \varphi) + i_m \cos(\omega t - 120^\circ + \varphi)) = 0,$$

получаем аналогичные формулам (3.7) и (3.8) расчетные соотношения

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -3U_{1+}I_{1+} \cos(-\varphi_{1+}) = -\frac{3}{2}u_m i_m \cos \varphi,$$

$$q_A = q_B = q_C = U_{1+}I_{1+} \sin \varphi_{1+} = \frac{\sqrt{3}}{2}u_m i_m \sin \varphi,$$

которые в случае $\varphi = 0$ вырождаются в равенства (3.4) и (3.5) соответственно, т.е.

$$\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} = -3U_{1+}I_{1+} = \bar{P}_{ABC}, \quad q_A = q_B = q_C = 0.$$

Таким образом, на основании представленного выше анализа гармонического состава кватерниона мгновенной мощности трехфазной линейной нагрузки при ее питании от источника с симметричной системой напряжений вида (3.1), можно сформулировать следующие основные подходы к практической реализации принципов энергосбережения [65].

1. Совместное исключение углового сдвига и нулевой последовательности фаз по всем гармоникам.

Данная прикладная задача решается за счет полной компенсации $\text{vest}\mathbf{P}_{ABC}$, вследствие чего потребляемые токи будут удовлетворять условию симметрии (1.2) с нулевым угловым смещением относительно соответствующих напряжений, однако при этом их мгновенная форма будет существенно отличаться от синусоидального вида, причем в силу $p_c(t) = 0$ исчезает необходимость использования в силовой схеме АСФ реактивных элементов для хранения и обмена электромагнитной энергией. При этом в случае симметричных линейных электрических цепей выполнение данного условия приводит к единичному коэффициенту мощности.

2. Исключение обратной последовательности фаз по всем членам тригонометрического ряда Фурье.

Сформулированный данным образом критерий энергоэффективности достигается за счет формирования на выходе силового полупроводникового устройства активной фильтрации кватерниона мгновенной мощности в следующем виде

$$\mathbf{P}_c = \text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}, \quad (4.38)$$

благодаря чему имеет место гармонический закон изменения i_{sA}, i_{sB}, i_{sC} , сумма текущих значений которых в любой момент времени не равна нулю.

3. Одновременное исключение обратной и нулевой последовательностей фаз по всем гармоникам.

Данное требование реализуется при помощи совместной компенсации $\text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}$ и векторной части $\mathbf{P}_{ABC}$ [59, 63, 67, 81, 176]

$$\mathbf{P}_c = \text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{ABC}, \quad (4.39)$$

вследствие чего в токах источника будет присутствовать только прямая последовательность фаз как в случае чисто резистивной нагрузки вне зависимости от конкретного вида несимметричных и/или нелинейных электрических цепей.

4. Генерирование реактивной мощности при синусоидальном законе изменения потребляемых токов.

При функционировании АСФ в качестве источника реактивной энергии, правая часть (4.39) дополняется вспомогательным членом $\Delta \text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}$, отвечающим за желаемый угловой сдвиг φ [79, 174]

$$\mathbf{P}_c = \text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{ABC} \pm \Delta \text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}, \quad (4.40)$$

благодаря чему мгновенная форма потребляемых токов будет повторять соответствующие напряжения с заданным смещением.

В заключении также необходимо отметить, что при отличии u_A, u_B, u_C от симметричной системы уравнений (3.1) необходимо переходить к решению компенсационной задачи с учетом всех слагаемых, входящих в (3.51)–(3.54) и (3.56)–(3.59) или использовать их прямую последовательность фаз вида (4.32). При этом, например, в случае трехпроводной сети с изолированной средней точкой, в токах нагрузки будет отсутствовать нулевая последовательность фаз, вследствие чего

все вещественные коэффициенты $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ будут удовлетворять равенству (3.48), что позволяет упростить структуру управляющей части силового полупроводникового устройства активной фильтрации.

4.4.2 Кватернионы активного и реактивного мгновенных токов трехфазной нагрузки

Учитывая тот факт, что математический аппарат четырехмерных гиперкомплексных чисел относится к алгебре с делением, то переход от кватерниона мгновенной мощности к токам можно выполнить в соответствии со следующей формулой [56, 63, 177]

$$\mathbf{I}_{ABC} = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{ABC}), \quad (4.41)$$

где $\mathbf{U}_{ABC}^{-1}$ – обратный кватернион фазных напряжений вида (1.19) с нормой

$$\|\mathbf{U}_{ABC}\| = u_A^2 + u_B^2 + u_C^2,$$

которая в случае системы уравнений вида (3.1) находится как

$$\|\mathbf{U}_{ABC}\| = \frac{3}{2} u_m^2 = \text{const}. \quad (4.42)$$

Воспользовавшись (4.41), $\mathbf{I}_{ABC}$ можно представить в виде следующей линейной комбинации [79, 174]

$$\mathbf{I}_{ABC} = \mathbf{I}_{ABC}^p + \mathbf{I}_{ABC}^q, \quad (4.43)$$

здесь $\mathbf{I}_{ABC}^p, \mathbf{I}_{ABC}^q$ – активная и реактивная составляющие соответственно

$$\mathbf{I}_{ABC}^p = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{scal}\mathbf{P}_{ABC},$$

$$\mathbf{I}_{ABC}^q = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{vect}\mathbf{P}_{ABC},$$

нормы которых связаны между собой на основании (3.11) как [67]

$$\|\mathbf{I}_{ABC}\| = \|\mathbf{I}_{ABC}^p\| + \|\mathbf{I}_{ABC}^q\| = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \|\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}\| + \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \|\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}\|.$$

В свою очередь, осуществляя переход к алгебраической форме записи (1.16) становится справедливым

$$\mathbf{I}_{ABC}^p = i_A^p \circ \mathbf{q}_1 + i_B^p \circ \mathbf{q}_2 + i_C^p \circ \mathbf{q}_3,$$

$$\mathbf{I}_{ABC}^q = (i_A - i_A^p) \circ \mathbf{q}_1 + (i_B - i_B^p) \circ \mathbf{q}_2 + (i_C - i_C^p) \circ \mathbf{q}_3,$$

где i_A^p, i_B^p, i_C^p – вещественные коэффициенты при мнимых единицах в $\mathbf{I}_{ABC}^p$ [176]

$$i_j^p = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ u_j \circ \text{scal} \mathbf{P}_{ABC},$$

причем в силу того, что в кватернионе мгновенного реактивного тока отсутствует действительная часть [56, 177]

$$\text{scal} \mathbf{I}_{ABC}^q = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (u_A q_A + u_B q_B + u_C q_C) = 0, \quad (4.44)$$

скалярные величины q_A, q_B, q_C в случае симметричной системы напряжений являются линейно-зависимыми.

Воспользовавшись математическим представлением $\mathbf{I}_{ABC}$ в виде (4.43) выполним анализ процессов в RLC-нагрузке с одинаковым полным сопротивлением $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ и аргументом $\varphi = \text{arctg}(xr^{-1})$ каждой из фаз при питании от источника с напряжениями (3.1), применительно которой с учетом (3.7) и (3.8) гиперкомплексная мгновенная мощность описывается следующим уравнением [79, 174]

$$\mathbf{P}_{ABC} = \frac{3}{2} \circ u_m^2 \circ z^{-1} \circ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \circ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) - \cos \varphi \circ 1 \right) = \text{const}, \quad (4.45)$$

откуда осуществляя при помощи (4.41) обратный переход к кватерниону фазных токов окончательно получаем

$$\mathbf{I}_{ABC}^p = u_m \circ z^{-1} \circ \cos \varphi \circ (\cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3),$$

$$\mathbf{I}_{ABC}^q = u_m \circ z^{-1} \circ \sin \varphi \circ (\cos(\omega t + 90^\circ) \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 30^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 210^\circ) \circ \mathbf{q}_3),$$

т.е. вещественные коэффициенты $\mathbf{I}_{ABC}^p$ и $\mathbf{I}_{ABC}^q$ подчиняются гармоническому закону вида (3.1), однако при этом имеют различные амплитуды и смещены относительно друг друга на четвертую часть периода $T = 2\pi\omega^{-1}$.

В частном случае чисто активного симметричного энергопотребления, из формулы (3.5) вытекает равенство $\mathbf{I}_{ABC}^q = 0$, в результате чего фазные токи повторяют по своей форме соответствующие напряжения

$$\mathbf{I}_{ABC} = u_m r^{-1} \circ (\cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3),$$

а при $r = 0$ из правой части (4.45) исключается последнее слагаемое

$$\mathbf{P}_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} u_m^2 \circ x^{-1} \circ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) = \text{const},$$

откуда

$$\mathbf{I}_{ABC} = \mathbf{I}_{ABC}^q = -u_m \circ x^{-1} \circ (\sin \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \sin(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \sin(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3).$$

Таким образом, на основании представленных выше результатов аналитического исследования линейной нагрузки с одинаковыми параметрами всех трех фаз в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ можно сделать следующие выводы [79]:

1. Индуктивные и/или емкостные элементы, по аналогии с классическими методами расчета цепей переменного тока, вызывают появление в кватернионе потребляемых токов реактивной составляющей $\mathbf{I}_{ABC}^q$, сдвинутой относительно $\mathbf{U}_{ABC}$ с вещественными коэффициентами u_A, u_B, u_C вида (3.1) на угол $\varphi = \pm 90^\circ$.

2. Мнимая часть $\mathbf{I}_{ABC}$ в общем случае зависит не только от углового сдвига φ , но и от амплитудной асимметрии и искажений в гармонической форме сигналов, по причине чего данная компонента должна быть полностью исключена из состава потребляемого тока.

3. В отличие от метода S. Fryze, описанного в главе 2, линейная комбинация (4.43) оперирует с мгновенными значениями, что в конечном итоге позволяет анализировать как статические, так и динамические режимы работы электротехнических и электромеханических систем.

В заключении также необходимо отметить, что при явно выраженном нелинейном характере процессов в составе $\mathbf{I}_{ABC}^p$ и $\mathbf{I}_{ABC}^q$, по аналогии с $i_d - i_q$ методом, можно также отдельно выделить составляющие в функции основной частоты питающего напряжения

$$\bar{\mathbf{I}}_{ABC}^p = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}, \quad \bar{\mathbf{I}}_{ABC}^q = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC},$$

а также отличные от них мультигармонические компоненты

$$\tilde{\mathbf{I}}_{ABC}^p = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{scal} \tilde{\mathbf{P}}_{ABC}, \quad \tilde{\mathbf{I}}_{ABC}^q = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{vect} \tilde{\mathbf{P}}_{ABC}$$

в результате чего каждый член линейной комбинации (4.43) можно представить в виде суммы двух слагаемых [174]

$$\mathbf{I}_{ABC}^p = \bar{\mathbf{I}}_{ABC}^p + \tilde{\mathbf{I}}_{ABC}^p, \quad \mathbf{I}_{ABC}^q = \bar{\mathbf{I}}_{ABC}^q + \tilde{\mathbf{I}}_{ABC}^q,$$

причем из формулы (3.4) для расчета кватерниона мгновенной мощности чисто резистивной трехфазной нагрузки следует, что $\bar{\mathbf{I}}_{ABC}^p$ выступает в качестве эталона энергопотребления.

4.4.3 Задача об условном экстремуме нормы кватерниона фазных токов

Основываясь на описанном выше теоретическом приеме к выделению в кватернионе $\mathbf{I}_{ABC}$ активной и реактивной частей, далее рассмотрим решение прикладной задачи об условном экстремуме следующего функционала качества [79, 174]

$$f(\|\mathbf{I}_{ABC}^p\|) = \mathbf{I}_{ABC}^p \circ \hat{\mathbf{I}}_{ABC}^p = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\text{scal} \mathbf{P}_{ABC})^2, \quad (4.46)$$

с ограничением в виде преобразованного уравнения связи (4.44)

$$\varphi(\mathbf{I}_{ABC}^q) = \mathbf{U}_{ABC} \circ \mathbf{I}_{ABC}^q - \text{vect} \mathbf{P}_{ABC} = 0.$$

Воспользовавшись методом множителей Лагранжа с функцией [85]

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_{ABC}^q) \circ (\hat{\mathbf{I}}_{ABC} - \hat{\mathbf{I}}_{ABC}^q) + \psi \circ \varphi(\mathbf{I}_{ABC}^q),$$

где ψ – множитель Лагранжа,

экстремальное значение (4.46) достигается при выполнении следующего необходимого условия

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{I}_{ABC}^q} = \hat{\mathbf{I}}_{ABC}^q - \hat{\mathbf{I}}_{ABC} + \psi \circ \mathbf{U}_{ABC} = 0, \quad (4.47)$$

из которого после умножения на $\mathbf{U}_{ABC}^{-1}$ получаем

$$\psi = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \text{scal}\mathbf{P}_{ABC},$$

или окончательно с учетом того, что (4.47) не изменится после математической операции сопряжения

$$\mathbf{I}_{ABC}^q = \mathbf{I}_{ABC} - \frac{\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}}{\|\mathbf{U}_{ABC}\|} \circ \hat{\mathbf{U}}_{ABC} = \mathbf{I}_{ABC} + \frac{\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}}{\|\mathbf{U}_{ABC}\|} \circ \mathbf{U}_{ABC}.$$

Таким образом, формируя на выходе АСФ компенсационные воздействия в соответствии с оптимальным законом управления

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \text{vect}\mathbf{P}_{ABC} = \mathbf{I}_{ABC}^q, \quad (4.48)$$

потребляемые от источника фазные токи будут подчиняться следующей аналитической зависимости

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\frac{\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}}{\|\mathbf{U}_{ABC}\|} \circ \mathbf{U}_{ABC}, \quad (4.49)$$

причем в силу выполнения равенства

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{U}_{ABC} \circ \mathbf{I}_c = \text{vect}\mathbf{P}_{ABC},$$

представляется возможным в идеализированном случае исключить из силовой схемы полупроводникового устройства активной фильтрации элементы, служащие для хранения и обмена электромагнитной энергией [176].

Техническая реализация оптимального в рамках квадратичного критерия (4.46) алгоритма управления АСФ вида (4.48) при симметричной системе напряжений позволит полностью исключить активные потери в нулевом проводе, однако, как следует из выводов раздела 4.4.1, наличие в вещественных коэффициентах $\mathbf{I}_s$ обратной последовательности фаз приведет к тому, что их мгновенная форма будет существенно отличаться от гармонического закона. В заключении также необходимо отметить, что соотношение (4.49) совпадает с аналогичным результатом минимизации обобщенного тока S. Fryze вида (2.19), но в отличие от него является функцией мгновенных значений фазных переменных и не зависит от усредненной за период T величины мощности.

4.4.4 Синтез алгоритмов компенсации с использованием гиперкомплексных чисел

Аналитическая процедура определения компенсационных воздействий с использованием гиперкомплексного пространства $\mathbf{H}$ основывается на предварительном формировании кватерниона неэффективной (неактивной) мгновенной мощности $\mathbf{P}_c$, переход от которого к выходным токам полупроводникового устройства активной фильтрации базируется на формуле (4.41) и в наиболее общем случае имеет следующий вид [64, 120, 166]

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \mathbf{P}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \mathbf{U}_{ABC} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_c + \text{vect}\mathbf{P}_c). \quad (4.50)$$

В итоге, выполняя по аналогии с законом компенсации (4.22) учет среднеквадратичных потерь в силовой части АСФ за счет дополнения $\mathbf{P}_c$ соответствующей скалярной гиперкомплексной величиной $\Delta\bar{p}_c$ [67, 78, 81], вещественные коэффициенты при мнимых единицах $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ в (4.50) находятся как [56]

$$i_{cA} = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (u_C \circ q_{cB} - u_B \circ q_{cC} - u_A \circ (\text{scal}\mathbf{P}_c - \Delta\bar{p}_c)),$$

$$i_{cB} = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (u_A \circ q_{cC} - u_C \circ q_{cA} - u_B \circ (\text{scal}\mathbf{P}_c - \Delta\bar{p}_c)),$$

$$i_{cC} = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (u_B \circ q_{cA} - u_A \circ q_{cB} - u_C \circ (\text{scal}\mathbf{P}_c - \Delta\bar{p}_c)).$$

Далее, остановимся на более подробном анализе правой части (4.50) применительно к описанным ранее в разделе 4.4.1 четырем различным критериям энергоэффективности в случае симметричной гармонической системы напряжений вида (3.1).

1. Коррекция углового сдвига φ в линейных активно-реактивных электрических цепях с одинаковым полным сопротивлением всех фаз z , которая в соответствии с формулой (3.8) имеет место в случае

$$\mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \mathbf{U}_{ABC} \circ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_m \sin \varphi \circ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) - \Delta\bar{p}_c \right), \quad (4.51)$$

в результате чего кватернион токов источника с учетом (3.4) и (3.7) принимает

следующий вид

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{\mathbf{p}}_c) \circ \mathbf{U}_{ABC},$$

или в алгебраической форме записи (1.16) при использовании равенства (4.42)

$$\mathbf{I}_s = \frac{3u_m^2 z^{-1} - 2\Delta \bar{\mathbf{p}}_c}{3u_m} \circ (\cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3).$$

В качестве графической иллюстрации переходных процессов в трехфазной системе с коррекцией коэффициента мощности применительно к симметричной RLC-нагрузке с $\varphi = -20^\circ$, на рисунке 4.16 изображены временные зависимости вещественных коэффициентов $\mathbf{I}_s$ и напряжений сети вида (3.1) с $u_m = \sqrt{2} \cdot 220$ В при следующих параметрах силовой части АСФ: индуктивность сглаживающих дросселей 3,5 мГн; стабилизированное напряжение конденсаторной батареи $u_{dc} = 2,1 \cdot u_m$; частота коммутации полупроводниковых ключей $f_0 = 5$ кГц. Как видно из приведенных результатов цифрового моделирования в программе “MATLAB” R2008b, при вступлении в работу алгоритма активной фильтрации (4.51) происходит исключение углового смещения и, как следствие, снижение активных потерь.

2. Исключение обратной последовательности фаз по всем гармоникам, достигаемая в рамках выбора $\mathbf{P}_c$ в виде (4.38), при котором

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal} \tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect} \tilde{\mathbf{P}}_{ABC} - \Delta \bar{\mathbf{p}}_c),$$

или иначе

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{\mathbf{p}}_c). \quad (4.52)$$

Из (4.52) следует, что компенсационные воздействия на выходе АСФ формируются в соответствии со следующим непрерывным законом

$$i_{cA} = i_A + \frac{2}{3} u_m^{-2} \circ (u_B \circ \bar{q}_C - u_C \circ \bar{q}_B + u_A \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{\mathbf{p}}_c)),$$

$$i_{cB} = i_B + \frac{2}{3} u_m^{-2} \circ (u_C \circ \bar{q}_A - u_A \circ \bar{q}_C + u_B \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{\mathbf{p}}_c)),$$

$$i_{cC} = i_C + \frac{2}{3} u_m^{-2} \circ (u_A \circ \bar{q}_B - u_B \circ \bar{q}_A + u_C \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{\mathbf{p}}_c)),$$

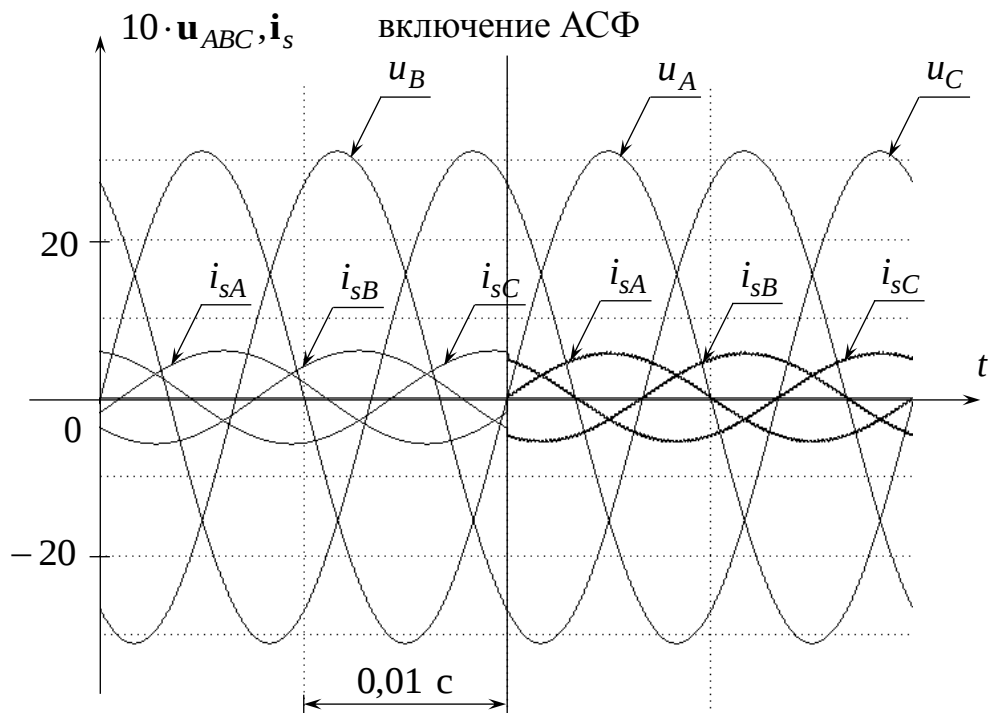


Рисунок 4.16 – Фазные напряжения и токи источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации (4.51)

здесь $\bar{q}_A, \bar{q}_B, \bar{q}_C$ – постоянные составляющие вещественных коэффициентов перед мнимыми единицами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ кватерниона $\mathbf{P}_{ABC}$,

откуда

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \mathbf{U}_{ABC} \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c).$$

3. Исключение нулевой последовательности фаз по всем гармоникам с одновременным устранением углового сдвига φ , совпадающее с результатом минимизации квадратичного функционала (4.46) в рамках решения задачи об условном экстремуме, которое после дополнения (4.48) слагаемым $\Delta\bar{p}_c$ принимает следующий вид

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{vect}\mathbf{P}_{ABC} - \Delta\bar{p}_c),$$

или окончательно

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\mathbf{P}_{ABC} - \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} - \Delta\bar{p}_c) = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c). \quad (4.53)$$

Техническая реализация $\mathbf{I}_c$ сопровождается формированием компенсационных воздействий в каждой фазе на основании следующей аналитической зависимости

$$i_{cj} = i_j + \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c) \circ u_j = i_j + \frac{2}{3} u_m^{-2} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c) \circ u_j,$$

вследствие чего кватернион токов источника будет зависеть от $\text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC}$, которая в общем случае носит сложный нелинейный характер

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c) \circ \mathbf{U}_{ABC}.$$

4. Обеспечение гармонического закона потребляемых токов с нулевым угловым сдвигом φ относительно соответствующего напряжения, реализуемое за счет выбора компенсируемого при помощи АСФ кватерниона мгновенной неэффективной мощности в соответствии с равенством (4.39), на основании которого [67, 177]

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal}\tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{ABC} - \Delta\bar{p}_c) = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c), \quad (4.54)$$

или в более общем виде после использования формул (2.74) и (3.3)

$$i_{cj} = i_j + \frac{2 \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{p}_c)}{3 \circ u_m} \circ (\cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3).$$

При технической реализации (4.54) из состава мгновенной мощности источника исключаются нулевая и обратная последовательности фаз по всем элементам разложения $\mathbf{P}_{ABC}$ в тригонометрический ряд Фурье, в результате чего потребляемые токи будут однозначно определяться симметричной системой напряжений вида (3.1) [63, 78]

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{p}_c) \circ \mathbf{U}_{ABC},$$

или в развернутом виде

$$\mathbf{I}_s = i_{sm} \cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + i_{sm} \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + i_{sm} \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3,$$

где i_{sm} – максимальное мгновенное значение

$$i_{sm} = -\frac{2}{3} \circ \frac{\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{p}_c}{u_m}.$$

5. Генерация реактивной мощности при гармоническом законе изменения вещественных коэффициентов $\mathbf{I}_s$, в рамках которой алгоритм активной фильтрации с учетом формул (3.2) и (4.40) описывается следующей аналитической зависимостью

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ (\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} \mp \Delta \text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta \bar{p}_c), \quad (4.55)$$

где $\Delta \text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC} = Q_c \circ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)$ – векторная часть $\mathbf{P}_c$, задающая требуемое угловое смещение φ , в которой скалярная величина Q_c определяется на основании (3.8) как

$$Q_c = \frac{\sqrt{3}}{2} u_m i_{sm} \sin \varphi. \quad (4.56)$$

Правая часть (4.56) включает в себя неизвестное амплитудное значение i_{sm} , для нахождения которого воспользуемся выражением (3.11)

$$\|\mathbf{I}_s\| = \|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ (\|\text{scal} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}\| + \|\Delta \text{vect} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}\|),$$

которое с помощью (3.9) и (4.42) можно также представить в форме квадратичных функций

$$\frac{3}{2}i_{sm}^2 = \frac{2}{3u_m^2} \circ \left((\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c)^2 + \frac{9}{4}u_m^2 i_{sm}^2 \sin^2 \varphi \right).$$

В итоге, выражая неизвестный параметр

$$i_{sm} = \frac{2}{3u_m} \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c) \circ \cos^{-1} \varphi$$

и выполняя его подстановку в (4.56) окончательно получаем [177]

$$\Delta\text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} = \frac{\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c}{\sqrt{3}} \circ \text{tg} \varphi \circ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3).$$

Таким образом, при формировании на выходе параллельного АСФ компенсационных воздействий в соответствии с законом управления (4.55), который применительно к каждой фазе имеет следующий вид

$$i_{cA} = i_A + \frac{2}{3}u_m^{-2} \circ ((\mp Q_c) \circ (u_B - u_C) + u_A \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c)),$$

$$i_{cB} = i_b + \frac{2}{3}u_m^{-2} \circ ((\mp Q_c) \circ (u_C - u_A) + u_B \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c)),$$

$$i_{cC} = i_C + \frac{2}{3}u_m^{-2} \circ ((\mp Q_c) \circ (u_A - u_B) + u_C \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c)),$$

удается добиться опережающего или отстающего коэффициента мощности при гармонической форме мгновенных сигналов i_{sA}, i_{sB}, i_{sC} , описываемых уравнением

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{ABC} - \mathbf{I}_c = -\|\mathbf{U}_{ABC}\|^{-1} \circ \mathbf{U}_{ABC} \circ (\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} \mp \Delta\text{vect}\bar{\mathbf{P}}_{ABC} + \Delta\bar{p}_c).$$

Синтезированные выше алгоритмы активной фильтрации (4.51)–(4.55), по аналогии с $i_d - i_q$ методом (см. подраздел 4.3.3), могут также реализовываться без промежуточного вычисления компенсируемых составляющих уравнения баланса мгновенных мощностей (3.2) за счет применения линейной комбинации (4.43). Так, например, закон управления АСФ вида (4.54) на основании постулированных определений кватернионов активного и реактивного токов преобразуется к следующему виду [177]

$$\mathbf{I}_c = \tilde{\mathbf{I}}_{ABC}^p + \mathbf{I}_{ABC}^q - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \Delta\bar{p}_c = \mathbf{I}_{ABC} - \bar{\mathbf{I}}_{ABC}^p - \mathbf{U}_{ABC}^{-1} \circ \Delta\bar{p}_c, \quad (4.57)$$

в котором составляющая $\bar{\mathbf{I}}_{ABC}^p$ выделяется из $\mathbf{I}_{ABC}$ при помощи специальной динамической подсистемы низкочастотной фильтрации [79, 174].

В целях верификации синтезированных алгоритмов активной фильтрации (4.52)–(4.55), в приложении “Simulink” программного продукта “MATLAB” R2008b было выполнено цифровое моделирование режимов работы трехфазной системы с компенсацией различного рода неактивных составляющих кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ с параметрами силовой схемы, описанными ранее применительно к рисунку 4.16. В качестве нелинейного потребителя электрической энергии выступала активно-реактивная нагрузка из раздела 3.2, в которой фаза B была дополнена полупроводниковым вентилем, что иллюстрирует рисунок 4.17.

Как видно из представленных временных зависимостей i_{sA}, i_{sB}, i_{sC} , практическое применение синтезированных алгоритмов активной фильтрации, как в линейных, так и в нелинейных цепях, позволяет уменьшить амплитуду потребляемых токов i_{sm} с одновременным полным или частичным исключением среднеквадратичных потерь в нулевом проводе и, таким образом, добиться повышения энергоэффективности трехфазных систем передачи, распределения и преобразования электрической энергии.

В заключении также необходимо отметить, что структура управляющей части АСФ с законами компенсации (4.51)–(4.55) является более простой, чем при использовании методов синтеза на основе постулированных определений современных теорий мгновенной мощности вида (4.22), (4.23), (4.25), (4.26), (4.28)–(4.30), что позволяет выполнять формирование кватерниона задающих воздействий $\mathbf{I}_c^*$ на менее производительной программно-аппаратной базе или с более высоким быстродействием без привлечения какого-либо ортогонального преобразования фазных переменных [63, 79, 174].

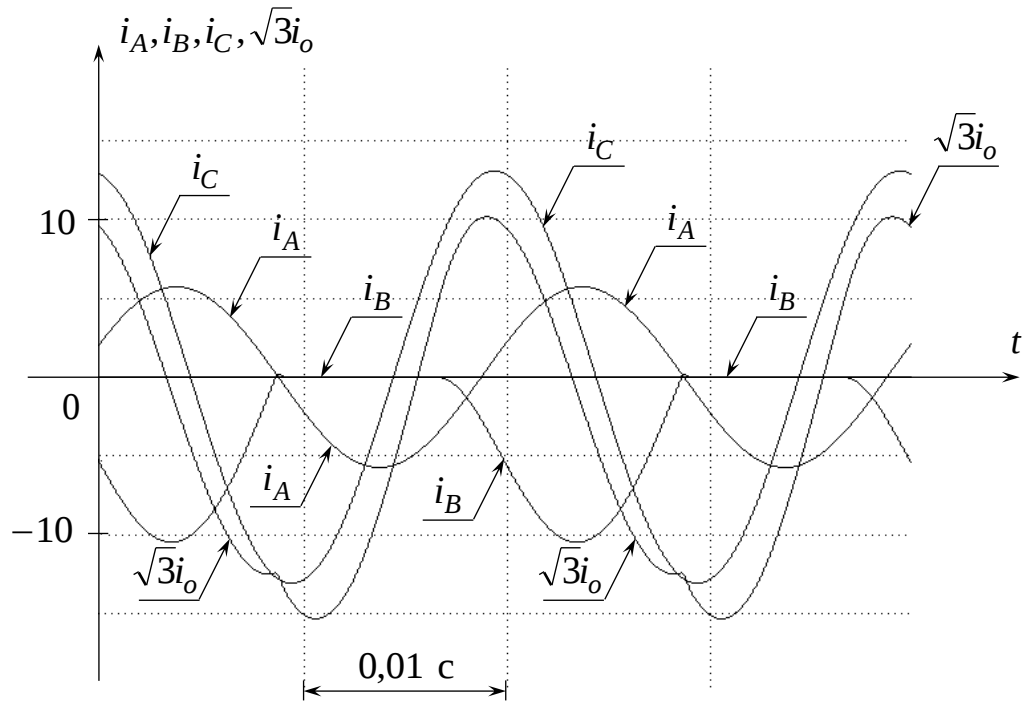


Рисунок 4.17 – Токи трехфазной нелинейной нагрузки
с нулевым проводом

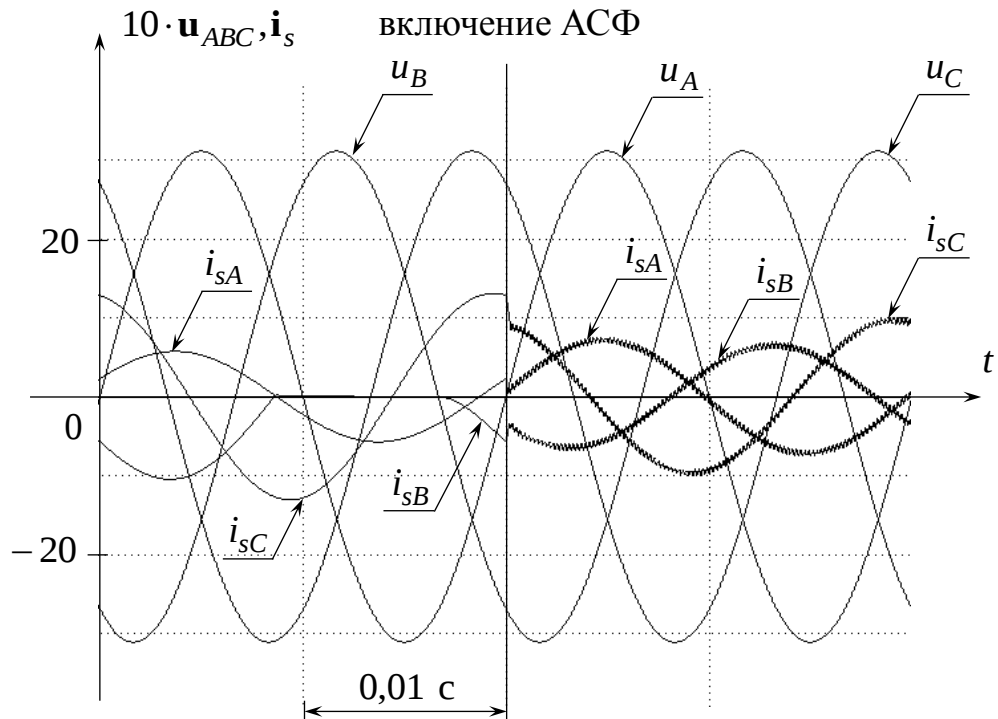


Рисунок 4.18 – Фазные напряжения и токи источника до и после
включения в работу АСФ с алгоритмом компенсации (4.52)

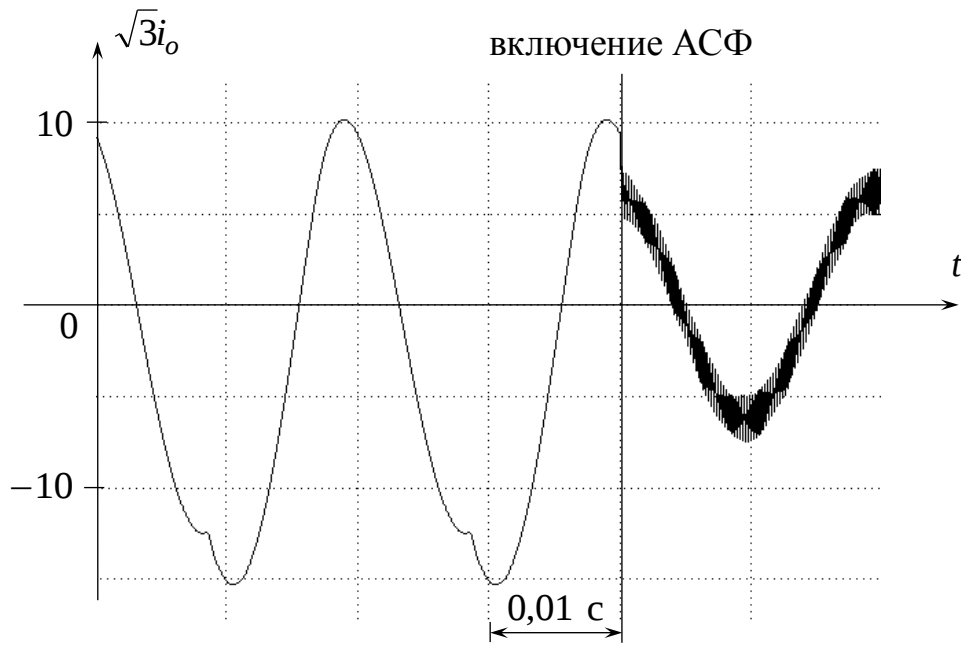


Рисунок 4.19 – Ток в нулевом проводе до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации (4.52)

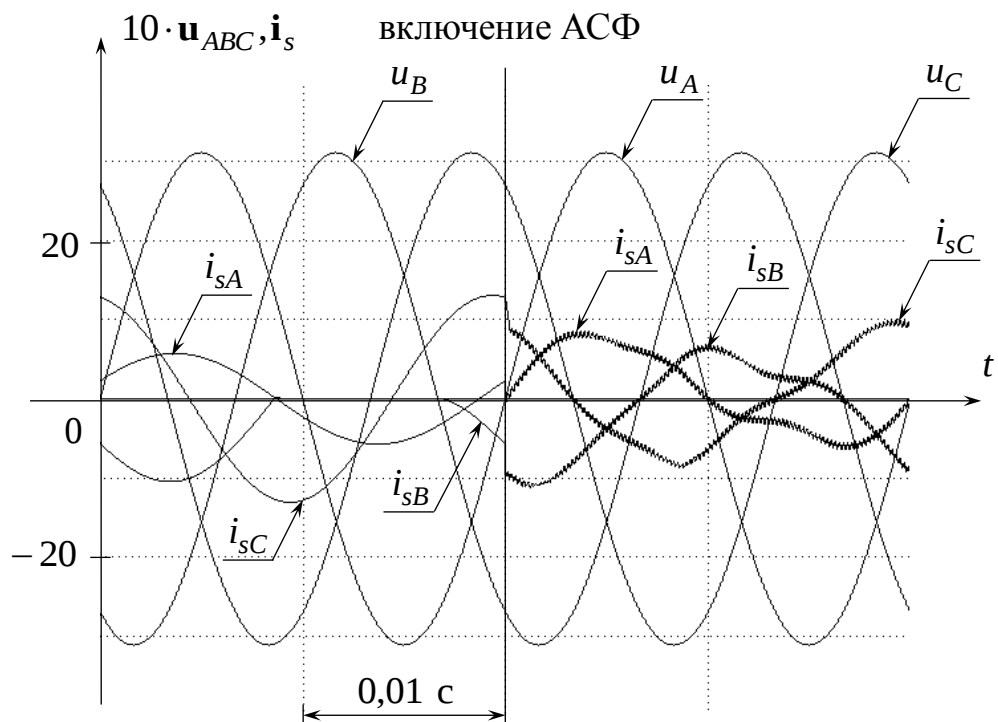


Рисунок 4.20 – Фазные напряжения и токи источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации (4.53)

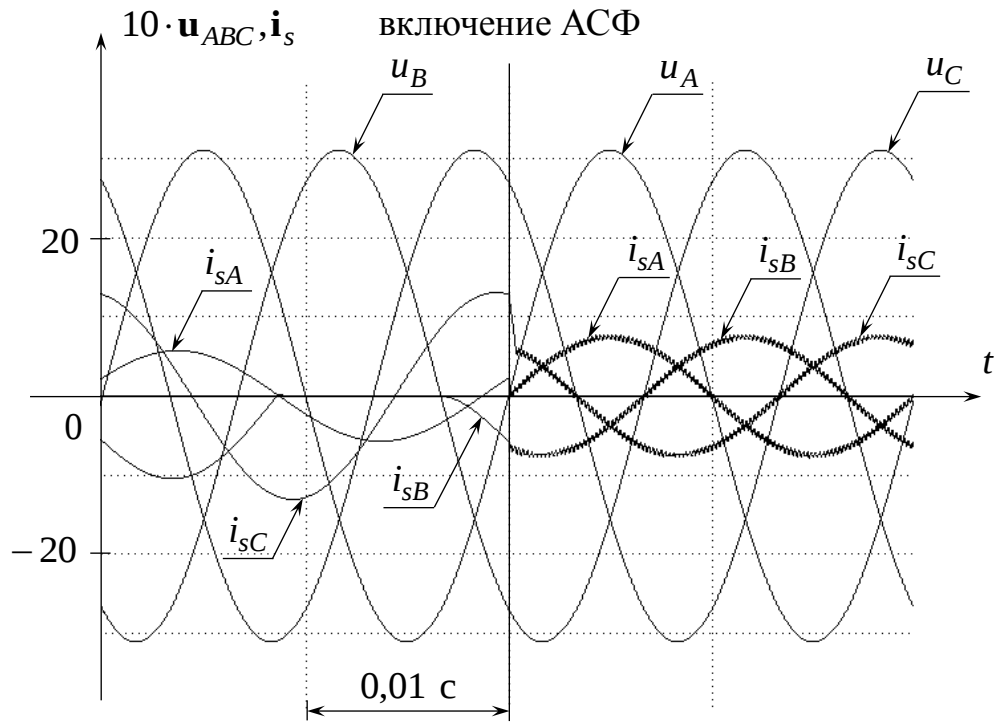


Рисунок 4.21 – Фазные напряжения и токи источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации (4.54)

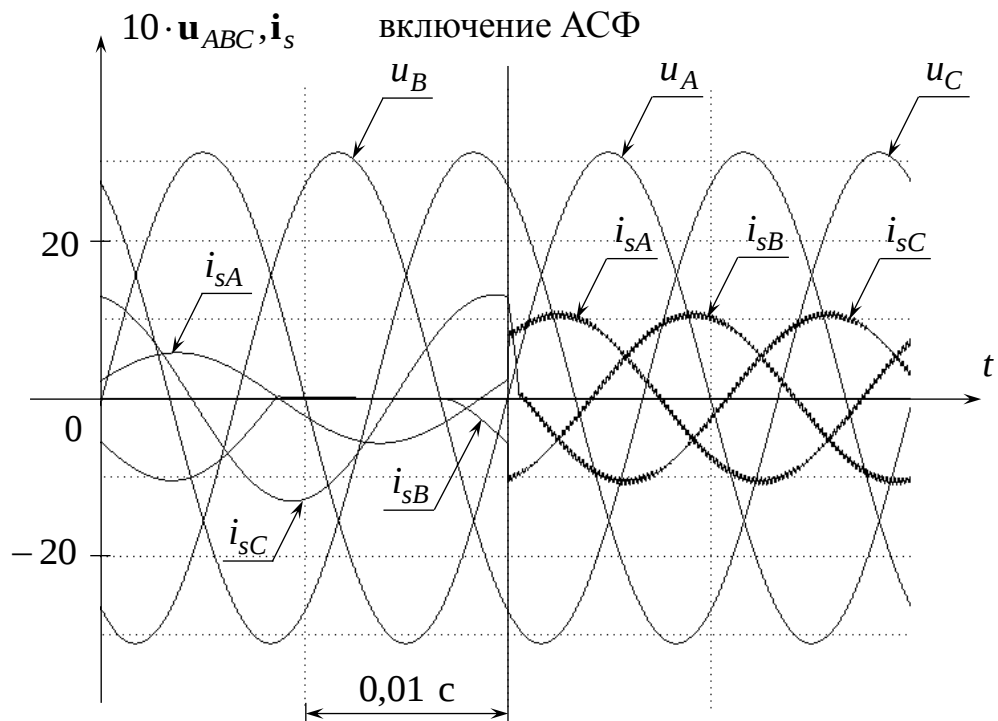


Рисунок 4.22 – Фазные напряжения и токи источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации (4.55)

при $\varphi = 45^\circ$

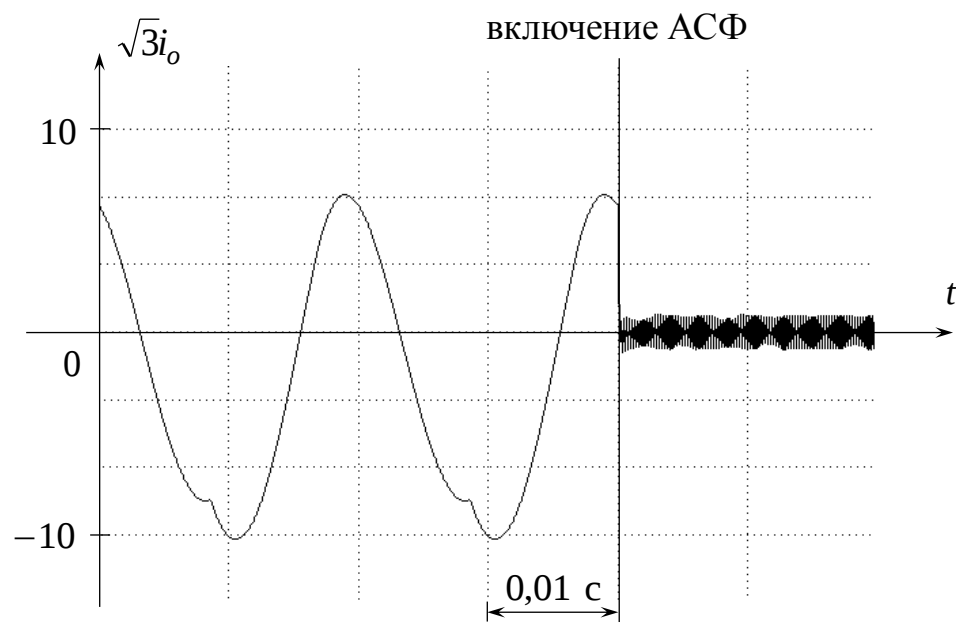


Рисунок 4.23 – Ток в нулевом проводе до и после момента включения АСФ с алгоритмами компенсации (4.53)–(4.55)

4.5 Техническая реализация синтезированных законов управления активными силовыми фильтрами

4.5.1 Динамические подсистемы оценки постоянных составляющих скалярной и мнимой частей кватерниона мгновенной мощности

Численный расчет токов компенсации i_{cA}, i_{cB}, i_{cC} вида (4.52), (4.54) и (4.55) основывается на использовании постоянных составляющих вещественных коэффициентов $\mathbf{P}_{ABC}$, текущая информация о которых получается на выходе специальной подсистемы низкочастотной фильтрации, динамика которой в наиболее общем случае описывается следующим дифференциальным уравнением в операторной форме записи [128]

$$\bar{y}(t) = W(p)y(t),$$

где $y(t)$ – непрерывная функция времени; $W(p)$ – передаточная функция с характеристическим полиномом [17]

$$D(p) = p^n + A_{n-1}\Omega p^{n-1} + \dots + A_1\Omega^{n-1}p + \Omega^n, \quad (4.58)$$

здесь A_f , $f = \overline{1, n-1}$ – коэффициенты формы; Ω – среднегеометрический корень, определяющий быстроедействие переходных процессов при выделении $\bar{y}(t)$, откуда изменяющаяся во времени компонента находится как [78, 79, 174, 176]

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}(t) = (1 - W(p))y(t).$$

В качестве желаемого расположения корней характеристического полинома $D(p)$ на комплексной плоскости, которое однозначно определяет прямые показатели качества переходных процессов по $\bar{y}(t)$, можно принять одну из стандартных линейных форм соответствующего порядка, например, настройку на фильтр Бесселя [88] или Баттерворта [183].

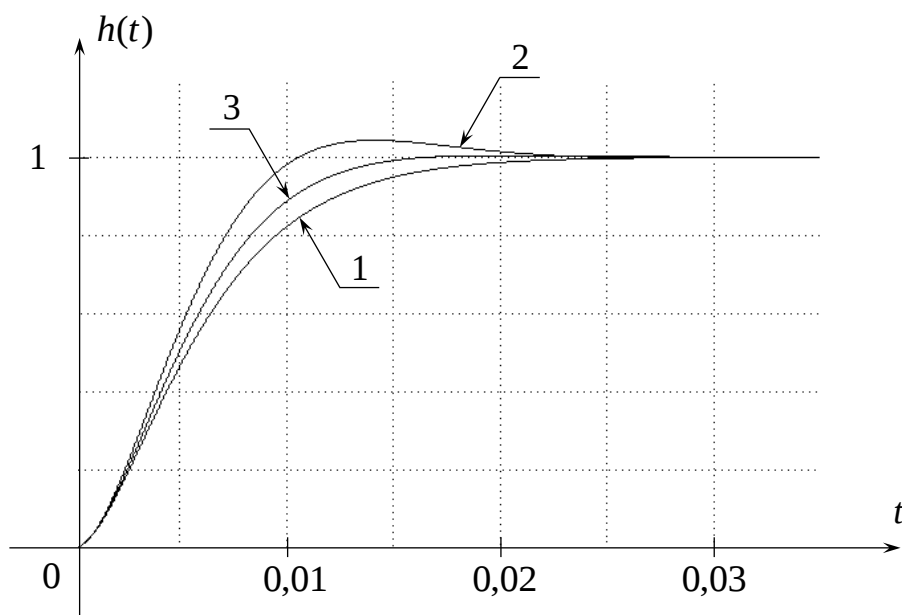


Рисунок 4.24 – Переходные процессы выделения постоянной составляющей вещественных коэффициентов $\mathbf{P}_{ABC}$ при различных численных значениях A_1

Наличие большого числа слагаемых в правой части (4.58) приводит к улучшению гармонического спектра $\bar{y}(t)$ за счет резкого спада крайней правой асимптотической прямой ЛАЧХ. В тоже время при $n \geq 4$ существенно возрастает время регулирования [85] с одновременным увеличением количества выполняемых математических операций, в связи чем наиболее целесообразным вариантом построения динамической подсистемы оценки является ее реализация в виде стационарного колебательного звена с единичным коэффициентом передачи и характеристическим полиномом [177]

$$D(p) = p^2 + A_1 \Omega p + \Omega^2, \quad (4.59)$$

в котором величина среднегеометрического корня выбирается из условия ее равенства половине частоты основной гармоники ω [199, 200].

На рисунке 4.24 изображены переходные характеристики выделения постоянной составляющей входного сигнала при $\Omega = 50 \cdot \pi \text{ с}^{-1}$ и настройке (4.59) на биномиальное распределение корней с $A_1 = 2$ (кривая 1), а также на фильтры Баттерворта с $A_1 = \sqrt{2}$ (кривая 2) и Бесселя с $A_1 = \sqrt{3}$ (кривая 3).

4.5.2 Синтез астатического контура регулирования напряжения звена постоянного тока

Техническая реализация алгоритмов компенсации вида (4.51)–(4.55) в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ сопровождается необходимостью решения частной задачи синтеза, связанной со стабилизацией напряжения в звене постоянного тока, для решения которой воспользуемся приближенной аналитической зависимостью, описывающей приращение энергии электрического поля в силовом емкостном фильтре АСФ за малый временной интервал [186, 204]

$$\Delta W = C \frac{(u_{dc}^*)^2 - u_{dc}^2}{2} \approx C u_{dc}^* \Delta u_{dc},$$

где $\Delta u_{dc} = u_{dc}^* - u_{dc}$ – отклонение текущего напряжения конденсаторной батареи u_{dc} от желаемого состояния $u_{dc}^* = \text{const}$,

или переходя к уравнению баланса [138]

$$Cu_{dc}^* \Delta u_{dc} \approx \int_0^T u_{dc} i_{dc} dt = \int_0^T (p_c - \Delta \bar{p}_c) dt, \quad (4.60)$$

причем среднее значение мгновенной мощности компенсации $p_c(t)$ в соответствии с (4.18) равно нулю.

Как следует из последнего приближенного равенства, приращение Δu_{dc} за рассматриваемый временной промежуток T линейно зависит от величины $\Delta \bar{p}_c$, которая при фазных напряжениях вида (3.1) удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_0^T \Delta \bar{p}_c dt = \int_0^T u_m \Delta i_{mc} (\cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t - 120^\circ) + \cos^2(\omega t + 120^\circ)) dt = \frac{3}{2} u_m \Delta i_{mc} T, \quad (4.61)$$

где Δi_{mc} – максимальное мгновенное значение активного гармонического тока, определяемое с учетом левой части (4.60) как

$$\Delta i_{mc} = \frac{2}{3} \frac{Cu_{dc}^*}{u_m T} \Delta u_{dc}.$$

На основании последнего равенства можно заключить, что при формировании на выходе АСФ трехфазной симметричной системы токов с амплитудой Δi_{mc} и нулевым угловым сдвигом относительно соответствующих напряжений u_A, u_B, u_C достигается полная компенсация активных потерь $\Delta \bar{p}_c$ за период колебания T , следствием чего является поддержание на заданном уровне среднего значения напряжения на емкостном фильтре C с одновременным выполнением ограничения (4.18).

Синтез непрерывного алгоритма управления u_{dc} выполним в рамках принципов подчиненного регулирования [162] и последовательной коррекции [89] при пренебрежении электромагнитными процессами в силовых цепях АСФ. В этом случае, воспользовавшись последним дифференциальным уравнением

системы (4.2) в операторной форме записи и приближенным равенством (4.60), получаем следующую аналитическую зависимость, описывающую поведение во времени выходной координаты [57, 175, 178]

$$u_{dc} = \frac{k_c}{p}(p_c - \Delta \bar{p}_c), \quad (4.62)$$

где $k_c = (Cu_{dc}^*)^{-1}$ – коэффициент передачи интегрирующего звена.

В соответствии с (4.62) структурная схема контура регулирования u_{dc} примет вид, изображенный на рисунке 4.25, на котором используются следующие обозначения: **УФЗ** – безынерционный узел формирования кватерниона гармонических задающих воздействий $\Delta \mathbf{I}_c^*$; **КРТ** – внутренний трехканальный контур регулирования выходных токов АСФ, динамика которого в соответствии с принятым допущением описывается безынерционным звеном с коэффициентом передачи k_i^{-1} ; **УВ** – датчик напряжения с коэффициентом k_u ; **РН** – ПИ-регулятор с передаточной функцией вида

$$W_{\text{РН}}(p) = k_{\text{РН}} \frac{T_{\text{РН}} p + 1}{p},$$

которая совпадает с (4.4).

На основании правил структурного преобразования линейных непрерывных систем передаточная функция контура в замкнутом состоянии принимает следующий вид

$$W_{\text{крн}}(p) = \frac{k_u^{-1}(T_{\text{РН}} p + 1)}{\frac{k_i}{k_{\text{РН}} k_c} p^2 + T_{\text{РН}} p + 1} = \frac{k_u^{-1}(T_{\text{РН}} p + 1)}{T_{\text{крн}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{крн}} T_{\text{крн}} p + 1}, \quad (4.63)$$

в котором численное значение постоянной времени выбирается из неравенства [57, 175]

$$T_{\text{крн}} \gg \omega_{\text{ПН}}^{-1}.$$

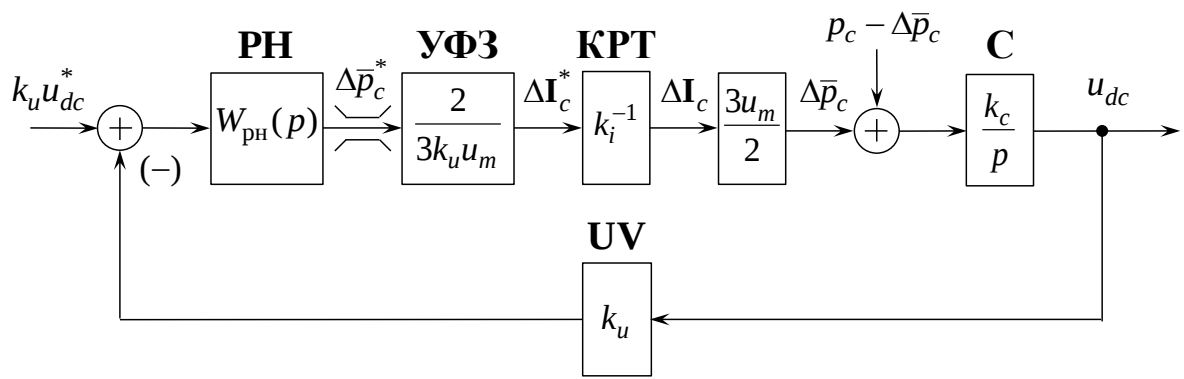


Рисунок 4.25 – Структурная схема контура регулирования u_{dc}

в замкнутом состоянии

Таким образом, осуществляя выбор $\xi_{\text{крн}}$ из условия нормированного распределения корней характеристического полинома на комплексной плоскости, параметры ПИ-регулятора напряжения **РН** находятся как

$$k_{\text{рн}} = \frac{k_i}{k_c T_{\text{крн}}^2} = \frac{Cu_{dc}^* k_i}{T_{\text{крн}}^2}, \quad T_{\text{рн}} = 2\xi_{\text{крн}} T_{\text{крн}}. \quad (4.64)$$

Далее, остановимся более подробно на рассмотрении структурно-алгоритмических принципов построения блока **УФЗ**, предназначенного для формирования кватерниона задающих воздействий $\Delta \mathbf{I}_c^* = k_i \circ \Delta \mathbf{I}_c$ на внутренний трехканальный контур регулирования **КРТ**. Гармонический закон изменения во времени вещественных коэффициентов данного гиперкомплексного числа однозначно определяется системой уравнений вида (3.1) и с учетом (4.42) имеет следующий вид

$$\Delta i_{cj}^* = -\frac{2\Delta \bar{p}_c^*}{3k_u u_m^2} \circ u_j,$$

где $\Delta \bar{p}_c^* = k_u \circ \mathbf{U}_{ABC} \circ k_i \circ \Delta \mathbf{I}_c$ – выход ПИ-регулятора напряжения **РН**.

Техническая реализация последнего равенства осуществляется путем формирования добавки $-\Delta \bar{p}_c^*$ к скалярной части $\text{scal} \mathbf{P}_c$, в результате чего токи компенсации содержат в своем составе дополнительную составляющую

$$\Delta \mathbf{I}_c = \Delta i_{cm} \circ (\cos \omega t \circ \mathbf{q}_1 + \cos(\omega t - 120^\circ) \circ \mathbf{q}_2 + \cos(\omega t + 120^\circ) \circ \mathbf{q}_3),$$

где Δi_{cm} – амплитудное значение, определяемое в соответствии с (4.61) как

$$\Delta i_{cm} = -\frac{2}{3u_m} \Delta \bar{p}_c.$$

В целях проверки правильности результатов синтеза астатического контура регулирования u_{dc} было выполнено цифровое моделирование процесса управляемого заряда конденсаторной батареи емкостью $C = 2,35 \text{ мФ}$ от начального значения 605 В до величины 625 В при симметричной системе гармонических напряжений вида (3.1) с амплитудой $u_m = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ В}$, что иллюстрирует рисунок 4.26.

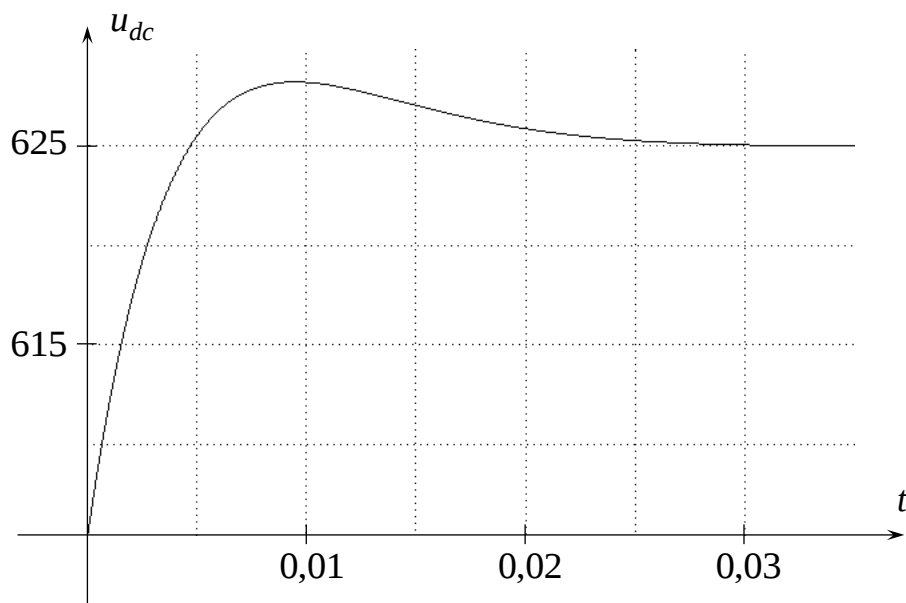


Рисунок 4.26 – Переходной процесс “в малом”
по управляющему воздействию

Как видно из представленной временной зависимости, полученной для случая настройки полюсов (4.63) на стандартную линейную форму Бесселя второго порядка со следующими параметрами [85, 88]:

$$T_{\text{крн}} = (2\pi \cdot 3,5)^{-1} \text{ с}, \quad \xi_{\text{крн}} = \sqrt{3}/2, \quad (4.65)$$

изменение во времени выходной координаты u_{dc} протекает с желаемым качеством переходных процессов и нулевой статической ошибкой, а некоторое увеличение перерегулирования объясняется наличием “левого” нуля в $W_{\text{крн}}(p)$.

Таким образом, организация в системе управления АСФ двухконтурной структуры подчиненного регулирования по каналу формирования скалярной части $\mathbf{P}_c$ обеспечивает компенсацию неэффективных потоков электрической энергии в единицу времени в совокупности со стабилизацией напряжения в звене постоянного тока.

В заключении также необходимо отметить, что другим структурным подходом к учету в законах управления (4.51)–(4.55) среднеквадратичных потерь в силовых цепях АСФ является применение стационарного апериодического звена [151] с постоянной времени 1,5 с [128], выход которого отвечает за текущую величину $\Delta \bar{p}_c$.

4.5.3 Алгоритмы управления активным силовым фильтром в преобразованных координатах состояния

При параллельном подключении АСФ относительно нагрузки в трехфазной системе с нейтральным проводом, силовая часть инвертора которого построена по схеме four-leg full-bridge [201], при регулировании токов компенсации необходима информация о нулевой составляющей $\mathbf{I}_c$, получаемой после подобного линейного преобразования вида (3.49) [56]

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta o} = \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o} \circ \mathbf{X}_{ABC} \circ \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}^{-1} = x_\alpha \circ \mathbf{q}_1 + x_\beta \circ \mathbf{q}_2 + x_o \circ \mathbf{q}_3, \quad (4.66)$$

здесь x_α, x_β, x_o – вещественные коэффициенты при мнимых единицах $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, связанные с фазными переменными на основании следующих соотношений [78]

$$x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_A - x_B - x_C), \quad x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_B - x_C), \quad x_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_A + x_B + x_C).$$

При этом, как показано в разделе 3.3.1, в силу инвариантности (4.66) относительно скалярной величины (3.3) становится справедливым

$$\text{scal} \mathbf{P}_{\alpha\beta o} = - \sum_{j=\alpha, \beta, o} u_j \circ i_j = \text{scal} \mathbf{P}_{ABC},$$

в результате чего, например, компенсируемый при помощи АСФ кватернион мгновенной неэффективной мощности вида (4.39) будет определяться в соответствии с выражением

$$\mathbf{P}_{c\alpha\beta o} = \text{scal} \tilde{\mathbf{P}}_{ABC} + q_\alpha \circ \mathbf{q}_1 + q_\beta \circ \mathbf{q}_2 + q_o \circ \mathbf{q}_3,$$

в правой части которого скалярные величины q_α, q_β, q_o вычисляются по формулам (2.45), а сам алгоритм активной фильтрации (4.54) после обратного перехода к фазным переменным примет следующий вид

$$\mathbf{I}_c = \Lambda_{\alpha\beta o}^{-1} \circ (\mathbf{U}_{\alpha\beta o}^{-1} \circ \mathbf{P}_{c\alpha\beta o}) \circ \Lambda_{\alpha\beta o}.$$

В частном случае симметричной системы трехфазных напряжений (3.1), для которой справедливы соотношения (3.49) и (3.50), представляется возможным описать исходный кватернион $\mathbf{U}_{ABC}$ в функции только одного параметра за счет последующего перехода от α, β, o координат состояния к d, q, o переменным

$$\mathbf{U}_{dqo} = \Lambda_{dqo} \circ \mathbf{U}_{\alpha\beta o} \circ \Lambda_{dqo}^{-1} = u_d \circ \mathbf{q}_1 + 0 \circ \mathbf{q}_2 + 0 \circ \mathbf{q}_3,$$

где $\Lambda_{dqo} = \cos \frac{\Theta_u}{2} - \sin \frac{\Theta_u}{2} \circ \mathbf{q}_3$ – нормированный кватернион вращения относительно $\mathbf{q}_3$, обратный по отношению к Λ_3 вида (1.108), аргумент которого выбирается как

$$\frac{\Theta_u}{2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{u_\beta}{u_\alpha} = \arctg \frac{u_\beta}{|\mathbf{U}_{ABC}| + u_\alpha} = \arctg \frac{|\mathbf{U}_{ABC}| - u_\alpha}{u_\beta}.$$

При этом в силу выполнения условия $\|\Lambda_{\alpha\beta o}\| = \|\Lambda_{dqo}\| = 1$ становится справедливым следующее равенство

$$u_d = |\mathbf{U}_{ABC}| = \sqrt{\frac{3}{2}} u_m = \text{const},$$

на основании которого вещественные коэффициенты (3.2) непосредственно зависят только от соответствующих компонент $\mathbf{I}_{dqo}$

$$\mathbf{P}_{dqo} = \text{scal}\mathbf{P}_{ABC} + \text{vect}\mathbf{P}_{dqo} = -u_d i_d + 0 \circ \mathbf{q}_1 - u_d i_o \circ \mathbf{q}_2 + u_d i_q \circ \mathbf{q}_3,$$

что позволяет достаточно просто алгоритмически реализовывать ограничение выходных токов силового преобразовательного устройства компенсации при использовании алгоритма управления вида (4.50).

4.6 Методика синтеза алгоритмов управления токами компенсации в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$

На основании разработанного в рамках диссертационного исследования теоретического приема к разделению уравнения баланса мгновенных мощностей на вещественную и мнимую составляющие с последующим выделением компенсируемых при помощи АСФ неэффективных потоков электрической энергии в единицу времени, синтез алгоритмов активной фильтрации в рамках постулированных определений и правил алгебры кватернионов сводится к выполнению следующих этапов:

1. В зависимости от конкретного вида цепей трехфазной нагрузки формулируется конечная цель практического применения АСФ, заключающаяся в коррекции углового сдвига φ , исключении нулевой и/или обратной последовательности фаз по всем гармоническим составляющим, либо генерирование реактивной мощности при синусоидальном законе изменения потребляемых токов.

2. В соответствии с выбранным выше критерием энергоэффективности определяется качественный состав кватерниона мгновенной неэффективной мощно-

сти $\mathbf{P}_c$ и на основании формулы (4.50) конкретизируется структура алгоритма активной фильтрации с последующим расчетом параметров силовой схемы.

3. Выполняется синтез трехканального контура регулирования выходных токов в классе непрерывных или разрывных законов управления, а также последовательного корректирующего устройства, осуществляющего предварительный заряд конденсаторной батареи с последующей стабилизацией напряжения звена постоянного тока на заданном уровне.

4. С учетом реального спектра гармоник $\mathbf{P}_{ABC}$ и предъявляемых требований к качеству процессов оценки постоянных составляющих $\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_c$ и $\text{vect}\bar{\mathbf{P}}_c$, производится выбор численных значений среднегеометрического корня Ω и коэффициента формы A_1 характеристического полинома вида (4.59).

5. При необходимости осуществляется расчет пассивных корректирующих цепей на выходе АСФ, осуществляющих снижение амплитуды пульсаций компенсационных воздействий $\mathbf{I}_c$.

6. На заключительном этапе выполняется проверка результатов синтеза методом цифрового моделирования с учетом реальных ограничений и интервальных диапазонов изменения параметрических и сигнальных возмущений и, в случае необходимости, осуществляется доработка управляющей части силового преобразовательного устройства компенсации.

5 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИЛОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

5.1 Основные цели и задачи экспериментального исследования

В целях верификации основных положений описанного в главе 3 теоретического приема к выделению из общего потока электрической энергии неактивных (неэффективных) составляющих с последующим формированием на их основе подлежащего компенсации кватерниона мгновенной мощности P_c , на производственных площадях ЗАО “ЭРАСИБ” (г. Новосибирск) было выполнено экспериментальное исследование нелинейной трехфазной системы без нулевого провода с АСФ. Практическая апробация синтезированных алгоритмов активной фильтрации выполнялась на базе общепромышленного преобразователя типа “ЭРАТОН-М4” с частотой коммутации IGBT-модулей 2,7 кГц, который предназначен для регулирования угловой скорости вала асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором. Помимо данного типа силового электрооборудования, в состав специализированной установки входили три сглаживающих реактора, понижающий трансформатор, управляющая и измерительная системы, многоканальный блок аналогово-цифрового и цифро-аналогового преобразований, а также активно-реактивная нагрузка с полупроводниковыми вентилями.

Как следует из представленного в главах 3 и 4 теоретического материала, полная компенсация всех потоков электрической энергии в единицу времени вследствие негативного действия параметрической асимметрии и искажений в синусоидальной форме сигналов достигается в рамках законов управления АСФ вида (4.52) и (4.53), выступающих в качестве объекта проводимого исследования, которые позволяют одновременно исключать обратную и нулевую последовательности фаз по всем гармоникам потребляемых токов с единичным или опережающим коэффициентом мощности. При этом на данном этапе диссертации так-

же выполнялась проверка результатов синтеза непрерывного астатического контура регулирования напряжения силового емкостного фильтра с учетом реальных ограничений на норму вектора управляющих воздействий и динамической подсистемы низкочастотной фильтрации, предназначенной для выделения из произвольной функции времени $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$ постоянной составляющей.

Таким образом, обобщая вышеизложенное, можно сформулировать следующие цели эксперимента:

1. Практическая верификация теоретического приема к разделению уравнения баланса мгновенных мощностей трехфазной нагрузки произвольного вида на вещественную и мнимую части, выполненного в соответствии с правилами и законами некоммутативной алгебры кватернионов.

2. Подтверждение работоспособности и высокой эффективности синтезированных алгоритмов активной фильтрации, принцип действия которых основан на предварительном искажении токов источника.

3. Исследование статических и динамических режимов работы АСФ, включающее в себя:

- анализ влияния стационарных коэффициентов характеристического полинома фильтра низких частот на характер текущей оценки среднего значения в $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$;

- предварительный заряд силовой конденсаторной батареи с последующей стабилизацией выходной переменной на заданном уровне с нулевой ошибкой в установившемся процессе;

- обеспечение симметричного гармонического закона изменения потребляемых от источника токов без углового сдвига относительно соответствующего фазного напряжения;

- генерирование реактивной энергии емкостного типа с одновременной компенсацией всех неэффективных потоков электрической энергии в единицу времени.

4. Обобщение полученных результатов с целью выработки общих рекомендаций по базовым принципам организации и построения энергоэффективных трехфазных систем переменного тока с АСФ в терминах гиперкомплексных чисел.

5.2 Описание экспериментальной установки

В качестве составных элементов силовой части трехфазной системы с АСФ, изображенной на рисунке 5.1, выступали:

- общепромышленный преобразователь частоты типа “ЭРАТОН-М4” мощностью 15 кВт, состоящий из емкостного фильтра **С** в виде двух последовательно включенных конденсаторов суммарной емкостью 2,35 мФ, автономного инвертора напряжений **АИН**, трехканального ПИ-регулятора токов **РТ** и блока широтно-импульсной модуляции **ШИМ** с опорной частотой дискретизации 2,7 кГц;
- понижающий трансформатор **Тр** с соединением первичных и вторичных обмоток “в звезду” без нулевого провода с коэффициентом передачи 0,625;
- сглаживающие дроссели **L** индуктивностью 9,4 мГн, выступающие в качестве нагрузки для **АИН**, предназначенные для ограничения амплитуды пульсаций и производных выходных токов компенсации **I_c**;
- несимметричная нелинейная трехфазная RL-нагрузка с полупроводниковыми вентилями **НН**.

В свою очередь, управляющая **СУ** и измерительная системы включали в себя:

- персональный компьютер на базе материнской платы GigaByte типа GA-8IR533 Socket478 с тактовой частотой 1,7 МГц центрального микропроцессора Intel Celeron и оперативной памятью объемом 256 МБ;
- аналогово-цифровые **АЦП** и цифро-аналоговые **ЦАП** преобразователи сигналов типа PCI-1713 и PCI-1720 соответственно, реализованные в виде отдельных плат, встраиваемых в PCI-слоты материнской платы;

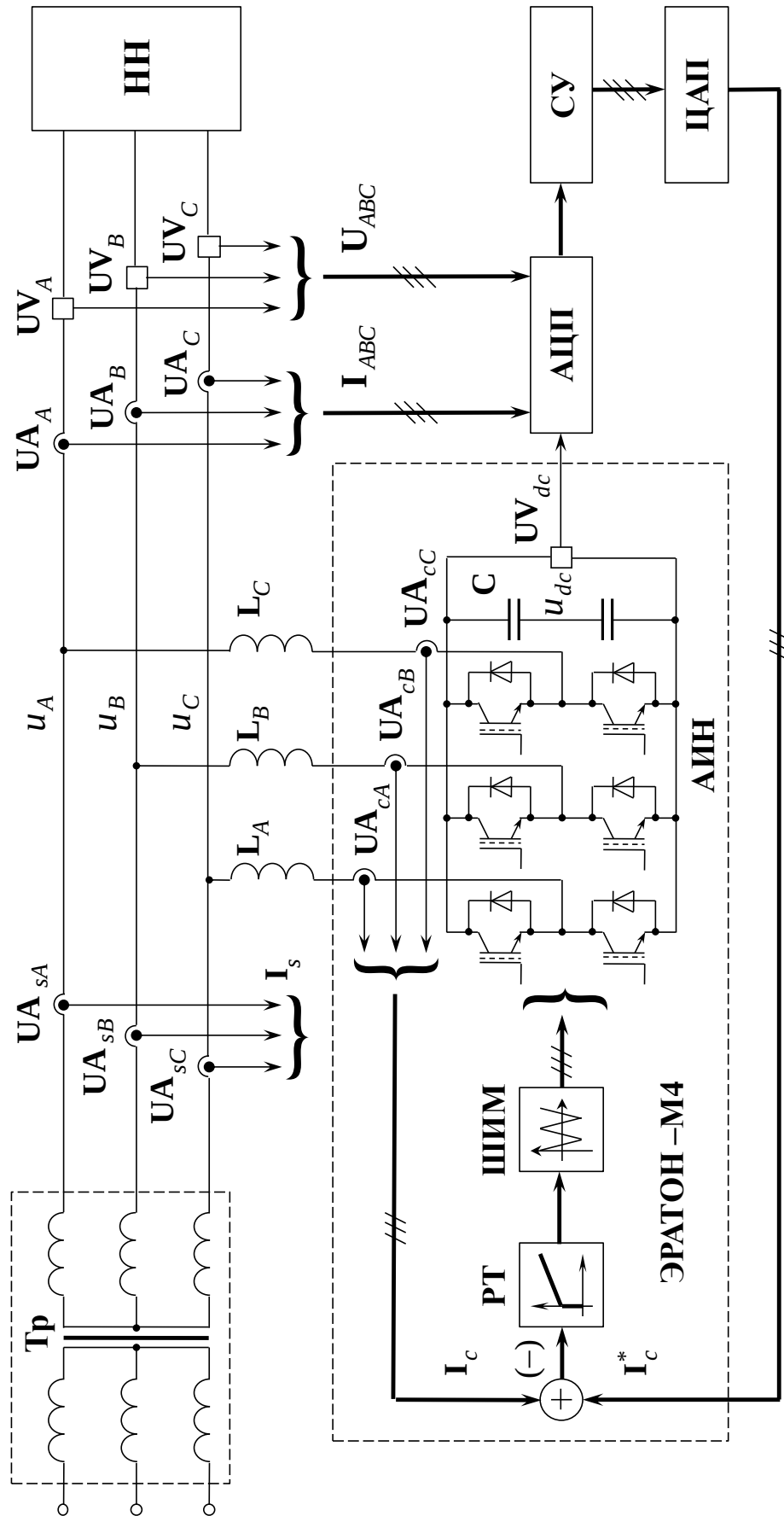


Рисунок 5.1 – Функциональная схема экспериментальной установки

- осциллограф типа TEKTRONIX TDS 2014B с цифровой фиксацией мгновенных значений измеряемых электрических сигналов;
- датчики тока **UA** типа LEM LA 55-P 13196 с нагрузочными резисторами 180 Ом и коэффициентами передачи 0,18;
- датчики напряжения **UV**, реализованные на базе гальванически развязанного высокоомного делителя с безразмерным коэффициентом передачи 0,01.

Численный расчет параметров трехканального ПИ-регулятора выходных токов **РТ** двухуровневого автономного инвертора **АИН** в составе “ЭРАТОН–М4” производился в соответствии с формулами (4.7), в которых коэффициент a_c разделения частот сопряжения ЛАЧХ и среза $\omega_c = 2\pi \cdot 700 \text{ с}^{-1}$ принимался равным двум, а синтез астатического контура регулирования u_{dc} выполнялся на основе приведения характеристического полинома (4.63) к стандартной линейной форме Бесселя [85, 88].

Для исключения насыщения интегральной составляющей в последовательных корректирующих устройствах использовалась безынерционная отрицательная обратная связь со статической нелинейностью типа “зона нечувствительности” [196], что иллюстрирует рисунок 5.2, интервальная граница которой принималась равной максимально-допустимому значению выходной координаты [178].

Формирование компенсационных воздействий осуществлялось с помощью управляющей программы на языке C++, после чего вещественные коэффициенты I_c^* через ЦАП типа PCI–1720 преобразовывались в аналоговую форму и поступали на вход трехканального контура регулирования токов “ЭРАТОН–М4”. На рисунке 5.3 изображена обобщенная функциональная схема алгоритма активной фильтрации в терминах гиперкомплексных чисел, в которой текущая информация о кватернионах напряжения U_{ABC} и токов I_{ABC} поступала через АЦП с соответствующих датчиков **UV** и **UA**.

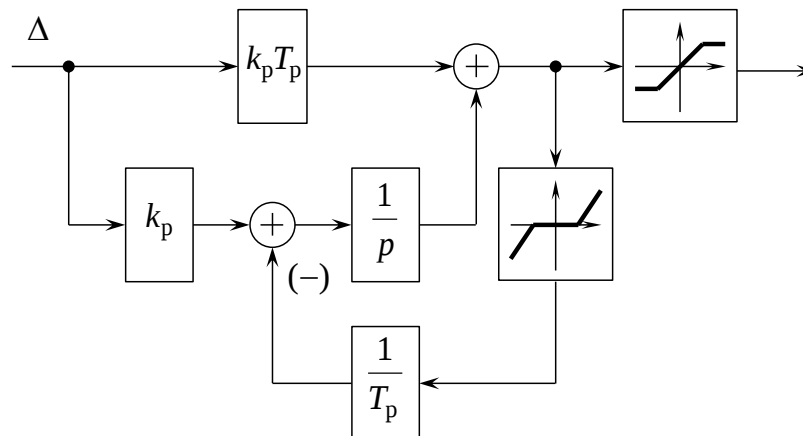


Рисунок 5.2 – Структурная схема ПИ-регулятора с нелинейным ограничением интегральной составляющей

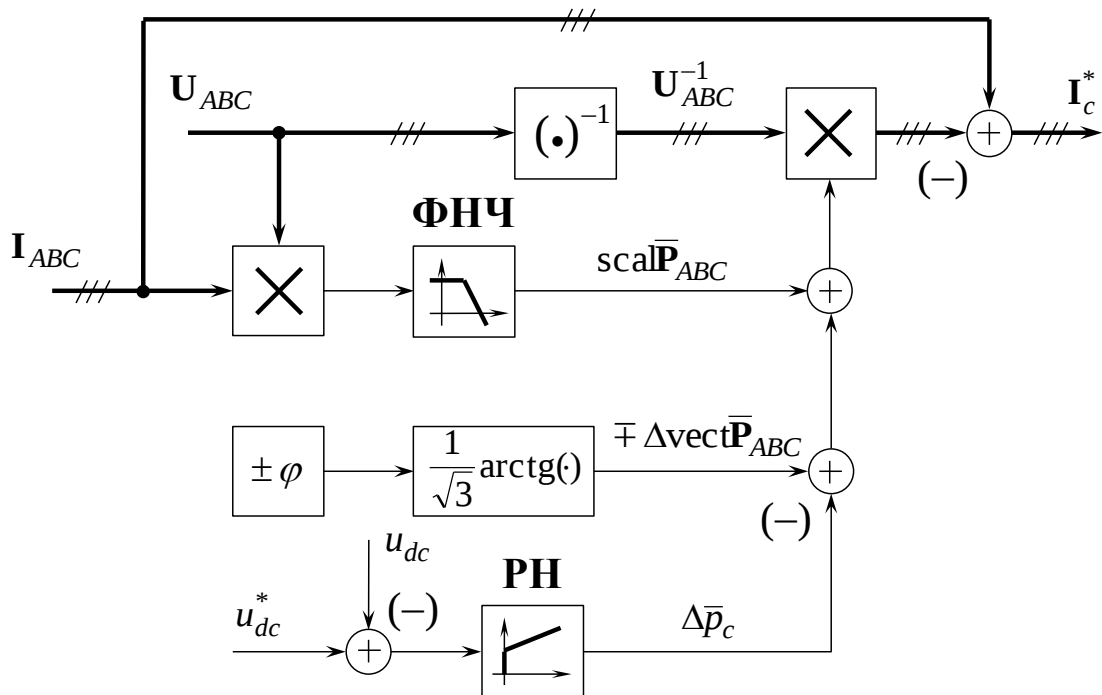


Рисунок 5.3 – Функциональная схема системы управления АСФ

5.3 Исследование статических и динамических режимов работы активного силового фильтра

На первом этапе эксперимента выполнялось исследование уравнения баланса мгновенных мощностей в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ применительно к различным типам несимметричных активно-реактивных нагрузок с полупроводниковыми вентилями, принципиальные схемы которых изображены на рисунках 5.4 и 5.5, при их подключении к вторичным обмоткам понижающего трансформатора с амплитудой выходных напряжений $u_m = 200 \text{ В}$ (рисунок 5.6). Так, на рисунках 5.7–5.8 приведены осциллограммы фазных токов, иллюстрирующие явно выраженный нелинейный характер процессов в электрических цепях, а на рисунках 5.9–5.12 соответствующие им действительные части $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$, а также вещественные коэффициенты $\text{vect}\mathbf{P}_{ABC}$ [63, 64, 176], которые в силу отсутствия нулевого провода, как это следует из формулы (3.48), равны друг другу.

Как видно из представленных выше временных зависимостей 5.9–5.12, наличие неуправляемых или полууправляемых полупроводниковых вентилей в электрической цепи вызывает одновременное появление в скалярной и векторной частях $\mathbf{P}_{ABC}$ мультигармонических составляющих, которые пульсируют относительно средних значений, отвечающих за полезную активную мощность преобразования и тепловые потери, а также реактивную мощность фазового сдвига соответственно [64]. При этом, чем выше суммарный коэффициент гармоник по току, тем более сложной аналитической функцией описывается компенсируемый при помощи АСФ кватернион мгновенной мощности $\mathbf{P}_c$ и, как следствие, формируемые на его основе соответствующие воздействия $\mathbf{I}_c$.

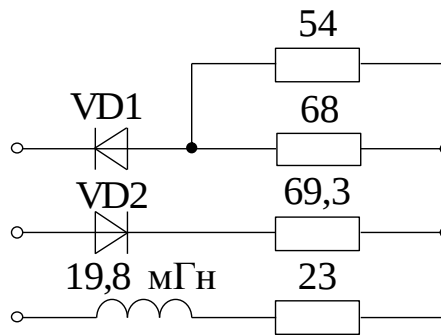


Рисунок 5.4 – Принципиальная схема трехфазной нелинейной активно-реактивной нагрузки с диодами

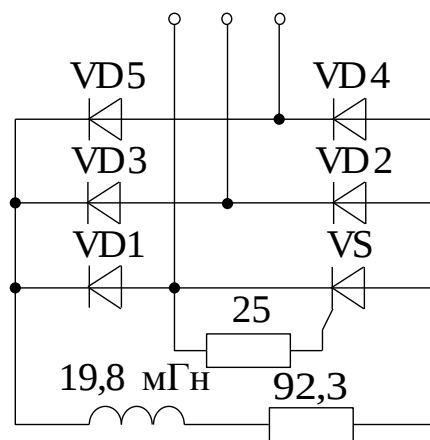


Рисунок 5.5 – Принципиальная схема несимметричного мостового выпрямителя с RL-нагрузкой

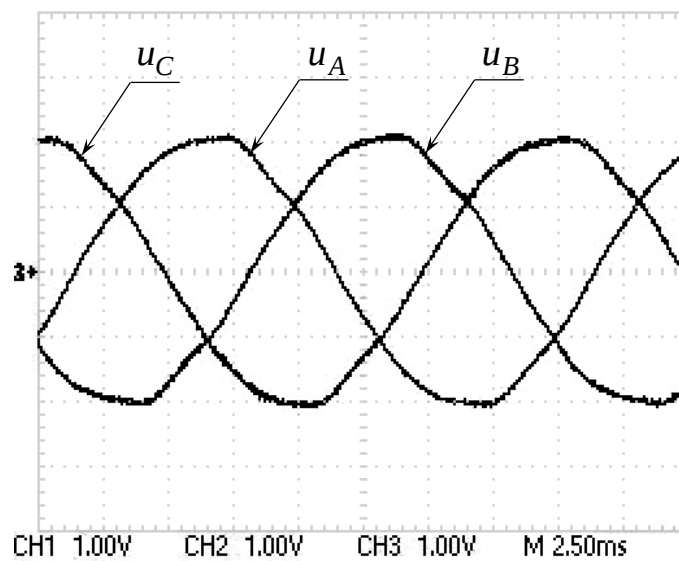


Рисунок 5.6 – Трехфазные напряжения на вторичных обмотках понижающего трансформатора

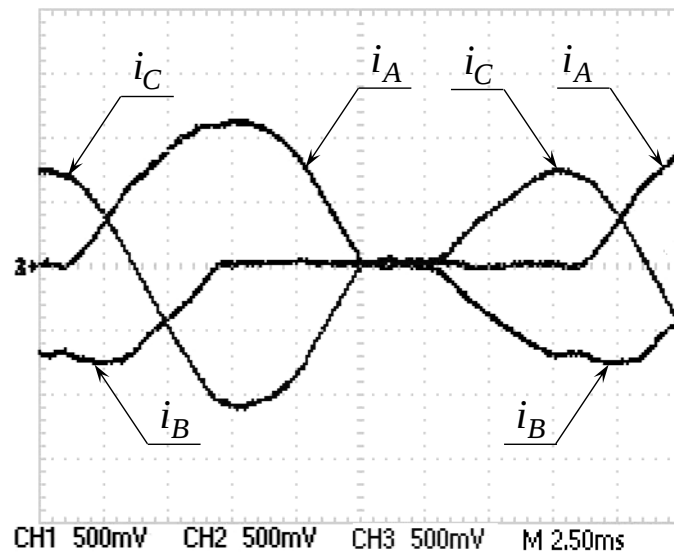


Рисунок 5.7 – Трехфазные токи, потребляемые нелинейной активно-реактивной нагрузкой с диодами

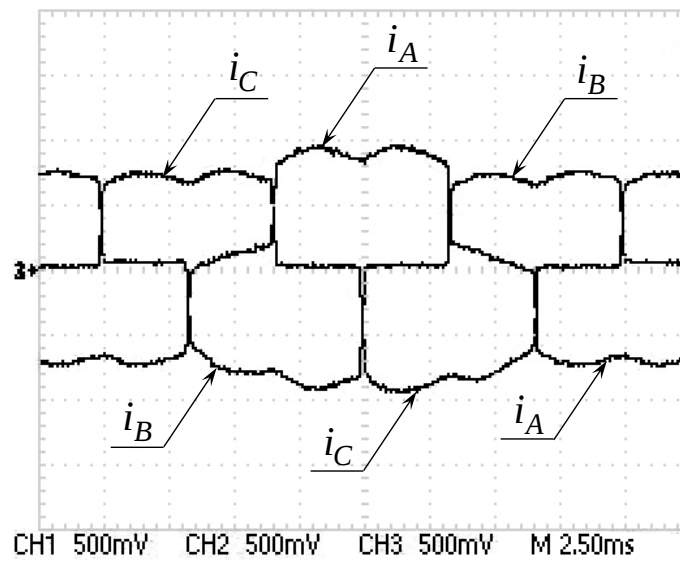


Рисунок 5.8 – Трехфазные токи, потребляемые несимметричным мостовым выпрямителем с RL-нагрузкой

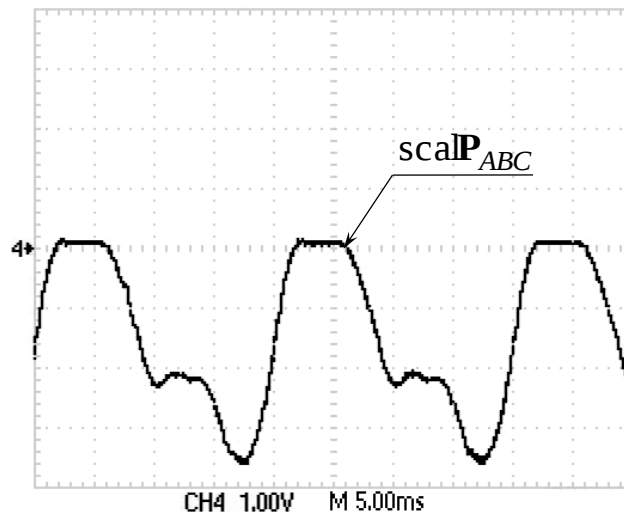


Рисунок 5.9 – Скалярная часть кватерниона мгновенной мощности нелинейной активно-реактивной нагрузки с диодами

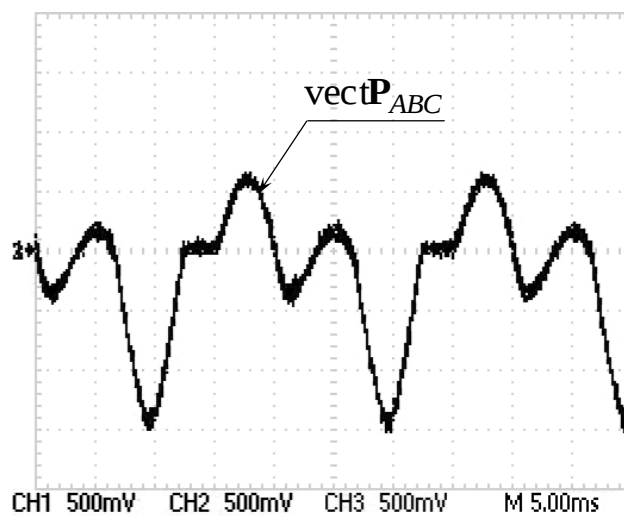


Рисунок 5.10 – Вещественные коэффициенты q_A, q_B, q_C векторной части кватерниона мгновенной мощности нелинейной активно-реактивной нагрузки с диодами

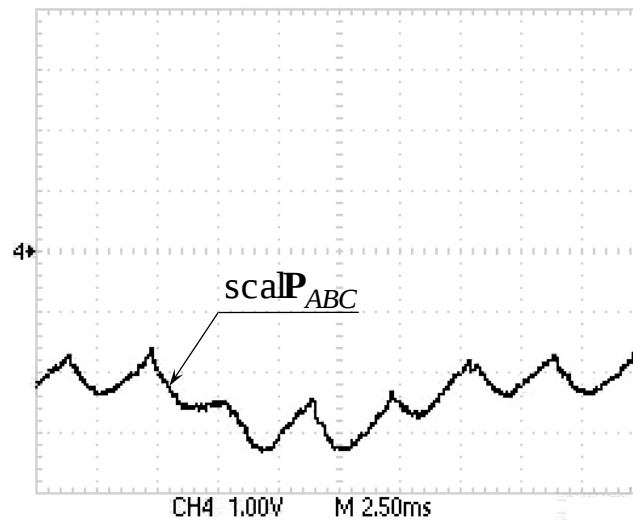


Рисунок 5.11 – Скалярная часть кватерниона мгновенной мощности несимметричного мостового выпрямителя с RL-нагрузкой

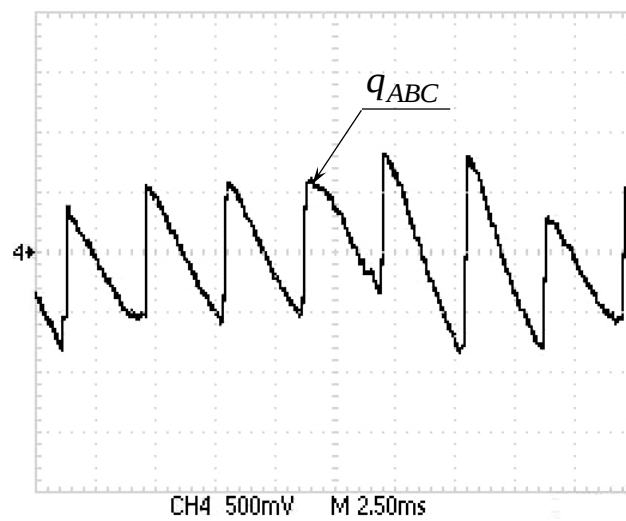


Рисунок 5.12 – Вещественные коэффициенты векторной части кватерниона мгновенной мощности несимметричного мостового выпрямителя с RL-нагрузкой

Для анализа характера влияния собственных чисел характеристического полинома второго порядка (4.58) на оценку текущих значений постоянной составляющей $\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}$ [78, 79, 174], в цифро-аналоговой системе управления АСФ были программно реализованы различные варианты построения соответствующей динамической подсистемы низкочастотной фильтрации со среднегеометрическим корнем $\Omega = 10 \text{ с}^{-1}$, качество процессов в которой во многом определяет быстродействие силового преобразовательного устройства активной фильтрации в режимах отработки внешних сигнальных возмущений, вызванных, например, коммутацией электрооборудования в трехфазной системе электроснабжения.

Как видно из представленных рисунков 5.13 и 5.14, переходные характеристики с настройкой на стандартные линейные формы Баттерворта при $A_1 = \sqrt{2}$ и Бесселя с $A_1 = \sqrt{3}$ [85, 88] имеют практически одинаковое время вхождения в δ -окрестность от установившегося значения, однако в последнем случае отсутствует явно выраженный экстремум, по причине чего данный тип распределения комплексно-сопряженных корней (4.59) выберем в качестве базового при дальнейшем исследовании алгоритмов управления АСФ в соответствии с функциональной схемой, изображенной на рисунке 5.3.

В целях проверки правильности результатов синтеза астатического контура регулирования напряжения силового емкостного фильтра, выполненного на основе методики из раздела 4.5.2, на специализированной установке отрабатывались режимы заряда конденсаторной батареи суммарной емкостью 2,35 мФ с нулевых начальных условий при нахождении выхода ПИ-регулятора $\Delta\bar{p}_c^*$ в линейной области и на ограничении, величина которого рассчитывалась по следующей формуле [57, 175, 178]

$$\Delta\bar{p}_{c\max}^* = \frac{2}{3} (k_u u_{dc}^*) \cdot (k_i i_{dc\max}) = 5 \text{ В},$$

где $i_{dc\max}$ — максимальный мгновенный ток заряда.

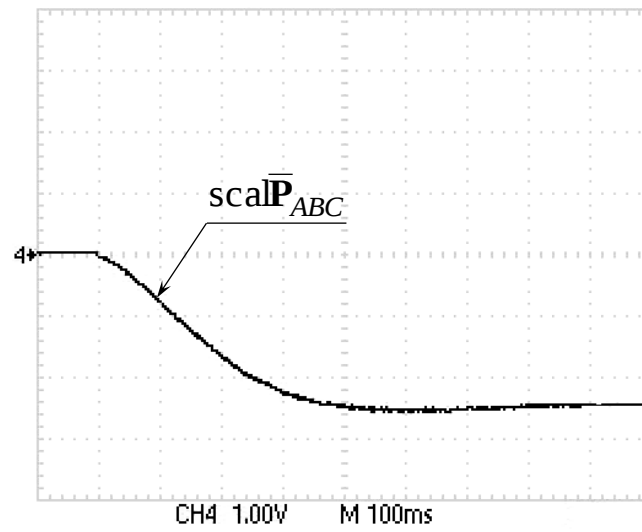


Рисунок 5.13 – Переходной процесс в подсистеме оценки $\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}$, настроенной на фильтр Баттерворта второго порядка

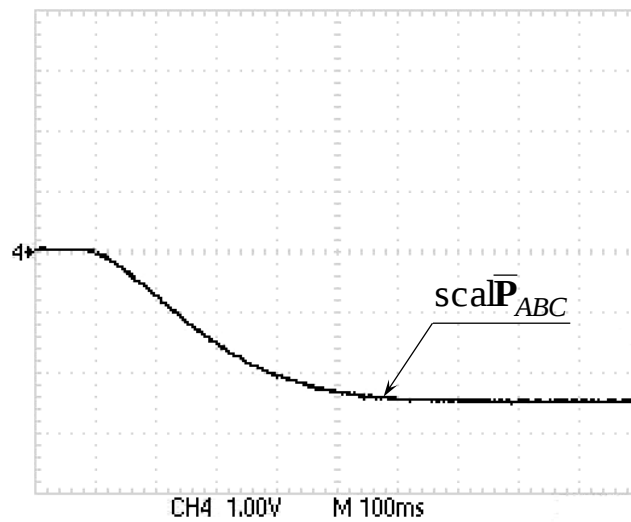


Рисунок 5.14 – Переходной процесс в подсистеме оценки $\text{scal}\bar{\mathbf{P}}_{ABC}$, настроенной на фильтр Бесселя второго порядка

Определение параметров последовательного корректирующего устройства выполнялось в соответствии с формулами (4.64) при выборе численных значений $\xi_{крн}$ и $T_{крн}$ на основании равенств (4.65). На рисунках 5.15 и 5.16 изображены реакции выхода u_{dc} при отработке скачкообразного отклонения $\Delta u_{dc} = 50$ В без компенсации “левого” нуля в передаточной функции вида (4.63), а также в случае установки на входе контура апериодического фильтра с единичным коэффициентом передачи и постоянной времени $T_{рн}$.

В свою очередь на рисунке 5.17 приведены графики электромагнитных процессов в звене постоянного тока при работе ПИ-регулятора на ограничении в случае заряда силовой емкости от начального значения 340 В до величины 560 В, а на рисунке 5.18 изображены напряжение фазы А и задающее воздействие $\Delta i_{сА}^*$ на непрерывный регулятор тока, иллюстрирующие преобразование скалярной гиперкомплексной величины $\Delta \bar{p}_c$ в силовые сигналы компенсации активных потерь в АСФ.

Таким образом, как видно из представленных выше графических зависимостей, переходные процессы по регулируемой переменной u_{dc} как “в малом”, так и “в большом”, обеспечивают желаемое качество в динамике и нулевую ошибку в статике, в результате чего исключаются неконтролируемые режимы работы в силовой части полупроводникового преобразователя [57, 175, 178]. При этом проведенные исследования также показали, что апериодический фильтр на входе контура практически не оказывает влияния на величину перерегулирования, а большие значения полосы пропускания приводят к значительным искажениям в силовых компенсационных воздействиях $\mathbf{I}_c$, причем в обратной ситуации наблюдаются низкочастотные колебания в стабилизируемом напряжении u_{dc} .

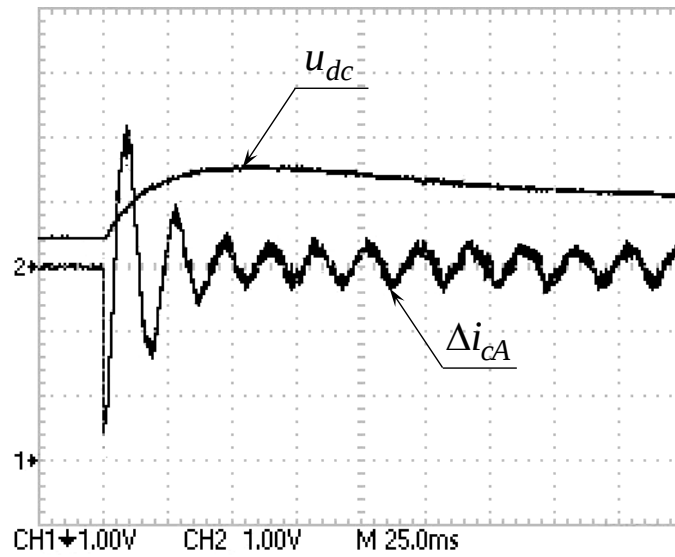


Рисунок 5.15 – Переходной процесс по напряжению u_{dc} и активному току компенсации $\Delta \bar{p}_c$ “в малом”

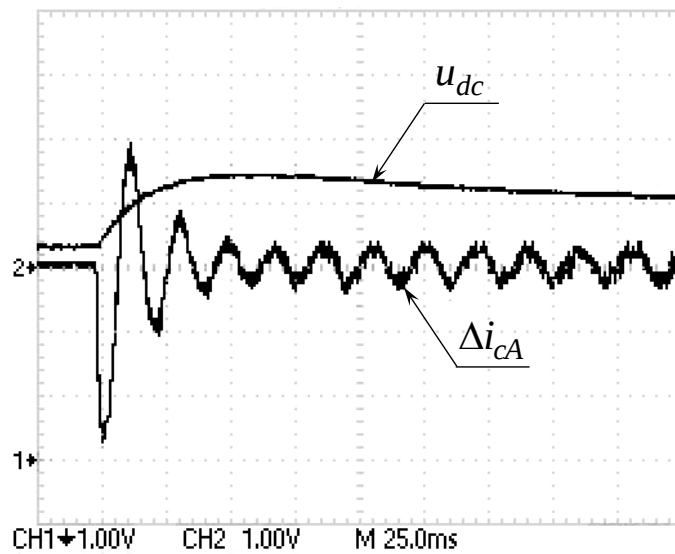


Рисунок 5.16 – Переходной процесс по напряжению u_{dc} и активному току компенсации $\Delta \bar{p}_c$ “в малом” с аperiodическим фильтром на входе

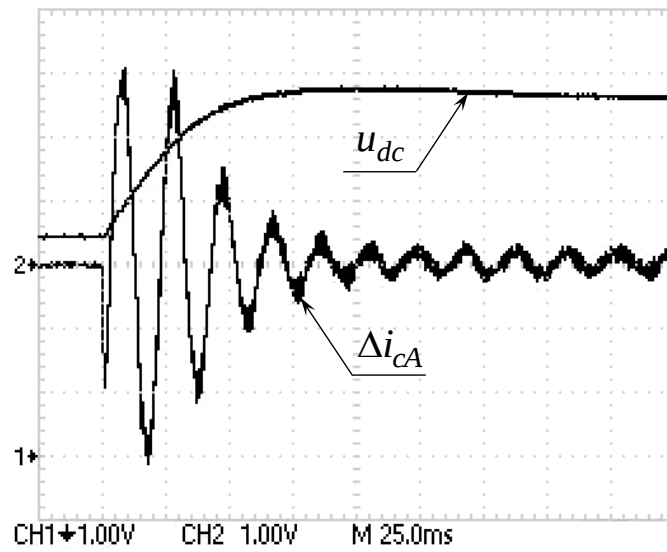


Рисунок 5.17 – Переходной процесс по напряжению u_{dc} и активному току компенсации $\Delta \bar{p}_c$ “в большом”

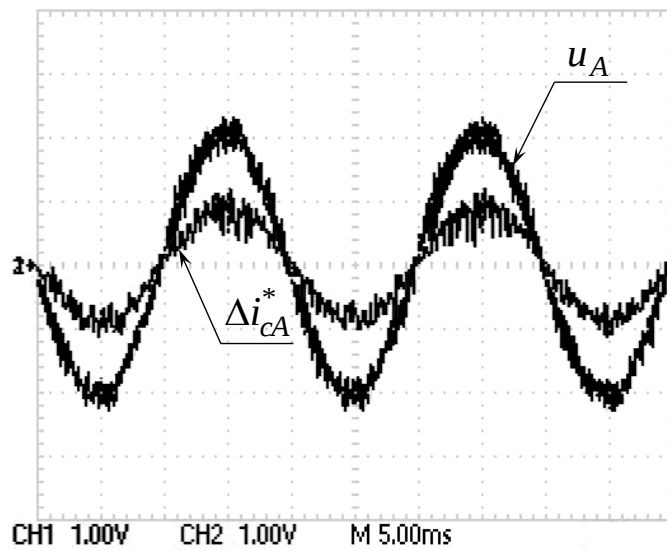


Рисунок 5.18 – Задающее воздействие на активный ток и напряжение одноименной фазы A в статическом режиме работы АСФ

Практическая верификация синтезированных алгоритмов активной фильтрации, из которых, как было отмечено в разделе 4.4.4, наиболее эффективными являются законы компенсации вида (4.54) и (4.55), обеспечивающие в идеализированном случае полное исключение всех неэффективных потоков электрической энергии в совокупности с требуемым коэффициентом мощности, осуществлялась применительно к нелинейной трехфазной активно-реактивной нагрузке, изображенной на рисунке 5.4. Как видно из рисунков 5.19, 5.21, 5.23 и 5.25–5.27, полученных при $u_{dc} = 500$ В, потребляемые от источника токи после вступления в работу АСФ принимают синусоидальный вид с нулевым [120] или опережающим [79, 174, 177] угловым смещением во всех трех фазах, величина которого определяется добавочной компонентой $\Delta \text{vec} \bar{\mathbf{P}}_{ABC}$, что полностью подтверждает результаты цифрового моделирования в программном продукте “MATLAB” R2008b б из предыдущей главы 4. В свою очередь на рисунках 5.20, 5.22 и 5.24 изображены осциллограммы соответствующих компенсационных воздействий [63, 81, 176], иллюстрирующие принцип действия параллельных АСФ, основанный на предварительном искажении трехфазных переменных [60].

При этом также необходимо отметить, что для сокращения временного интервала вступления в работу АСФ представляется возможным осуществлять заряд конденсаторной батареи с одновременным формированием выходных токов $\mathbf{I}_c$, что иллюстрирует рисунок 5.28, на котором изображен процесс компенсации $\mathbf{P}_c$ с одновременным изменением напряжения u_{dc} на силовой емкости от начального значения 330 В до величины 540 В [78, 79, 174].

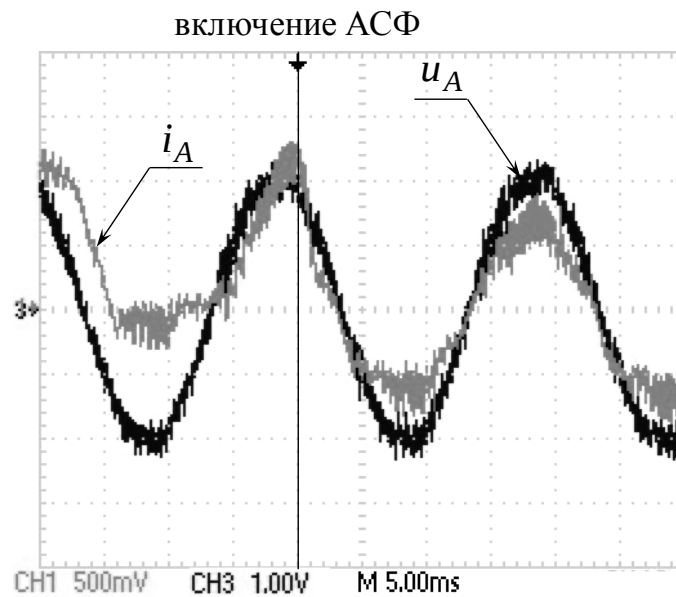


Рисунок 5.19 – Ток и напряжение фазы А источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.54)

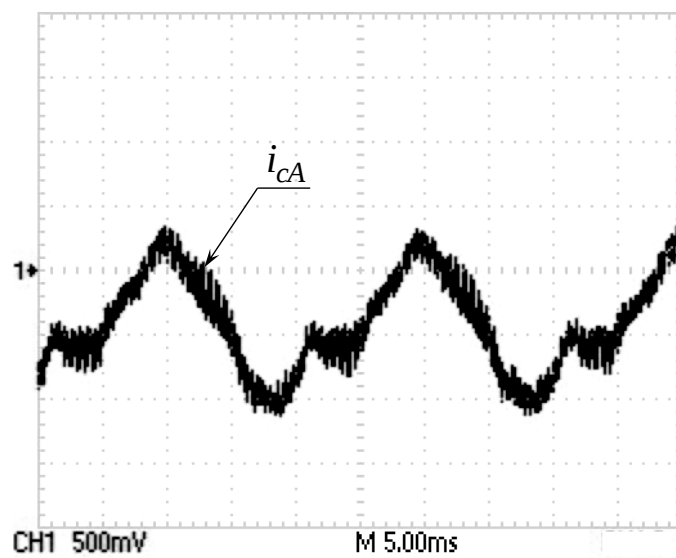


Рисунок 5.20 – Компенсационный ток фазы А на выходе АСФ в установившемся процессе с алгоритмом активной фильтрации (4.54)

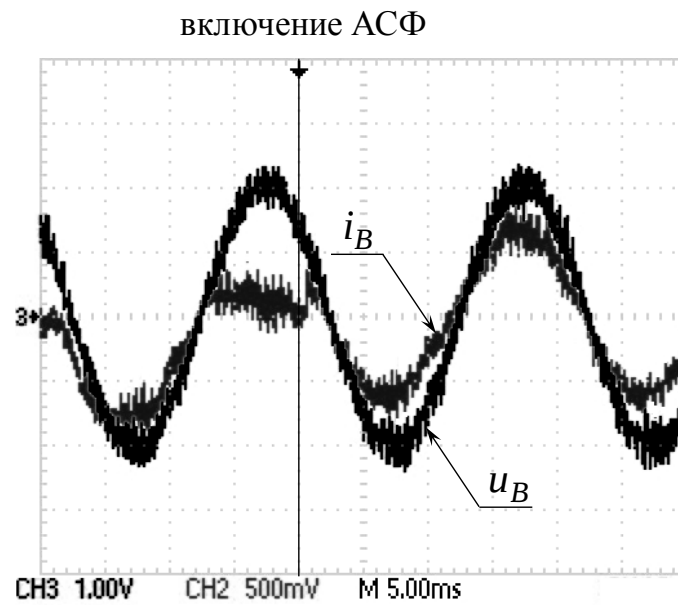


Рисунок 5.21 – Ток и напряжение фазы B источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.54)

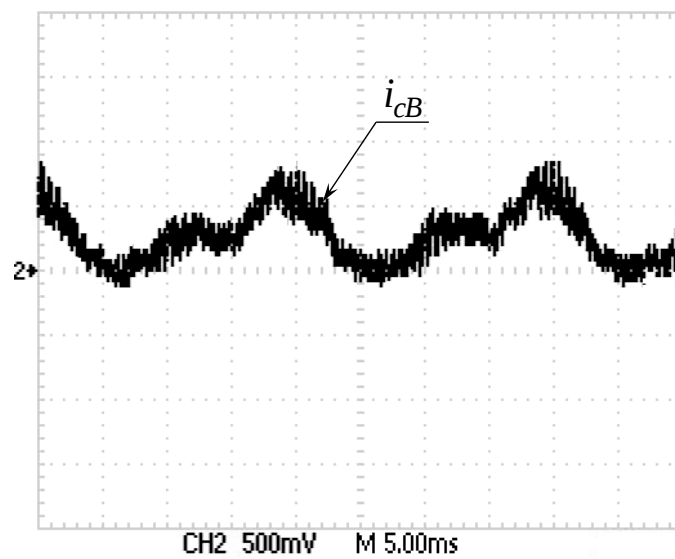


Рисунок 5.22 – Компенсационный ток фазы B на выходе АСФ в установившемся процессе с алгоритмом активной фильтрации (4.54)

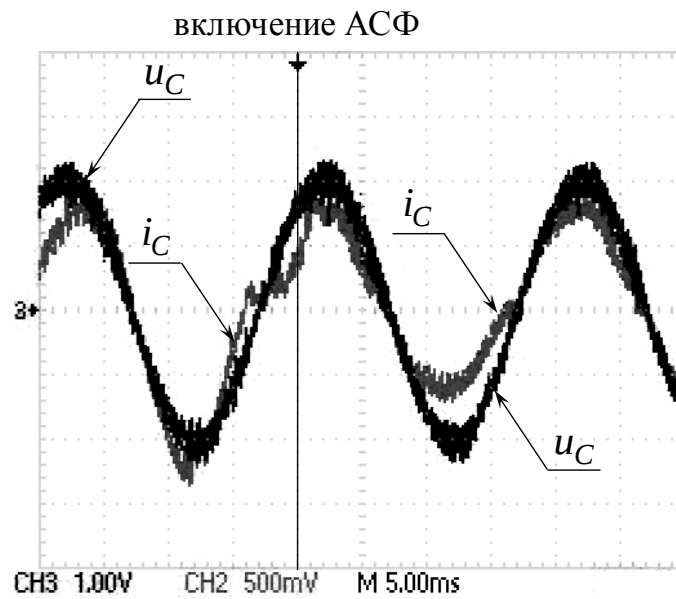


Рисунок 5.23 – Ток и напряжение фазы C источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.54)

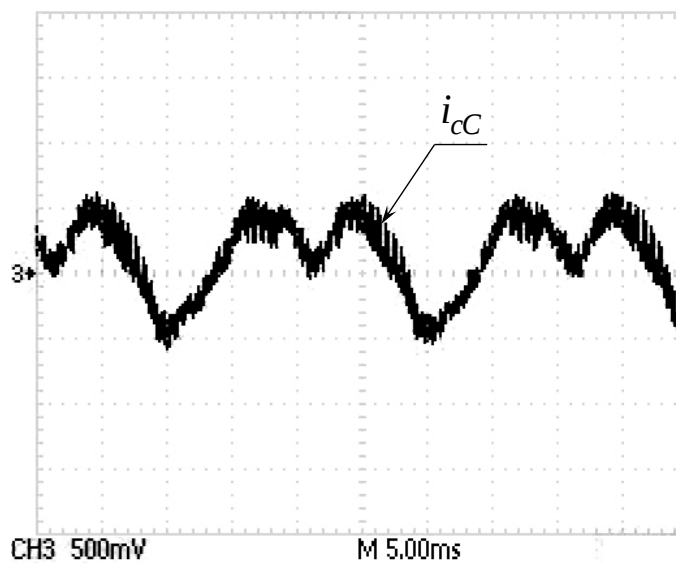


Рисунок 5.24 – Компенсационный ток фазы C на выходе АСФ в установившемся процессе с алгоритмом активной фильтрации (4.54)

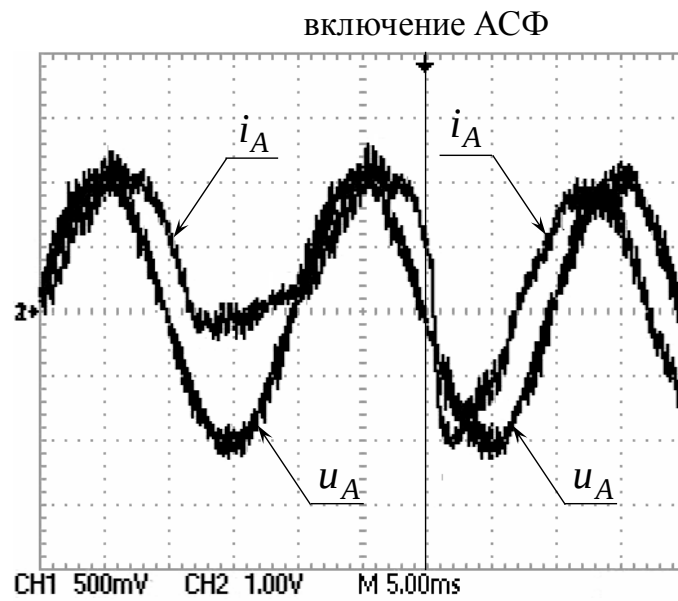


Рисунок 5.25 – Ток и напряжение фазы A источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.55) при $\varphi = 45^\circ$

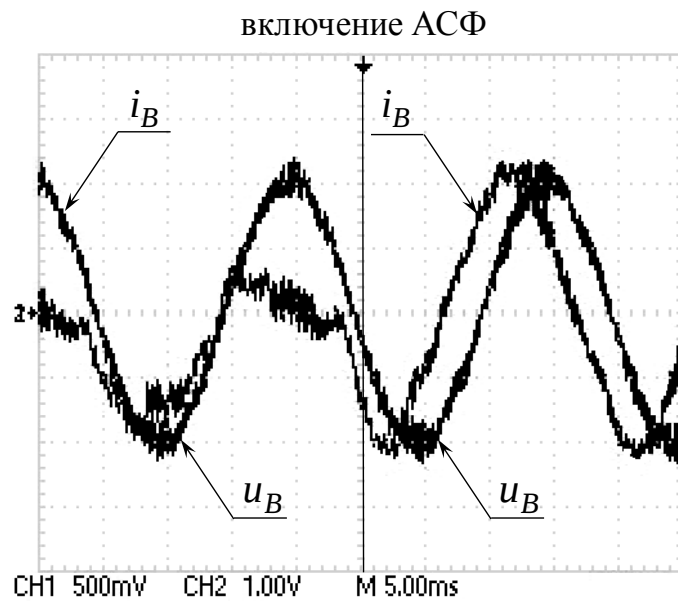


Рисунок 5.26 – Ток и напряжение фазы B источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.55) при $\varphi = 45^\circ$

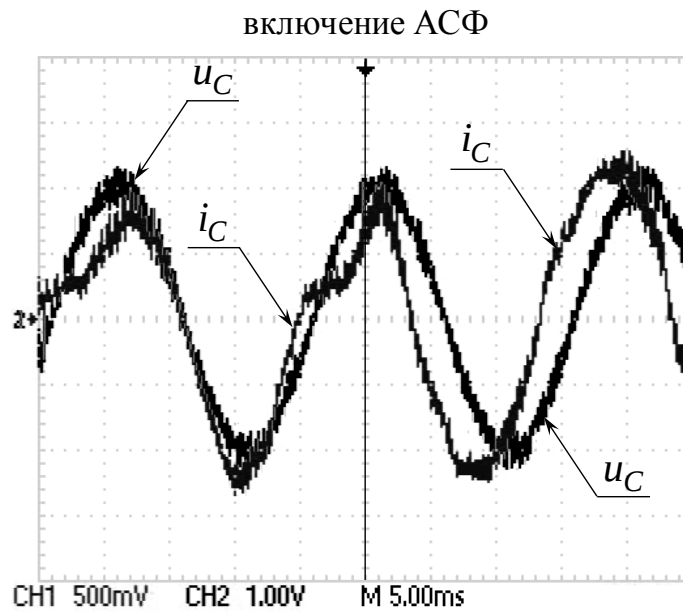


Рисунок 5.27 – Ток и напряжение фазы C источника до и после момента включения АСФ с алгоритмом компенсации вида (4.55) при $\varphi = 45^\circ$

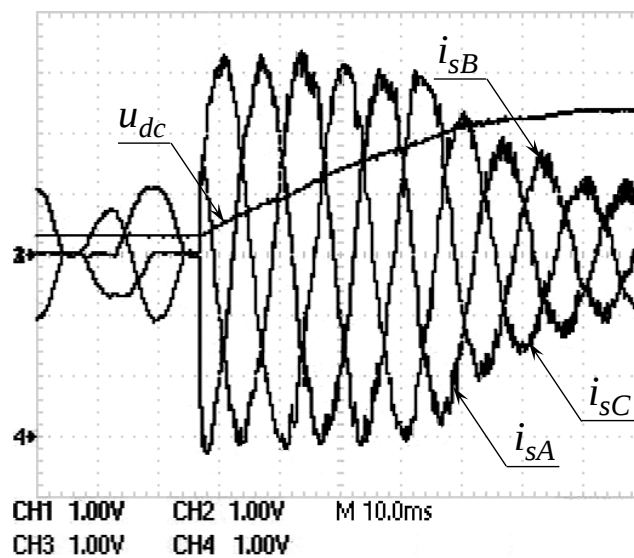


Рисунок 5.28 – Фазные токи источника и напряжение u_{dc} в момент начала процесса компенсации с одновременной отработкой ненулевого начального отклонения $\Delta u_{dc} = 110 \text{ В}$

Обобщая вышеизложенное можно заключить, что практическое применение полупроводниковых преобразовательных устройств активной фильтрации обеспечивает как единичный, так и опережающий коэффициент мощности при гармонической форме потребляемых токов в случае произвольной нелинейной и/или несимметричной нагрузки, что позволяет на практике реализовывать высокоэффективные системы энергосбережения. При этом в данном случае не требуется привлечение высокопроизводительных программно-аппаратных средств, т.к. выработка задающих воздействий в терминах гиперкомплексных чисел осуществляется с меньшим количеством математических операций по отношению к другим методам синтеза, выполненным, например, в рамках векторного подхода, и без привлечения линейных ортогональных преобразований исходного базиса.

5.4 Выводы по результатам экспериментальных исследований

На основании представленных в данной главе результатов экспериментального исследования методов анализа и синтеза трехфазных систем с активными силовыми фильтрами в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ можно сделать следующие выводы:

1. В зависимости от класса решаемых задач энергосбережения, применение АСФ позволяет исключить в потребляемых токах различные комбинации обратной и нулевой последовательностей фаз по всем гармоникам с одновременной возможностью генерации в трехфазную сеть общего назначения реактивной энергии емкостного типа.
2. В структуре алгоритмов активной фильтрации вида (4.51)–(4.55) отсутствуют какие-либо преобразования координат, что в конечном итоге позволяет реализовывать системы управления АСФ на менее производительной программно-аппаратной базе или с более высоким быстродействием [63, 79].
3. При низком значении полосы пропускания астатического контура регулирования напряжения силового емкостного фильтра установившийся процесс по

выходной координате u_{dc} сопровождается колебательными явлениями, а при обратной ситуации возникают искажения в мгновенной форме выходных сигналов i_{cA}, i_{cB}, i_{cC} .

4. Снижения амплитуды пульсаций I_c можно добиться за счет увеличения частоты коммутации полупроводниковых IGBT-модулей автономного инвертора напряжений или при помощи установки на выходе АСФ пассивных активно-реактивных корректирующих цепей [78, 174].

5. Формирование компенсационных воздействий на основе кватернионов активного I_{ABC}^p и реактивного I_{ABC}^q токов нагрузки вида (4.57) или при непосредственном определении компенсируемых при помощи АСФ потоков электрической энергии в единицу времени являются абсолютно эквивалентными, однако в первом случае численный расчет I_c выполняется с меньшим количеством математических операций.

6. Синтезированные законы управления параллельным преобразовательным устройством активной фильтрации обеспечивают его работоспособность в динамических режимах, сопровождаемых начальным зарядом конденсаторной батареи, что в конечном итоге позволяет сократить временной интервал вступления в работу АСФ.

7. При наличии в составе напряжений источника высокочастотных гармоник, в качестве вещественных коэффициентов U_{ABC}^{-1} необходимо использовать прямую последовательность фаз вида (4.32) с нормированными амплитудой $u_{m1+} = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ В}$ и частотой $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$, аналитические процедуры получения текущей информации о которой описаны в подразделе 4.3.5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационного исследования, связанного с анализом процесса энергопотребления трехфазных нагрузок произвольного вида (нелинейных и несимметричных) в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ и синтезом на его основе электротехнических и электромеханических систем с силовыми полупроводниковыми преобразовательными устройствами активной фильтрации, были решены следующие научно-прикладные задачи:

1. Описаны классификационные признаки и структурно-алгоритмические принципы построения последовательных, параллельных и последовательно-параллельных АСФ, осуществляющих частичную или полную компенсацию неэффективных (неактивных) составляющих мгновенной мощности.

2. На основании выполненного анализа различных способов математического описания линейных ортогональных преобразований переменных в трехфазных цепях переменного тока, таких как, Clarke Transformation и Park Transformation, получены расчетные соотношения, позволяющие сократить число используемых кинематических параметров до 4-х в отличие от традиционного подхода с 9-тью элементами матрицы направляющих косинусов.

3. С единых позиций метода пространства состояний и матричного исчисления обобщены различные алгоритмические принципы формирования компенсационных воздействий, базирующиеся на правилах векторной алгебры, с выявлением их достоинств и недостатков.

4. В рамках математического аппарата алгебры кватернионов получены аналитические зависимости для численного расчета мгновенной мощности применительно к различного рода несимметричным и/или нелинейным электрическим цепям при произвольной мгновенной форме сигналов.

5. При помощи сформулированных критериев энергоэффективности трехфазных систем в терминах гиперкомплексных чисел разработаны алгоритмы управления силовыми преобразовательными устройствами, позволяющие исключить из

состава потребляемых токов и напряжений источника нулевую и/или обратную последовательности фаз по всем гармоникам при заданном угловом сдвиге.

6. Решена задача о безусловном экстремуме квадратичного функционала, доставляющая максимум нормы кватерниона активных мгновенных токов $\mathbf{I}_{ABC}^p$, техническая реализация которой в идеализированном случае не требует присутствия в силовых цепях компенсации элементов, служащих для хранения и обмена электромагнитной энергией.

7. Разработана инженерная методика синтеза алгоритмов активной фильтрации, обеспечивающая в трехфазной системе с нагрузкой произвольного вида гармоническую форму потребляемых от источника токов с желаемым угловым сдвигом при одновременном соблюдении условия симметрии по мгновенным значениям.

Как показано в первой главе пояснительной записки, применение нормированных гиперкомплексных чисел при преобразовании трехфазных переменных в α, β, o и d, q, o координаты состояния позволяет снизить объем памяти оперативных запоминающих устройств за счет уменьшения количества используемых кинематических параметров, а принятие в качестве исходного базиса uv -пространства со спинowymi матрицами Паули дает возможность описать несимметричные режимы работы электрических машин переменного тока на основании хорошо проработанного математического аппарата функции комплексной переменной.

На основе анализа базовых положений современных методов разделения мгновенных токов нагрузки на активную и реактивную были сформулированы области практического применения алгоритмов активной фильтрации, а также выявлены их недостатки, к числу которых, например, можно отнести неоднозначность в получаемых результатах синтеза из-за отсутствия строгого определения операции векторного произведения применительно к трехмерным матрицам-столбцам.

Устранить имеющиеся место недочеты можно при помощи математического аппарата алгебры кватернионов, который позволяет выделить в уравнении баланса мгновенных мощностей действительную и мнимую части, давая таким образом наглядную геометрическую и физическую интерпретации “полезных” и неэффективных потоков электрической энергии в единицу времени. Полученные в диссертации формулы для случая сбалансированных активно-реактивных нагрузок полностью совпадают с классическими выражениями для вычисления полной, активной и реактивной мощностей, однако при этом описывают не усредненные за период величины, а мгновенные режимы работы трехфазных систем и не требуют дополнительного интегрирования квадратичных зависимостей фазных токов и напряжений. При этом геометрическое изображение на плоскости модулей скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при симметричной системе трехфазных переменных позволяет использовать на практике хорошо проработанные методы анализа установившихся процессов линейных синусоидальных цепей с использованием комплексной плоскости.

Как показали проведенные экспериментальные исследования, техническая реализация алгоритмов управления АСФ в гиперкомплексном пространстве $\mathbf{H}$ на базе микропроцессорных устройств не требует привлечения высокопроизводительных программно-аппаратных средств, т.к. выработка задающих воздействий на токи компенсации осуществляется с меньшим количеством математических операций и без привлечения линейных ортогональных преобразований. При этом динамические характеристики синтезированного астатического контура регулирования напряжения силового емкостного фильтра в режимах отработки ненулевых начальных условий имеют близкое к желаемому качество переходных процессов как в линейной области “в малом”, так и при ограничении “в большом”.

Обобщая вышеизложенное можно заключить, что полученные в работе научно-прикладные результаты в области анализа и синтеза электротехнических или электромеханических систем переменного тока с силовыми полупроводниковыми преобразовательными устройствами активной фильтрации обеспечивают

повышение энергоэффективности процессов передачи, распределения и преобразования электрической энергии переменного тока за счет частичной или полной компенсации составляющих мгновенной мощности, обусловленной негативным действием параметрической асимметрии и нелинейности цепей нагрузки, что соответствует заявленной цели диссертационного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агунов, А. В. Спектрально-частотная силовая активная фильтрация / А. В. Агунов // Электротехника. – 2004. – № 10. – С. 30–32.
2. Акивис, М. А. Тензорное исчисление / М. А. Акавис, В. В. Гольдберг. – Москва : Физматлит, 2003. – 304 с.
3. Арнольд, В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов / В. И. Арнольд. – Москва : МЦНМО, 2002. – 40 с.
4. Арнольд, И. В. Теоретическая арифметика / И. В. Арнольд. – Москва : Учпедгиз, 1938. – 480 с.
5. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 336 с.
6. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. Ф. Белецкий. – Москва : Радио и связь, 1986. – 544 с.
7. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 352 с.
8. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 200 с.
9. Берестов, В. М. Синтез системы векторного управления асинхронного электропривода типа “ЭРАТОН–М4” / В. М. Берестов, О. В. Нос // Система управления транзисторного электропривода “ЭРАТОН–М4”: вопросы теории. – Новосибирск : Новосиб. пред. полиграф. и изд-ва, 2001. – С. 2–28.
10. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – Москва : Высш. шк., 1967. – 776 с.
11. Борисов, А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Ижевск : НИЦ “РХД”, 2001. – 384 с.
12. Бранец, В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 320 с.

13. Важнов, А. И. Переходные процессы в машинах переменного тока / А. И. Важнов. – Ленинград : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. – 256 с.
14. Вигнер, Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров / Е. Вигнер ; пер. с англ. Н. П. Клепникова ; под ред. Я. А. Смородинского. – Новокузнецк : Изд-во ИО НФМИ, 2000. – 440 с.
15. Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представления групп / Н. Я. Виленкин. – Москва : Наука, 1965. – 588 с.
16. Волков, А. В. Снижение потерь мощности в трехпроводной сети переменного напряжения посредством симметрирования сетевых фазных токов активным фильтром / А. В. Волков, В. А. Волков // Электротехника. – 2011. – № 10. – С. 34–43.
17. Востриков, А. С. Синтез систем регулирования методом локализации: монография / А. С. Востриков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 252 с.
18. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Физматлит, 2010. – 559 с.
19. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – Москва : Добросвет ; КДУ, 2007. – 320 с.
20. Голдстейн, Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 416 с.
21. ГОСТ Р 32144-2013. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. 2014-07-01. – Москва : Стандартинформ, 2014. – 16 с.
22. Гудков, А. В. Анализ искажений синусоидальности напряжения и возникновения добавочных потерь электроэнергии в офисно-деловом центре г. Самара / А. В. Гудков, Е. А. Кротков, К. С. Аверьянова // Известия вузов. Электромеханика. – 2014. – № 3. – С. 26–28.

23. Долингер, С. Ю. Проблемы активной фильтрации кривой тока в четырехпроводной трехфазной сети / С. Ю. Долингер, С. В. Бирюков, Р. К. Романовский // Омский научный вестник. – 2012. – № 2. – С. 215–218.
24. Дубровин, Б. А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б. А. Дубровин, Б. А. Новиков, С. П. Фоменко. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.
25. Ефимов, А. А. Активные преобразователи в регулируемых электроприводах переменного тока / А. А. Ефимов, Р. Т. Шрейнер. – Новоуральск : Изд-во НГТИ, 2001. – 250 с.
26. Ефремов, А. П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля / А. П. Ефремов. – Москва : Изд-во РУДН, 2005. – 373 с.
27. Ефремов, А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории / А. П. Ефремов // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2004. – № 1. – С. 111–127.
28. Жемеров, Г. Г. Расчет параметров емкостного накопителя энергии компенсатора пульсаций мгновенной активной мощности / Г. Г. Жемеров, О. В. Ильина // Электричество. – 2008. – № 1. – С. 54–59.
29. Жемеров, Г. Г. Теория мощности Фризе и современные теории мощности / Г. Г. Жемеров, О. В. Ильина // Електротехніка і Електромеханіка. – 2007. – № 7. – С. 63–66.
30. Зиновьев, Г. С. Вентильные компенсаторы реактивной мощности, мощности искажений и мощности несимметрии на базе инвертора напряжения / Г. С. Зиновьев // Современные задачи преобразовательной техники. – Киев : Изд-во ИЭД АН УССР, 1975. – Ч. 2. – С. 247–252.
31. Зиновьев, Г. С. Основы силовой электроники : учеб. пособие / Г. С. Зиновьев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 672 с. – (Учебники НГТУ).
32. Зиновьев, Г. С. Прямые методы расчета энергетических показателей вентильных преобразователей / Г. С. Зиновьев. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 1990. – 220 с.

33. Змиева, К. А. Применение автоматических компенсаторов реактивной мощности для повышения энергоэффективности управления электроприводом металлообрабатывающих станков / К. А. Змиева // Электротехника. – 2009. – № 1. – С. 26–31.

34. Ивакин, В. Н. Внешние характеристики устройств гибких передач переменного тока и их влияние на характеристики мощности управляемых линий электропередачи переменного тока / В. Н. Ивакин, В. Д. Ковалев // Электричество. – 2001. – № 9. – С. 30–37.

35. Ивакин, В. Н. Перспективы применения силовой преобразовательной техники в электроэнергетике / В. Н. Ивакин // Электротехника. – 2005. – № 12. – С. 10–19.

36. Кантор, И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 144 с.

37. Касаткин, А. С. Электротехника : учеб. пособие для вузов / А. С. Касаткин, М. В. Немов. – Москва : Энергоатомиздат, 1983. – 440 с.

38. Кирюхин, А. Ю. Гибридный фильтр высших гармоник для трехфазных сетей переменного тока 0,4 кВ / А. Ю. Кирюхин, И. Г. Буре // Электротехника. – 2008. – № 5. – С. 37–41.

39. Киселев, М. Г. Анализ режимов работы статического компенсатора реактивной мощности в режиме симметрирования нагрузки / М. Г. Киселев, Ю. К. Розанов // Электричество. – 2012. – № 3. – С. 63–69.

40. Клиот-Дашинский, М. И. Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-Дашинский. – Санкт-Петербург : Лань, 2001. – 160 с.

41. Коваль, А. А. Система управления активным параллельным фильтром электроэнергии, адаптированная к электроприводу постоянного тока Система управления активным параллельным фильтром электроэнергии, адаптированная к электроприводу постоянного тока : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.09.03 / А. А. Коваль ; Липецк. гос. техн. ун-т. – Липецк, 2006. – 18 с.

42. Ковач, К. П. Переходные процессы в машинах переменного тока / К. П. Ковач, И. Рац. – Москва ; Ленинград : Госэнергоиздат, 1963. – 744 с.
43. Компенсаторы реактивной мощности для регулирования с стабилизации напряжения высоковольтной электрической сети / А. М. Брянцев, Б. И. Базылев, А. И. Лурье, М. О. Райченко, С. В. Смолоник // Электротехника. – 2013. – № 2. – С. 2–10.
44. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 720 с.
45. Косоухов, Ф. Д. Снижение потерь от несимметрии токов и повышение качества электрической энергии в сетях 0,38 кВ с коммунально-бытовыми нагрузками / Ф. Д. Косоухов, Н. В. Васильев, А. О. Филиппов // Электротехника. – 2014. – № 6. – С. 8–12.
46. Кошелев, К. С. Выбор параметров статического компенсатора реактивной мощности СТАТКОМ / К. С. Кошелев, М. В. Пешков // Электротехника. – 2008. – № 7. – С. 34–37.
47. Кувшинов, А. А. Гармонический анализ мгновенной мощности пассивного двухполюсника / А. А. Кувшинов // Электричество. – 2013. – № 3. – С. 54–59.
48. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 280 с.
49. Лохов, С. П. Энергетические составляющие мощности вентильных преобразователей. Однофазные цепи : учеб. пособие / С. П. Лохов. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 1999. – Ч. 1. – 106 с.
50. Лурье, А. Н. Аналитическая механика / А. Н. Лурье. – Москва : ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
51. Лютаревич, А. Г. Оценка эффективности использования активного фильтра гармоник в системах электроснабжения / А. Г. Лютаревич, С. Ю. Долингер // Омский научный вестник. – 2010. – № 1. – С. 133–136.

52. Математические основы теории автоматического регулирования : учеб. пособие : в 3 т. / В. А. Иванов, В. С. Медведев, Б. К. Чемоданов, А. С. Ющенко ; под ред. Б. К. Чемоданова. – Москва : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. – Т. 1. – 552 с.

53. Мещеряков, В. Н. Компенсация гармонических искажений и реактивной мощности в однофазных электрических сетях посредством параллельного активного фильтра электроэнергии на базе релейного регулятора / В. Н. Мещеряков, М. М. Хабибулин // Известия вузов. Электромеханика. – 2013. – № 4. – С. 54–57.

54. Михайлов, О. П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов : учеб. для вузов / О. П. Михайлов. – Москва : Машиностроение, 1990. – 304 с.

55. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики : учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н. Н. Никитин. – Москва : Высш. шк., 1990. – 607 с.

56. Нос, О. В. Алгоритм управления выходными токами активного силового фильтра с использованием гиперкомплексных чисел / О. В. Нос, В. В. Панкратов // Известия вузов. Электромеханика. – 2012. – № 6. – С. 33–39.

57. Нос, О. В. Алгоритм управления напряжением звена постоянного тока активного силового фильтра / О. В. Нос, В. В. Панкратов, К. А. Шалыгин // Электротехника. – 2013. – № 12. – С. 36–40.

58. Нос, О. В. Алгоритмы компенсации мгновенной неактивной мощности с использованием p - q и p - q - r теорий / О. В. Нос // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014) : тр. 12 междунар. конф. АПЭП-2014, Новосибирск, 2–4 окт. 2014 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 7. – С. 166–170.

59. Нос, О. В. Алгоритмы управления активными силовыми фильтрами при несимметричной нелинейной нагрузке / О. В. Нос, В. В. Панкратов, К. А. Шалыгин // 7 международная (18 Всероссийская) конференция по автоматизированному электроприводу. АЭП-2012 = Proceedings of the Seventh International (Eighteenth

All-Russian) conference on the automatic electric drive, (Иваново, 2–4 окт. 2012 г.). – Иваново, 2012. – С. 69–74.

60. Нос, О. В. Алгоритмы управления последовательно-параллельными активными силовыми фильтрами / О. В. Нос, Е. С. Кучер, А. В. Бакляк // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – №2 (27). – С. 77–87.

61. Нос, О. В. Анализ нелинейностей преобразователя частоты в электроприводах переменного тока / О. В. Нос, В. М. Берестов // Автоматизированные электромеханические системы : коллектив. моногр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – С. 81–89.

62. Нос, О. В. Анализ различных форм представления кинематических параметров в задачах линейного преобразования трехфазных переменных / О. В. Нос // Известия вузов. Электромеханика. – 2012. – № 5. – С. 22–28.

63. Нос, О. В. Анализ трехфазных систем компенсации мгновенной неэффективной мощности в кватернионном базисе / О. В. Нос, В. В. Панкратов // Известия вузов. Электромеханика. – 2013. – № 6. – С. 3–8.

64. Нос, О. В. Аналитическое исследование уравнения мгновенной мощности трехфазной нагрузки в гиперкомплексном пространстве / О. В. Нос // Электричество. – 2015. – № 5. – С. 54–59.

65. Нос, О. В. Гармонический анализ кватерниона мгновенной мощности трехфазной нагрузки произвольного вида / О. В. Нос // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 1 (26). – С. 75–84.

66. Нос, О. В. Линейные преобразования векторов и систем координат в математических моделях асинхронного двигателя / О. В. Нос // 9 International conference on actual problems of electronic instrument engineering proceedings. APEIE–2008 = Материалы 9 международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”. АПЭП–2008, Новосибирск, 2008 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – Т. 7. – С. 104–107.

67. Нос, О. В. Линейные разложения трехфазных токов по мгновенным значениям / О. В. Нос // Электротехника, электромеханика и электротехнологии : сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – С. 29–43.

68. Нос, О. В. Математическая модель асинхронного двигателя в линейных пространствах, связанных со статором и ротором / О. В. Нос // Известия вузов. Электромеханика. – 2008. – № 2. – С. 14–20.

69. Нос, О. В. Математические модели преобразования энергии в асинхронном двигателе : учеб. пособие / О. В. Нос. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – 168 с.

70. Нос, О. В. Математические модели управляемых технических систем : учеб. пособие / О. В. Нос. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2006. – 48 с.

71. Нос, О. В. Математические модели электрических машин переменного тока с использованием спинных матриц Паули / О. В. Нос // Электротехника, электромеханика и электротехнологии. ЭЭЭ–2009 : материалы 4 науч.-техн. конф. с междунар. участием, Новосибирск, 23–24 окт. 2009 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – С. 128–134.

72. Нос, О. В. Оптимизация установившихся режимов работы асинхронного электропривода с учетом нелинейности магнитной системы / О. В. Нос // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2006. – № 4. – С. 27–30.

73. Нос, О. В. Основные положения P – Q теории мгновенной мощности трехфазных систем / О. В. Нос, К. А. Шалыгин // Автоматизированный электропривод и промышленная электроника : тр. 5 Всерос. науч.-практ. конф., Новокузнецк, 20–22 нояб. 2012 г. – Новокузнецк : [Издат. центр СибГИУ], 2012. – С. 261–267.

74. Нос, О. В. Применение алгебры кватернионов в математических моделях электрических машин переменного тока / О. В. Нос // Автоматизированные электромеханические системы : сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – С. 16–32.

75. Нос, О. В. Применение математического аппарата гиперкомплексных чисел при линейном преобразовании типа “вращение” / О. В. Нос // 10 International conference on actual problems of electronic instrument engineering proceedings. APEIE–2010 = Материалы 10 международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”. АПЭП–2010, Новосибирск, 2010 г. – Новосибирск, 2010. – Т. 7. – С. 46–50.

76. Нос, О. В. Применение углов Эйлера-Крылова при линейном преобразовании базиса фазных переменных / О. В. Нос // Актуальные проблемы электронного приборостроения. (АПЭП–2012) = International conference on actual problems of electronic instrument engineering proceedings (APEIE–2012) : материалы 11 междунар. конф., Новосибирск, 2–4 окт., 2012 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – Т. 7. – С. 139–142.

77. Нос, О. В. Разработка и оптимизация алгоритмов управления асинхронным электроприводом на основе метода непрерывной иерархии : дис. ... канд. техн. наук: 05.09.03 / О. В. Нос. – Новосибирск, 1999. – 247 с.

78. Нос, О. В. Система управления полупроводниковым устройством компенсации кватерниона мгновенной неэффективной мощности / О. В. Нос // 8 международная (19 Всероссийская) конференция по автоматизированному электроприводу. АЭП–2014 = Proceedings of the 8 International (19 All-Russian) conference on the automatic electric drive, Саранск, 7–9 окт. 2014 г. В 2 т. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2014. – Т. 1. – С. 229–234.

79. Нос, О. В. Система управления силовыми токами компенсации мгновенной неэффективной мощности / О. В. Нос, С. А. Харитонов // Электротехника. – 2015. – № 2. – С. 28–34.

80. Нос, О. В. Уравнения баланса мощности в математических моделях асинхронного двигателя в различных линейных пространствах / О. В. Нос // Электричество. – 2007. – № 8. – С. 43–47.

81. Нос, О. В. Экспериментальное исследование алгоритмов управления активным силовым фильтром с компенсацией мгновенной неэффективной мощности /

О. В. Нос, В. В. Панкратов // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. Серія “Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика” (спец. вип.). – 2013. – № 36 (1009). – С. 431–432.

82. Общая электротехника : учеб. пособие для вузов / А. Т. Блажкин, В. А. Бесекерский, Б. В. Фролов [и др.]. – Ленинград : Энергия, 1979. – 472 с.

83. Панкратов, В. В. Алгоритмы управления асинхронными электроприводами в режимах токоограничения / В. В. Панкратов, О. В. Нос // Электротехника. – 2000. – № 11. – С. 23–25.

84. Панкратов, В. В. Векторное управление асинхронными электроприводами : учеб. пособие / В. В. Панкратов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1999. – 66 с.

85. Панкратов, В. В. Избранные разделы теории автоматического управления : учеб. пособие / В. В. Панкратов, О. В. Нос, Е. А. Зима. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 223 с. – (Учебники НГТУ).

86. Панкратов, В. В. Оптимизация алгоритмов векторного управления асинхронным электроприводом на основе метода непрерывной иерархии / В. В. Панкратов, О. В. Нос // Электричество. – 2000. – № 6. – С. 48–53.

87. Панкратов, В. В. Оптимизация динамических режимов в асинхронном электроприводе с учетом ограничений / В. В. Панкратов, О. В. Нос // Известия вузов. Электромеханика. – 1999. – № 4. – С. 51–56.

88. Панкратов, В. В. Специальные разделы теории автоматического управления. Модальное управление и наблюдатели : учеб. пособие / В. В. Панкратов, О. В. Нос. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – Ч. 1. – 48 с.

89. Первозванский, А. А. Курс теории автоматического управления : учеб. пособие / А. А. Первозванский. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 624 с.

90. Поднебесная, С. К. Силовой параллельный активный фильтр с повышенной эффективностью / С. К. Поднебесная, Бурлака В. В., Гулаков С. В. // Электротехника. – 2013. – № 6. – С. 15–20.

91. Попов, Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: учебное пособие / Е. П. Попов. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
92. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра : учеб. пособие для вузов / М. М. Постников. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 400 с.
93. Применение гибридных фильтров для улучшения качества электроэнергии / Г. М. Мустафа, А. Ю. Кутейникова, Ю. К. Розанов, И. В. Иванов // Электричество. – 1995. – № 10. – С. 33–39.
94. Птицина, Е. В. Влияние на электрическую сеть электротехнологических установок с питанием током сложной формы / Е. В. Птицина // Электротехника. – 2008. – № 1. – С. 11–15.
95. Регулируемые источники реактивной мощности с управляемыми подмагничиванием шунтирующими реакторами и батареями конденсаторов / А. М. Брянцев, М. А. Брянцев, С. В. Дягилева, Р. Р. Карымов, А. И. Лурье, Е. Е. Маклецова, А. А. Негрышев // Электротехника. – 2010. – № 4. – С. 11–19.
96. Родькин, Д. И. Декомпозиция составляющих мощности полигармонических сигналов / Д. И. Родькин // Электротехника. – 2003. – № 3. – С. 34–37.
97. Розанов, Ю. К. Гибридные фильтры для снижения несинусоидальности тока и напряжения в системах электроснабжения / Ю. К. Розанов, Р. П. Гринберг // Электротехника. – 2006. – № 10. – С. 55–60.
98. Розанов, Ю. К. Современные методы регулирования качество электроэнергии средствами силовой электроники / Ю. К. Розанов, М. В. Рябчицкий, А. А. Кваснюк // Электротехника. – 1999. – № 4. – С. 28–32.
99. Савиных, В. В. Синтез алгоритма управления компенсатора тока нулевой последовательности / В. В. Савиных, В. В. Тропин // Известия вузов. Электромеханика. – 2012. – № 3. – С. 60–63.
100. Сазонов, В. В. Кондиционеры сети на основе активных фильтров / В. В. Сазонов // Электротехника. – 2007. – № 5. – С. 28–34.

101. Силовая электроника и качество электроэнергии / Ю. К. Розанов, М. В. Рябчицкий, А. А. Кваснюк, Р. П. Гринберг // Электротехника. – 2002. – № 2. – С. 16–23.
102. Синг, Дж. Л. Классическая динамика / Дж. Л. Синг. – Москва : Физматгиз, 1963. – 448 с.
103. Ситников, В. Ф. Силовая электроника в системах электроснабжения переменного тока / В. Ф. Ситников // Электричество. – 2008. – № 2. – С. 33–38.
104. Стрикос, Д. Анализ и исследование нового класса силовых фильтров для трехфазных промышленных сетей 380 В : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.09.03 / Д. Стрикос. – Москва : Изд-во МЭИ, 2000. – 20 с.
105. Темербаев, С. А. Гибридные фильтрокомпенсирующие устройства для управления качеством электроэнергии в распределительных сетях : автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.14.02 / С. А. Темербаев. – Красноярск : Изд-во СФУ, 2013. – 20 с.
106. Титце, У. Полупроводниковая схемотехника / У. Титце, К. Шенк. – Москва : Мир, 1982. – 512 с.
107. Троицкий, А. И. Применение конденсаторов для компенсации реактивной мощности и улучшения качества электроэнергии / А. И. Троицкий, А. Ю. Афанасьев // Известия вузов. Электромеханика. – 2005. – № 5. – С. 33–37.
108. Уиттекер, Э. Т. Аналитическая динамика: пер. с англ. / Э. Т. Уиттекер. – 2-е изд., испр. – Москва : Эдиториал УРСС, 2004. – 504 с.
109. Фадеев, Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для втузов / Д. К. Фадеев. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 416 с.
110. Фурман, А. Я. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / А. Я. Фурман. – Москва : Физматлит, 2004. – 456 с.
111. Харитонов, С. А. Алгебры кватернионов и октав в представлении электрических величин нелинейных электрических цепей с вентилями / С. А. Харитонов

// Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-1998 : тр. 4 международного конф., 23–26 сент. 1998 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – Т. 7. – С. 31–32.

112. Харитонов, С. А. Системы генерирования электрической энергии для ветроэнергетики и автономных подвижных объектов (Анализ и синтез) : дис. ... д-ра техн. наук: 05.09.03 / С. А. Харитонов. – Новосибирск, 1998. – 619 с.

113. Цехан, О. Б. Матричный анализ : учеб. пособие / О. Б. Цехан. – Гродно : Изд-во ГГУ им. Я. Купалы, 2010. – 372 с.

114. Цицикян, Г. Н. О методе преобразований для нахождения компенсирующих токов в трехфазной системе / Г. Н. Цицикян // Электричество. – 2009. – № 5. – С. 8–13.

115. Цицикян, Г. Н. Об оценке несимметрии напряжений в трехфазных системах электроснабжения / Г. Н. Цицикян, Г. З. Зайцев // Электричество. – 1999. – № 5. – С. 13–17.

116. Цыпкин, А. Г. Справочник по математике для средних учебных заведений / А. Г. Цыпкин. – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.

117. Чаплыгин, Е. Е. Компенсация неактивных составляющих полной мощности дуговых сталеплавильных печей / Е. Е. Чаплыгин, О. С. Ковырзина // Электричество. – 2009. – № 11. – С. 30–38.

118. Челноков, Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управление движением / Ю. Н. Челноков. – Москва : Физматлит, 2011. – 560 с.

119. Шалыгин, К. А. Техническая реализация принципов энергосбережения на базе активных силовых фильтров / К. А. Шалыгин, О. В. Нос // 8 международная (19 Всероссийская) конференция по автоматизированному электроприводу. АЭП–2014 = Proceedings of the 8 International (19 All-Russian) conference on the automatic electric drive, Саранск, 7–9 окт. 2014 г. В 2 т. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2014. – Т. 2. – С. 28–32.

120. Шалыгин, К. А. Активные силовые фильтры в задачах повышения качества электрической энергии / К. А. Шалыгин, О. В. Нос // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 4 (53). – С. 191–202.

121. Шрейнер, Р. Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты / Р. Т. Шрейнер. – Екатеринбург : Урал. отд-ние РАН, 2000. – 654 с.

122. A new control strategy of UPQC in three-phase four-wire system / T. Zhili, L. Xun, C. Jian, K. Yong, Z. Yang // IEEE 38 annual power electronics specialists conference, PESC07 : [proc.], USA, Orlando, 17–21 June 2007. – IEEE Press, 2007. – P. 1060–1065.

123. A novel control algorithm for static series compensators by use of pqr instantaneous power theory / S.-J. Lee, H. Kim, S.-K. Sul, F. Blaabjerg // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2004. – Vol. 19, № 3. – P. 814–827.

124. A practical comparative evaluation of different active harmonic filter [Electronic resource] / P. Salmerón, S. P. Litrán, R. S. Herrera, J. R. Vázquez // International conference on renewable energy and power quality (ICREPQ'11), Spain, Las Palmas de Gran Canaria 13–15 Apr. 2011. – [Spain], 2011. – 6 p. – Mode of access: <http://icrepq.com/icrepq'11/230-salmeron.pdf>. – Title from screen.

125. Active power filter: review of converter topologies and control strategies / L. Saribulut, A. Teke, M. E. Meral, M. Tumay // Gazi University Journal of Science. – 2011. – Vol. 24, № 2. – P. 283–289.

126. Afonso, J. L. P-q theory power components calculations / J. L. Afonso, M. J. Sepulveda Freitas, J. S. Martins // IEEE international symposium on industrial electronics, ISIE 2003, Brazil, Rio de Janeiro, 9–11 June 2003 : [proceedings]. – IEEE Press, 2003. – Vol. 1. – P. 385–390.

127. Akagi, H. Active harmonic filters / H. Akagi // Proceedings of the IEEE. – 2005. – Vol. 93, № 12. – P. 2128–2141.

128. Akagi, H. Control strategy of active power filters using multiple voltage-source PWM converters / H. Akagi, A. Nabae, S. Atoh // IEEE Transactions on Industry Applications. – 1986. – Vol. IA-22, № 3. – P. 460–465.

129. Akagi, H. Generalized theory of the instantaneous reactive power and its application / H. Akagi, Y. Kanazawa, A. Nabae // Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan. – 1983. – Vol. 103-B, № 7. – P. 483–490.

130. Akagi, H. Generalized theory of the instantaneous reactive power in three-phase circuits / H. Akagi, Y. Kanazawa, A. Nabae // Proceedings of the international power electronics conference (IPEC '83), Japan, Tokio, 1983. – Tokyo, 1983. – P. 1375–1386.

131. Akagi, H. Instantaneous power theory and applications to power conditioning / H. Akagi, E. H. Watanabe, M. Aredes. – 2 ed. – Wiley : IEEE Press, 2007. – 379 p.

132. Akagi, H. Instantaneous reactive power compensator comprising switching devices without energy storage components / H. Akagi, Y. Kanazawa, A. Nabae // IEEE Transactions on Industry Applications. – 1984. – Vol. IA-20, № 3. – P. 625–630.

133. Akagi, H. Large static converters for industry and utility applications / H. Akagi // Proceedings of the IEEE. – 2001. – Vol. 89, № 6. – P. 976–983.

134. Akagi, H. New trends in active power filters for power conditioning / H. Akagi // IEEE Transactions on Industry Applications. – 1996. – Vol. 32, № 6. – P. 1312–1322.

135. Akagi, H. The theory of instantaneous power in three-phase four-wire systems: a comprehensive approach / H. Akagi, S. Ogasawara, H. Kim // IEEE industry applications conference : Thirty-fourth IAS annual meeting, USA, 3–7 Oct. 1999 : [proc.]. – Piscataway : IEEE Press, 1999. – Vol. 1. – P. 431–439.

136. Aredes, M. New control algorithms for series and shunt three phase four-wire active power filters / M. Aredes, E. H. Watanabe // IEEE Transactions on Power Delivery. – 1995. – Vol. 10, № 3. – P. 1649–1656.

137. Cividino, L. Power factor, harmonics distortion; causes, effects and considerations / L. Cividino // Fourteenth international telecommunications energy conference,

INTELEC '92 : [proc.], USA, Washington, 4–8 Oct. 1992. – IEEE Press, 1992. – P. 506–513.

138. Controller for three-phase four-wire shunt active power filter [Electronic resource] / R. Pindado, P. Rodriguez, J. Pou, I. Candela // The international conference on renewable energies and power quality, ICREPQ'04, Spain, Barcelona, 31 March – 2 Apr. 2004. – Barcelona, 2004. – Art. 287 (8 p.). – Mode of access: <http://www.icrepq.com/INDICE.html>. – Title from screen.

139. Cristaldi, L. A linear transformation and related algebra for the study of four-wire three-phase systems under non-sinusoidal conditions / L. Cristaldi, A. Ferrero // IEEE international workshop on advanced mathematical methods in electrical and electronic measurements : proc., Como, Italia, 1994. – IEEE Press, 1994. – P. 101–117.

140. Cristaldi, L. Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: an algebraic approach / L. Cristaldi, A. Ferrero // European Transactions on Electrical Power. – 1996. – Vol. 6, № 5. – P. 305–309.

141. Cristaldi, L. Power and current decompositions into time- and frequency-domain components: analysis and comparison / L. Cristaldi, A. Ferrero, G. Superti Furga // European Transactions on Electrical Power. – 1994. – Vol. 4, № 5. – P. 359–367.

142. Czarnecki, L. S. On some misinterpretations of the instantaneous reactive power p-q theory / L. S. Czarnecki // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2004. – Vol. 19, № 3. – P. 828–836.

143. Diseño y realización de un acondicionador activo de potencia para compensación estática de cargas no lineales [Electronic resource] / A. Pérez, J. Prieto, P. Salmerón, J. R. Vázquez // 12 Reunión de Grupos de Investigación en Ingeniería Eléctrica, 12 RGIIE, Córdoba, España, 2002. – [España], 2002. – 5 p. – Mode of access: http://www.uhu.es/geyer/Congresos_nac/congresos%20nacionales/CN_13.pdf. – Title from screen.

144. Duesterhoeft, W. C. Determination of instantaneous currents and voltages by means of alpha, beta, and zero components / W. C. Duesterhoeft, M. W. Schulz,

E. Clarke // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. – 1951. – Vol. 70, № 2. – P. 1248–1255.

145. European Norm EN 50160 Voltage characteristics of electricity supplied by public distribution systems // European Committee for Electrotechnical Standardization CENELEC, Brussels, Belgium. – 3 ed. – Belgium, 2003. – 20 p.

146. Ferrero, A. A new approach to the definition of power components in three-phase systems under nonsinusoidal conditions / A. Ferrero, G. Superti Furga // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1991. – Vol. 40, № 3. – P. 568–577.

147. Ferrero, A. Measuring electric power quality: problems and perspectives / A. Ferrero // Measurement. – 2008. – Vol. 41, № 2. – P. 121–129.

148. Fryze, S. Wirk-, blind-, und scheinleistung in elektrischen stromkreisen mit nicht-sinusformigem verlauf von strom und spannung / S. Fryze // Elektrotechnische Zeitschrift. – 1932. – Vol. 53, № 25. – P. 596–599.

149. Fryze, S. Wirk-, blind-, und scheinleistung in elektrischen stromkreisen mit nicht-sinusformigem verlauf von strom und spannung / S. Fryze // Elektrotechnische Zeitschrift. – 1932. – Vol. 53, № 26. – P. 625–627.

150. Fryze, S. Wirk-, blind-, und scheinleistung in elektrischen stromkreisen mit nicht-sinusformigem verlauf von strom und spannung / S. Fryze // Elektrotechnische Zeitschrift. – 1932. – Vol. 53, № 29. – P. 700–702.

151. Furuhashi, T. A study on the theory of instantaneous reactive power / T. Furuhashi, S. Okuma, Y. Uchikawa // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1990. – Vol. 37, № 1. – P. 86–90.

152. Generalized instantaneous reactive power theory in poly-phase power systems [Electronic resource] / R. S. Herrera, P. Salmerón, J. R. Vázquez, S. P. Litrán, A. Pérez // The 13 European conference on power electronics and applications, EPE 2009. Spain, Barcelona, 8–10 Sept. 2009. – Barcelona, 2009. – 10 p. – Mode of access: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5279292&abstractAccess=no&userType=inst. – Title from screen.

153. Hamilton, W. R. Elements of quaternions / W. R. Hamilton. – London : Longmans, Green, & Co, 1866. – 762 p.
154. Herrera, R. S. Instantaneous reactive power theory applied to active power filter compensation: different approaches, assessment, and experimental results / R. S. Herrera, P. Salmerón, H. Kim // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2008. – Vol. 55, № 1. – P. 184–196.
155. Herrera, R. S. Instantaneous reactive power theory: a reference in the nonlinear loads compensation / R. S. Herrera, P. Salmerón // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2009. – Vol. 56, № 6. – P. 2015–2022.
156. Herrera, R. S. Nuevas propuestas en la teoría de la potencia reactiva instantánea: aplicación a la compensación de cargas industriales con filtros activos de potencia : tesis doctoral / R. S. Herrera ; Univ. de Huelva. – Huelva, 2007. – 284 p.
157. Hingorani, N. G. High power electronics and flexible ac transmission systems / N. G. Hingorani // IEEE Power Engineering Review. – 1988. – Vol. 8, № 7. – P. 3–4.
158. Hybrid active filter for reactive and harmonics compensation in a distribution network / V. F. Corasaniti, M. B. Barbieri, P. L. Arnera M. I. Valla // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2009. – Vol. 56, № 3. – P. 670–677.
159. Hybrid filters for power quality improvement / B. Singh, V. Verma, A. Chandra, K. Al-Haddad // IEE Proceedings – Generation, Transmission and Distribution. – 2005. – Vol. 152, № 3. – P. 365–378.
160. Instantaneous power compensation in three-phase systems by using p–q–r theory / H. Kim, F. Blaabjerg, D. Bak-Jensen, J. Choi // The IEEE 32 annual power electronics specialists conference, PESC 2001, Canada, Vancouver, 17–21 Jun. 2001. – Hong Kong : IEEE Press, 2001. – Vol. 2. – P. 478–485.
161. Instantaneous power compensation in three-phase systems by using p–q–r theory / H. Kim, F. Blaabjerg, D. Bak-Jensen, J. Choi // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2002. – Vol. 17, № 5. – P. 701–710.
162. Kessler, C. Ein Beitrag zur Theorie mehrschleifiger Regelungen / C. Kessler // Regelungstechnik. – 1960. – № 8. – S. 261–266.

163. Kim, H. The instantaneous power theory on the rotating p-q-r reference frames // H. Kim, H. Akagi // Proceedings of the IEEE 1999 international conference on power electronics and drive systems, PEDS'99, Hong Kong, 27–29 July 1999. – Hong Kong : IEEE Press, 1999. – Vol. 1. – P. 422–427.

164. Krim, F. Parameters estimation of shunt active filter for power quality improvement / F. Krim // The 5 international power engineering and optimization conference, PEOCO 2011, Malaysia, Shah Alam, 6–7 June 2011. – Hong Kong : IEEE Press, 2011. – P. 306–311.

165. Lee, G.-M. Control of series active power filters compensating for source voltage unbalance and current harmonics / G.-M. Lee, D.-C. Lee, J.-K. Seok // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2004. – Vol. 51, № 1. – P. 132–139.

166. Malyavko E. Y. Control strategy of inactive instantaneous power compensation in quaternion basis / E. Y. Malyavko, O. V. Nos // The 15 international conference of young specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM 2014) : proc., Altai, Erlagol, 30 June – 4 July 2014. – Novosibirsk : IEEE Press, 2014. – P. 411–414.

167. Montañó, J. C. Analysis of power losses for instantaneous compensation of three-phase four-wire systems / J. C. Montañó, P. Salmerón, J. Prieto // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2005. – Vol. 20, № 4. – P. 901–904.

168. Montañó, J. C. Instantaneous and full compensation in three-phase systems / J. C. Montañó, P. Salmerón // IEEE Transactions on Power Delivery. – 1998. – Vol. 13, № 4. – P. 1342–1347.

169. Montero, M. I. M. Comparison of control strategies for shunt active power filters in three-phase four-wire systems / M. I. M. Montero, E. R. Cadaval, F. B. González // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2007. – Vol. 22, № 1. – P. 229–236.

170. Mulla, M. A. Series active power filter using generalised instantaneous power theory / M. A. Mulla, R. Chudamani, A. Chowdhury // Proceedings of the World Congress on Engineering, WCE 2012, UK, London, 4–6 July 2012. – London : Newswood Ltd., 2012. – Vol. 2. – P. 1002–1006.

171. Nabae, A. An instantaneous distortion current compensator without any coordinate transformation / A. Nabae, H. Nakano, S. Togasawa // International Power Electronic Conference, IPEC'95 : proc., Japan, Yokohama, 3–7 Apr. 1995. – Yokohama, 1995. – P. 1651–1655.

172. Nasiri, A. Series-parallel active filter/uninterruptible power supply system / A. Nasiri, A. E. Amac, A. Emadi // Electric power components and systems. – 2004. – Vol. 32, № 11. – P. 1151–1163.

173. Ng, F. Analysis and control of UPQC and its DC-link power by use of p-q-r instantaneous power theory / F. Ng, M.-C. Wong, Y.-D. Han // The 1 international conference on power electronics systems and applications: proc., Hong Kong, 9–11 Nov., 2004. – Hong Kong, 2004. – P. 43–53.

174. Nos, O. V. A system to control power currents of ineffective instantaneous power compensation / O. V. Nos, S. A. Kharitonov // Russian Electrical Engineering. – 2015. – Vol. 86, № 2. – P. 72–78.

175. Nos, O. V. A voltage-control algorithm for a DC link of an active power filter / O. V. Nos, V. V. Pankratov, K. A. Shalygin // Russian Electrical Engineering. – 2013. – Vol. 84, № 12. – P. 691–695.

176. Nos, O. V. Control strategy of active power filter for ineffective instantaneous power compensation / O. V. Nos // The 15 international conference of young specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM 2014) : proc., Altai, Erlagol, 30 June – 4 July 2014. – Novosibirsk : IEEE Press, 2014. – P. 370–374.

177. Nos, O. V. Control strategy of shunt active power filter based on algebraic approach / O. V. Nos // The 16 international conference of young specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM 2015) : proc., Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. – Novosibirsk : IEEE Press, 2015. – P. 459–463.

178. Nos, O. V. DC-bus voltage control strategy of active power filter / O. V. Nos, K. A. Shalygin // 14 International conference of young specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM 2013): proc., Altai, Erlagol, 1–5 July 2013. – P. 345–348.

179. Nos, O. V. Linear transformations in mathematical models of an induction motor by quaternions / O. V. Nos // 13 International conference and seminar of young specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM 2012), Altai, Erlagol, 2–6 July 2012. – Novosibirsk, 2012. – P. 295–298.

180. Nos, O. V. Matrix transformations in mathematical models of an induction motor / O. V. Nos // The 9 international conference on actual problems of electronic instrument engineering, APEIE–2008, Novosibirsk, 23–25 Sept. 2008 : proceedings. – Novosibirsk, 2008. – Vol. 1. – P. 142–144.

181. On the meaning of the park power components in three-phase systems under non-sinusoidal conditions / A. Ferrero, A. P. Morando, R. Ottoboni, G. Superti Furga // European Transactions on Electrical Power. – 1993. – Vol. 3, № 1. – P. 33–43.

182. Park, R. H. Two-reaction theory of synchronous machines / R. H. Park // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. – 1929. – Vol. 48, № 3. – P. 716–727.

183. Peng, F. Z. A study of active power filters using quad-series voltage-source PWM converters for harmonic compensation / F. Z. Peng, H. Akagi, A. Nabae // IEEE Transactions on Power Electronics. – 1990. – Vol. 5, № 1. – P. 9–15.

184. Peng, F. Z. Generalized instantaneous reactive power theory for three-phase power systems / F. Z. Peng, J-S. Lai // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1996. – Vol. 45, № 1. – P. 293–297.

185. Peng, F. Z. Harmonic and reactive power compensation based on the generalized instantaneous reactive power theory for three-phase four-wire systems / F. Z. Peng, G. W. Ott, Jr., D. J. Adams // IEEE Transactions on Power Electronics. – 1998. – Vol. 13, № 6. – P. 1174–1181.

186. PI controlled three-phase shunt active power filter for power quality improvement / A. Chaoui, J. P. Gaubert, F. Krim, G. Champenois // Electric Power Components and Systems. – 2007. – Vol. 35, № 12. – P. 1331–1344.

187. Practical application of the instantaneous power theory in the compensation of four-wire three-phase systems / P. Salmerón, J. C. Montañó, J. R. Vázquez, J. Prieto,

A. Pérez // The 28 annual conference of the IEEE industrial electronics society IECON – 2002, Spain, Sevilla, 5–8 Nov. 2002. – IEEE Press, 2002. – Vol. 1. – P. 650–655.

188. Rastogi, M. A comparative evaluation of harmonic reduction techniques in three-phase utility interface of power electronic loads / M. Rastogi, R. Naik, N. Mohan // IEEE Transactions on Industry Applications. – 1994. – Vol. 30, № 5. – P. 1149–1155.

189. Recent advances and industrial applications of multilevel converters / S. Kouro, M. Malinowski, K. Gopakumar, J. Pou, L. G. Franquelo, B. Wu, J. Rodriguez, M. A. Pérez, J. I. Leon // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2010. – Vol. 57, № 8. – P. 2553–2580.

190. Salmerón, P. A new approach for three-phase loads compensation based on the instantaneous reactive power theory / P. Salmerón, R. S. Herrera, J. R. Vázquez // Electric Power Systems Research. – 2008. – Vol. 78, № 4. – P. 605–617.

191. Salmerón, P. Application of the instantaneous power theories in load compensation with active power filters [Electronic resource] / P. Salmerón, R. S. Herrera // The 10 European conference on power electronic and applications, EPE–2003, Toulouse, 2–4 Sept. 2003. – Toulouse, 2003. – 9 p. – Mode of access: http://www.uhu.es/geyer/Congresos_inter/congresos%20internacionales/CI_30.pdf. – Title from screen.

192. Salmerón, P. Componentes instantaneas de intensidad en sistemas polifasicos / P. Salmerón, J. C. Montaña // 4 Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica : actas, Portugal, Porto, 6–8 Julho 1995. – [Portugal], 1995. – Vol. 3. – P. 1309–1316.

193. Salmerón, P. Instantaneous power components in polyphase systems under nonsinusoidal conditions / P. Salmerón, J. C. Montaña // IEE Proceedings – Science, Measurement and Technology. – 1996. – Vol. 143, № 2. – P. 151–155.

194. Salmerón, P. Mapping matrices against vectorial frame in the instantaneous reactive power compensation / P. Salmerón, R. S. Herrera, J. R. Vázquez // IET Electric Power Applications. – 2007. – Vol. 1, № 5. – P. 727–736.

195. Sasaki, H. A new method to eliminate AC harmonic currents by magnetic compensation – consideration on basic design / H. Sasaki, T. Machida // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1971. – Vol. PAS-90, № 5. – P. 2009–2019.
196. Shin, H-B. New antiwindup PI controller for variable-speed motor drives / H-B. Shin // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1998. – Vol. 45, № 3. – P. 445–450.
197. Shunt active filter for power quality improvement / J. L. Afonso, M. Aredes, E. H. Watanabe, J. S. Martins // Electricity for a sustainable urban development : proc., the intern. conf., UIE 2000, Portugal, Lisboa, 1–4 Nov. 2000. – Lisboa, 2000. – P. 683–691.
198. Singh, B. A review of active filters for power quality improvement / B. Singh, K. Al-Haddad, A. Chandra // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1999. – Vol. 46, № 5. – P. 960–971.
199. Soares, V. Active power filter control circuit based on the instantaneous active and reactive current i_d - i_q method / V. Soares, P. Verdelho, G. D. Marques // The 28 annual IEEE power electronics specialists conference, PESC'97 Record, USA, 1997. – IEEE Press, 1997. – Vol. 2. – P. 1096–1101.
200. Soares, V. An instantaneous active and reactive current component method for active filters / V. Soares, P. Verdelho, G. D. Marques // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2000. – Vol. 15, № 4. – P. 660–669.
201. System design considerations for a high-power aerospace resonant link converter / T. M. Jahns, R. W. A. A. De Doncker, A. V. Radun, P. M. Szczesny, F. G. Tumbull // IEEE Transactions on Power Electronics. – 1993. – Vol. 8, № 4. – P. 663–672.
202. Takahashi, I. Analysis of instantaneous current and power using space switching functions / I. Takahashi // The 19 annual IEEE power electronics specialists conference, PESC'88 Record, Japan, Kyoto, 11–14 Apr. 1988 1997. – IEEE Press, 1988. – Vol. 1. – 1988. – P. 42–49.

203. The age of multilevel converters arrives / L. G. Franquelo, J. Rodríguez, J. I. Leon, S. Kouro, R. Portillo, Maria A. M. Prats // IEEE Industrial Electronics Magazine. – 2008. – Vol. 2, № 2. – P. 28–39.

204. Three-phase active power filter with integrator-proportional control / M. Sarra, K. Djazia, A. Chaoui, F. Krim // Journal of electrical systems. – 2009. – Vol. 5, № 1 suppl. – P. 79–84.

205. Three-phase inverter with a neutral leg with space vector modulation / R. Zhang, D. Boroyevich, H. V. Prasad, H. Mao, F. C. Lee, S. Dubovsky // Twelfth annual applied power electronics conference and exposition, APEC 97 : proc. conf., USA, Atlanta, 23–27 Feb. 1997. – IEEE Press, 1997. – Vol. 2. – P. 857–863.

206. Ustariz, A. J. Tensor analysis of the instantaneous power in electrical networks / A. J. Ustariz, E. A. Cano, H. E. Tacca // Electric Power Systems Research. – 2010. – Vol. 80, № 7. – P. 788–798.

207. Verdelho, P. A unity power factor PWM voltage rectifier based on the instantaneous active and reactive current i_d - i_q method / P. Verdelho, P. Soares // ISIE'97 : proc. of the IEEE international symposium on industrial electronics, Portugal, Guimariies, 7–11 July 1997. – IEEE Press, 1997. – Vol. 2. – P. 411–416.

208. Watanabe, E. H. New concepts of instantaneous active and reactive powers in electrical systems with generic loads / E. H. Watanabe, R. M. Stephan, M. Aredes // IEEE Transactions on Power Delivery. – 1993. – Vol. 8, № 2. – P. 697–703.

209. Willems, J. L. A new interpretation of the Akagi-Nabae power components for nonsinusoidal three-phase situations / J. L. Willems // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1992. – Vol. 41, № 4. – P. 523–527.

210. Willems, J. L. Discussions to the companion papers: mathematical foundations of the instantaneous power concepts: a geometrical approach. Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: an algebraic approach / J. L. Willems, L. Cristaldi, A. Ferrero // European Transactions on Electrical Power. – 1996. – Vol. 6, № 5. – P. 310.

211. Willems, J. L. Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: a geometrical approach / J. L. Willems // European Transactions on Electrical Power. – 1996. – Vol. 6, № 5. – P. 299–304.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В данном приложении представлены результаты промежуточных преобразований отдельных составляющих нормы кватерниона мгновенной мощности $\|\mathbf{P}_{ABC}\|$ применительно к активно-реактивным цепям линейной нагрузки с токами (3.31), которые включают в себя:

– квадратичные зависимости постоянных составляющих вещественных коэффициентов скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{ABC}^2 &= 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + \\
 &+ 8 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C), \\
 \bar{q}_A^2 &= \frac{u_m^2}{16} (i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + 3i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + 3i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
 &+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C) - i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C)) + \\
 &+ \frac{u_m^2}{16} (6i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C - 2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C), \\
 \bar{q}_B^2 &= \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
 &+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mC} \sin \varphi_C) - i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mC} \sin \varphi_C)) + \\
 &+ \frac{u_m^2}{16} (6i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C - 2i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C), \\
 \bar{q}_C^2 &= \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B) + \\
 &+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mB} \sin \varphi_B) - i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mA} \sin \varphi_A + i_{mB} \sin \varphi_B)) + \\
 &+ \frac{u_m^2}{16} (6i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B - 2i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B);
 \end{aligned}$$

– квадратичные зависимости амплитуд переменных составляющих вещественных коэффициентов скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ABC1}^2 &= \frac{1}{16} u_m^2 \left(4i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C \right) + \\
&+ 3 \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B - i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C \right) + \\
&+ \frac{u_m^2}{16} \left(2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C - 4i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B - 4i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C \right) + \\
&+ 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \sin \varphi_C - i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \sin \varphi_B \right) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B - i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \sin \varphi_C \right) - 6 \frac{u_m^2}{16} i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C, \\
\tilde{q}_{A1}^2 &= \frac{u_m^2}{16} \left(4i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + 4i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - 8i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C \right), \\
\tilde{q}_{B1}^2 &= \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mC} \sin \varphi_C) + i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mA} \sin \varphi_A) \right) - \\
&- \frac{u_m^2}{16} \left(2i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C + 6i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C \right), \\
\tilde{q}_{C1}^2 &= \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B \right) + \\
&+ 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mA} \sin \varphi_A) + i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mB} \sin \varphi_B) \right) - \\
&- \frac{u_m^2}{16} \left(2i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + 6i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B \right), \\
\tilde{p}_{ABC2}^2 &= \frac{1}{16} u_m^2 \left(4i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + \\
&+ 3 \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C \right) + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C - i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B \right) + \\
&+ \frac{u_m^2}{16} \left(2i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C - 4i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B - 4i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_B \sin \varphi_A - i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_A) + \\
& + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B - i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \sin \varphi_C) - 6 \frac{u_m^2}{16} i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C, \\
& \tilde{q}_{A2}^2 = \frac{u_m^2}{16} (4i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + 4i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C - 8i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C), \\
& \tilde{q}_{B2}^2 = \frac{u_m^2}{16} (3i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + 3i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
& + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mA} \sin \varphi_A) + i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mC} \sin \varphi_C)) - \\
& - \frac{u_m^2}{16} (6i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C + 2i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C), \\
& \tilde{q}_{C2}^2 = \frac{u_m^2}{16} (3i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + 3i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B) + \\
& + 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mB} \sin \varphi_B) + i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mA} \sin \varphi_A)) - \\
& - \frac{u_m^2}{16} (6i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + 2i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B);
\end{aligned}$$

– удвоенные зависимости результата произведения постоянного смещения и амплитуды переменной составляющие скалярной или векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\cos 2\omega t$

$$\begin{aligned}
2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC1} &= 4 \frac{u_m^2}{16} (2i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C - 2i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C) - \\
& - 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C), \\
2\bar{q}_A \tilde{q}_{A1} &= -4 \frac{u_m^2}{16} \cdot (i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + 8 \frac{u_m^2}{16} i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C) - i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C)), \\
& 2\bar{q}_B \tilde{q}_{B1} = 2 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C - i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \sin \varphi_C) - 4 \frac{u_m^2}{16} i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C, \\
& 2\bar{q}_C \tilde{q}_{C1} = 2 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - 3i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + 3i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \sin \varphi_B - i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B) - 4 \frac{u_m^2}{16} i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B;
\end{aligned}$$

– удвоенные зависимости результата произведения постоянного смещения и амплитуды переменной составляющей скалярной или векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\sin 2\omega t$

$$\begin{aligned}
2\bar{p}_{ABC} \tilde{p}_{ABC2} &= 4 \frac{u_m^2}{16} (-2i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \cos \varphi_C - i_{mB} \cos \varphi_B)) - \\
& - 8 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C)) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} \sin \varphi_B (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mC} \cos \varphi_C) + i_{mC} \sin \varphi_C (i_{mA} \cos \varphi_A + i_{mB} \cos \varphi_B)), \\
2\bar{q}_A \tilde{q}_{A2} &= 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B - i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C) - \\
& - 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B), \\
2\bar{q}_B \tilde{q}_{B2} &= 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \frac{u_m^2}{16} \left(-2i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (2i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_A - i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \sin \varphi_C) - 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C, \\
& 2\bar{q}_C \tilde{q}_{C2} = 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(-i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} \left(-2i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (2i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_B \sin \varphi_A - i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \sin \varphi_B) + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B;
\end{aligned}$$

– удвоенные зависимости результата произведения амплитуд переменных составляющих скалярной или векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\begin{aligned}
2\tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} &= 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B - i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} \left(-2i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B + i_{mC} \sin \varphi_C) + i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \cos \varphi_B + i_{mC} \cos \varphi_C)) - \\
& - 8 \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_B) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mC} \cos \varphi_C - i_{mB} \cos \varphi_B) + i_{mA} \sin \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C)), \\
2\tilde{q}_{A1} \tilde{q}_{A2} &= 8 \frac{u_m^2}{16} (i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mB} \sin \varphi_B) + i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C)), \\
2\tilde{q}_{B1} \tilde{q}_{B2} &= 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A - i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} \left(i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C \right) - \\
& - 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \sin \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_C \sin \varphi_A) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C - i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C), \\
2\tilde{q}_{C1} \tilde{q}_{C2} = & 2\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (-i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A - i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B) + \\
& + 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B) - \\
& - 4 \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \sin \varphi_B + i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_B \sin \varphi_A) + \\
& + 4\sqrt{3} \frac{u_m^2}{16} (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B - i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B);
\end{aligned}$$

– сумма квадратичных зависимостей постоянных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{ABC}^2 + \bar{q}_A^2 + \bar{q}_B^2 + \bar{q}_C^2 = & \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA}^2 \cos^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C) + \\
& + \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA}^2 \sin^2 \varphi_A + i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B + i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C) + \\
& + \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) + \\
& + \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA} i_{mB} \sin \varphi_A \sin \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \sin \varphi_B \sin \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \sin \varphi_A \sin \varphi_C) + \\
& + \sqrt{3} \frac{u_m^2}{8} (i_{mA} \cos \varphi_A (i_{mB} \sin \varphi_B - i_{mC} \sin \varphi_C) + i_{mB} \cos \varphi_B (i_{mC} \sin \varphi_C - i_{mA} \sin \varphi_A)) + \\
& + \sqrt{3} \frac{u_m^2}{8} i_{mC} \cos \varphi_C (i_{mA} \sin \varphi_A - i_{mB} \sin \varphi_B);
\end{aligned}$$

– сумма квадратичных зависимостей амплитуд переменных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\cos^2 2\omega t$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ABC1}^2 + \tilde{q}_{A1}^2 + \tilde{q}_{B1}^2 + \tilde{q}_{C1}^2 = & \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2) - \\
& - \frac{3}{8} u_m^2 (i_{mA} i_{mB} \cos \varphi_A \cos \varphi_B + i_{mB} i_{mC} \cos \varphi_B \cos \varphi_C + i_{mA} i_{mC} \cos \varphi_A \cos \varphi_C) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8}u_m^2(i_{mA}i_{mB}\sin\varphi_A\sin\varphi_B+i_{mB}i_{mC}\sin\varphi_B\sin\varphi_C+i_{mA}i_{mC}\sin\varphi_A\sin\varphi_C)+ \\
& +\sqrt{3}\frac{u_m^2}{8}(i_{mA}\cos\varphi_A(i_{mC}\sin\varphi_C-i_{mB}\sin\varphi_B)+i_{mB}\cos\varphi_B(i_{mA}\sin\varphi_A-i_{mC}\sin\varphi_C))+ \\
& +\sqrt{3}\frac{u_m^2}{8}i_{mC}\cos\varphi_C(i_{mB}\sin\varphi_B-i_{mA}\sin\varphi_A);
\end{aligned}$$

– сумма квадратичных зависимостей амплитуд переменных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\sin^2 2\omega t$

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_{ABC2}^2 + \tilde{q}_{A2}^2 + \tilde{q}_{B2}^2 + \tilde{q}_{C2}^2 = \frac{3}{8}u_m^2(i_{mA}^2 + i_{mB}^2 + i_{mC}^2) - \\
& -\frac{3}{8}u_m^2(i_{mA}i_{mB}\cos\varphi_A\cos\varphi_B+i_{mB}i_{mC}\cos\varphi_B\cos\varphi_C+i_{mA}i_{mC}\cos\varphi_A\cos\varphi_C) - \\
& -\frac{3}{8}u_m^2(i_{mA}i_{mB}\sin\varphi_A\sin\varphi_B+i_{mB}i_{mC}\sin\varphi_B\sin\varphi_C+i_{mA}i_{mC}\sin\varphi_A\sin\varphi_C) + \\
& +\sqrt{3}\frac{u_m^2}{8}(i_{mA}\cos\varphi_A(i_{mC}\sin\varphi_C-i_{mB}\sin\varphi_B)+i_{mB}\cos\varphi_B(i_{mA}\sin\varphi_A-i_{mC}\sin\varphi_C))+ \\
& +\sqrt{3}\frac{u_m^2}{8}(i_{mC}\cos\varphi_C(i_{mB}\sin\varphi_B-i_{mA}\sin\varphi_A));
\end{aligned}$$

– сумма удвоенных зависимостей результата произведения постоянного смещения и амплитуды переменной составляющей скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\cos 2\omega t$

$$\begin{aligned}
& 2\bar{p}_{ABC}\tilde{p}_{ABC1} + 2\bar{q}_A\tilde{q}_{A1} + 2\bar{q}_B\tilde{q}_{B1} + 2\bar{q}_C\tilde{q}_{C1} = \\
& = \frac{3}{8}u_m^2(2i_{mA}^2(\cos^2\varphi_A - \sin^2\varphi_A) - i_{mB}^2(\cos^2\varphi_B - \sin^2\varphi_B) - i_{mC}^2(\cos^2\varphi_C - \sin^2\varphi_C)) + \\
& +\sqrt{3}\frac{3}{4}u_m^2(i_{mC}^2\cos\varphi_C\sin\varphi_C - i_{mB}^2\cos\varphi_B\sin\varphi_B);
\end{aligned}$$

– сумма удвоенных зависимостей результата произведения постоянного смещения и амплитуды переменной составляющей скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\sin 2\omega t$

$$2\bar{p}_{ABC}\tilde{p}_{ABC2} + 2\bar{q}_A\tilde{q}_{A2} + 2\bar{q}_B\tilde{q}_{B2} + 2\bar{q}_C\tilde{q}_{C2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} u_m^2 \left(-2 i_{mA}^2 \cos \varphi_A \sin \varphi_A + i_{mB}^2 \cos \varphi_B \sin \varphi_B + i_{mC}^2 \cos \varphi_C \sin \varphi_C \right) + \\
&+ \sqrt{3} \frac{3}{8} u_m^2 \left(\left(i_{mC}^2 \cos^2 \varphi_C - i_{mC}^2 \sin^2 \varphi_C \right) - \left(i_{mB}^2 \cos^2 \varphi_B - i_{mB}^2 \sin^2 \varphi_B \right) \right);
\end{aligned}$$

– сумма удвоенных зависимостей результата произведения амплитуд переменных составляющих скалярной и векторной частей $\mathbf{P}_{ABC}$ при тригонометрической функции $\cos 2\omega t \cdot \sin 2\omega t$

$$2(\tilde{p}_{ABC1} \tilde{p}_{ABC2} + \tilde{q}_{A1} \tilde{q}_{A2} + \tilde{q}_{B1} \tilde{q}_{B2} + \tilde{q}_{C1} \tilde{q}_{C2}) = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В приложении Б представлены результаты анализа вещественной и мнимой частей кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ при произвольных законах изменения фазных переменных, выполненного на основании представления n -ой гармоники напряжений и токов в виде линейной комбинации прямой, обратной и нулевой последовательности фаз.

В соответствии с формулами (2.34)–(2.36), скалярная составляющая $\text{scal}\mathbf{P}_{ABC}$ включает в себя:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar+}(t)$

$$\text{scal}\mathbf{P}_{A++} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

откуда после использования тригонометрической формулы произведения косинусов с различными аргументами и переходе к среднеквадратичным значениям при соблюдении условия $n = r$ получаем

$$\text{scal}\mathbf{P}_{A++} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+}),$$

или для случая $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scal}\mathbf{P}_{A++} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar-}(t)$

$$\text{scal}\mathbf{P}_{A--} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при равенстве порядковых номеров гармоник напряжений и токов $n = r$

$$\text{scalP}_{A--} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A--} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar0}(t)$

$$\text{scalP}_{A0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

откуда применительно к равенству $n = r$ получаем

$$\text{scalP}_{A0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0})$$

и для случая $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{A+-} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при выполнении условия $n = r$

$$\text{scalP}_{A+-} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A+-} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar0}(t)$ последовательностей фаз

$$\text{scalP}_{A+0} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{A+0} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{A+0} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{A-+} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{A-+} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{A-+} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar0}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{A-0} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{A-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A-0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{A0+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{A0+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A0+} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{An0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Ar-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{A0-} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{A0-} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{A0-} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right). \end{aligned}$$

По аналогии с вышеизложенным, далее проанализируем составляющие скалярной части кватерниона мгновенной мощности по двум оставшимся фазам B и C , предварительно воспользовавшись тригонометрическими формулами (2.37) и (2.38):

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br+}(t)$

$$\text{scalP}_{B++} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

в результате чего при равенстве порядковых номеров гармонических составляющих $n = r$ получаем

$$\text{scalP}_{B++} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} + 120^\circ),$$

а при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B++} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br-}(t)$

$$\text{scalP}_{B--} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

при одинаковых порядковых номерах гармоник $n = r$

$$\text{scalP}_{B--} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B--} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br0}(t)$

$$\text{scalP}_{B0} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при одинаковых порядковых номерах гармоник $n = r$

$$\text{scalP}_{B0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{B+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B+-} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br0}(t)$ последовательностей фаз

$$\text{scalP}_{B+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B+0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{B-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{B-+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br0}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{B-0} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B-0} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{B-0} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{B0+} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B0+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B0+} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Bn0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Br-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{B0-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{B0+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{B0-} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right). \end{aligned}$$

Окончательно, третья составляющая скалярной части кватерниона мгновенной мощности по фазе C включает в себя:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr+}(t)$

$$\text{scalP}_{C++} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

в результате чего при равенстве порядковых номеров гармонических составляющих $n = r$ получаем

$$\text{scalP}_{C++} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

а при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C++} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr-}(t)$

$$\text{scalP}_{C--} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

при одинаковых порядковых номерах гармоник $n = r$

$$\text{scalP}_{C--} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C--} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr0}(t)$

$$\text{scalP}_{C0} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при одинаковых порядковых номерах гармоник с $n = r$

$$\text{scalP}_{C0} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C0} &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{C+-} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-})$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C+-} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr0}(t)$ последовательностей фаз

$$\text{scalP}_{C+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C+0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{C-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+}),$$

а в случае $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C-+} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+}) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr0}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{C-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{C-0} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr+}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{C0+} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C0+} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\text{scalP}_{C0+} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) = \\ = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) - \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{Cn0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{Cr-}(t)$ последовательностей

фаз

$$\text{scalP}_{C0-} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

при $n = r$

$$\text{scalP}_{C0-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} \text{scalP}_{C0-} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) - \\ &\quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right). \end{aligned}$$

Для определения вещественного коэффициента при первой мнимой единице $\mathbf{q}_1$ кватерниона мгновенной мощности $\mathbf{P}_{ABC}$ в функции соответствующих напряжений и токов

$$q_A = u_B i_C - u_C i_B,$$

воспользуемся аналогичными вычислительными процедурами на основе гармонического разложения фазных переменных в виде прямой, обратной и нулевой последовательности фаз (2.34)–(2.36), а именно:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$q_{A1++} = u_{B+} i_{C+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

$$q_{A2++} = -u_{C+} i_{B+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

в результате чего при использовании тригонометрической формулы (1.6) в случае равенства порядковых номеров гармоник $n = r$ получаем

$$q_{A1++} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+}),$$

$$q_{A2++} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+}),$$

или по аналогии при соблюдении неравенства $n \neq r$

$$q_{A1++} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right),$$

$$q_{A2++} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+}) \right);$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$q_{A1--} = u_{B-} i_{C-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

$$q_{A2--} = -u_{C-} i_{B-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

которое при $n = r$ находится как

$$q_{A1--} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-}),$$

$$q_{A2--} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-}),$$

а в случае $n \neq r$

$$q_{A1--} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right),$$

$$q_{A2--} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-}) \right);$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$

$$q_{A10} = u_{B0} i_{C0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{A20} = -u_{C0} i_{B0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при равенстве порядковых номеров гармоник $n = r$

$$q_{A10} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}),$$

$$q_{A20} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}),$$

а при $n \neq r$

$$\begin{aligned} q_{A10} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right), \\ q_{A20} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right); \end{aligned}$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned} q_{A1+-} &= u_{B+} i_{C-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ), \\ q_{A2+-} &= -u_{C+} i_{B-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ), \end{aligned}$$

при $n = r$

$$q_{A1+-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

$$q_{A2+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ),$$

а при отличии порядковых номеров гармоник $n \neq r$

$$q_{A1+-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{A2+-} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{A1+0} = u_{B+} i_{C0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{A2+0} = -u_{C+} i_{B0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$q_{A1+0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 120^\circ),$$

$$q_{A2+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} q_{A1+0} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right), \\ q_{A2+0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned} q_{A1-+} &= u_{B-} i_{C+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ), \\ q_{A2-+} &= -u_{C-} i_{B+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ), \end{aligned}$$

которое при соблюдении условия равенства порядковых номеров гармоник $n = r$ включает в себя следующие члены

$$q_{A1-+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

$$q_{A2-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ),$$

а в случае $n \neq r$

$$q_{A1-+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{A2-+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{A1-0} = u_{B-} i_{C0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{A2-0} = -u_{C-} i_{B0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$q_{A1-0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 120^\circ),$$

$$q_{A2-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} q_{A1-0} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right), \\ q_{A2-0} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned} q_{A10+} &= u_{B0} i_{C+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ), \\ q_{A20+} &= -u_{C0} i_{B+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ), \end{aligned}$$

при $n = r$

$$q_{A10+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 120^\circ),$$

$$q_{A20+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 120^\circ)$$

и в случае соблюдения неравенства $n \neq r$

$$\begin{aligned} q_{A10+} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right), \\ q_{A20+} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right); \end{aligned}$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$\begin{aligned} q_{A10-} &= u_{B0} i_{C-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ), \\ q_{A20-} &= -u_{C0} i_{B-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ), \end{aligned}$$

при $n = r$

$$q_{A10-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 120^\circ),$$

$$q_{A20-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$\begin{aligned} q_{A10-} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right), \\ q_{A20-} &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) = \\ &= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) - \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right). \end{aligned}$$

Далее выполним промежуточные математические преобразования применительно к вещественному коэффициенту $\text{vec} \mathbf{P}_{ABC}$ по фазе B

$$q_B = u_C i_A - u_A i_C,$$

которые включают в себя:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$q_{B1++} = u_{C+} i_{A+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

$$q_{B2++} = -u_{A+} i_{C+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

в результате чего воспользовавшись тригонометрической формулой (1.6) в случае равенства порядковых номеров гармоник $n = r$ получаем

$$q_{B1++} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} + 120^\circ),$$

$$q_{B2++} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} + 120^\circ)$$

и по аналогии при соблюдении неравенства $n \neq r$

$$q_{B1++} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2++} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$q_{B1--} = u_{C-} i_{A-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

$$q_{B2--} = -u_{A-} i_{C-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

которое при $n = r$ находится как

$$q_{B1--} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} - 120^\circ),$$

$$q_{B2--} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} - 120^\circ)$$

и для случая $n \neq r$

$$q_{B1--} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2--} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$

$$q_{B10} = u_{C0} i_{A0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{B20} = -u_{A0} i_{C0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при равенстве порядковых номеров гармоник $n = r$

$$q_{B10} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}),$$

$$q_{B20} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$q_{B10} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right),$$

$$q_{B20} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B1+-} = u_{C+} i_{A-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

$$q_{B2+-} = -u_{A+} i_{C-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

при $n = r$

$$q_{B1+-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

$$q_{B2+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ)$$

и в случае отличия порядковых номеров гармонических составляющих напряжения и тока $n \neq r$

$$q_{B1+-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2+-} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B1+0} = u_{C+} i_{A0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{B2+0} = -u_{A+} i_{C0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$q_{B1+0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} + 120^\circ),$$

$$q_{B2+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$q_{B1+0} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2+0} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B1-+} = u_{C-} i_{A+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

$$q_{B2-+} = -u_{A-} i_{C+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$q_{B1-+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

$$q_{B2-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ),$$

а при отличии порядковых номеров гармоник в случае $n \neq r$

$$q_{B1-+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2-+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B1-0} = u_{C-} i_{A0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{B2-0} = -u_{A-} i_{C0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$q_{B1-0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} - 120^\circ),$$

$$q_{B2-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$q_{B1-0} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ n \neq r}}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{B2-0} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B10+} = u_{C0} i_{A+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

$$q_{B20+} = -u_{A0} i_{C+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ),$$

при $n = r$

$$q_{B10+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+}),$$

$$q_{B20+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$q_{B10+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right),$$

$$q_{B20+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{B10-} = u_{C0} i_{A-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

$$q_{B20-} = -u_{A0} i_{C-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ),$$

при соблюдении равенства $n = r$

$$q_{B10-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-}),$$

$$q_{B20-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} - 120^\circ)$$

и в случае $n \neq r$

$$q_{B10-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right),$$

$$q_{B20-} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right).$$

Окончательно, вещественный коэффициент кватерниона мгновенной мощности при третьей мнимой единице $\mathbf{q}_3$

$$q_C = u_A i_B - u_B i_A,$$

с учетом прямой, обратной и нулевой последовательности фаз (2.34)–(2.36) находится как:

– произведение прямых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$

$$q_{C1++} = u_{A+} i_{B+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

$$q_{C2++} = -u_{B+} i_{A+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

в результате чего воспользовавшись тригонометрической формулой (1.6) в случае равенства порядковых номеров гармоник $n = r$ получаем

$$q_{C1++} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

$$q_{C2++} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in+} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in+} - 120^\circ)$$

и по аналогии при соблюдении неравенства $n \neq r$

$$q_{C1++} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{C2++} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right);$$

– произведение обратных последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$

$$q_{C1--} = u_{A-} i_{B-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

$$q_{C2--} = -u_{B-} i_{A-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

которое при $n = r$ находится как

$$q_{C1--} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

$$q_{C2--} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in-} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in-} + 120^\circ)$$

и для случая $n \neq r$

$$q_{C1--} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{C2--} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевых последовательностей фаз $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$

$$q_{C10} = u_{A0} i_{B0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{C20} = -u_{B0} i_{A0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при равенстве порядковых номеров гармоник $n = r$

$$q_{C10} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0}),$$

$$q_{C20} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in0}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in0})$$

и при $n \neq r$

$$q_{C10} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right),$$

$$q_{C20} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir0}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir0}) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C1+-} = u_{A+} i_{B-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

$$q_{C2+-} = -u_{B+} i_{A-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при $n = r$

$$q_{C1+-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

$$q_{C2+-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in-} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in-} - 120^\circ),$$

а в случае неравенства $n \neq r$

$$q_{C1+-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{C2+-} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir-} - 120^\circ) \right);$$

– произведение прямой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C1+0} = u_{A+} i_{B0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{C2+0} = -u_{B+} i_{A0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn+} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при $n = r$

$$q_{C1+0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0}),$$

$$q_{C2+0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(\phi_{un+} - \phi_{in0} - 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n+} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un+} + \phi_{in0} - 120^\circ),$$

а в случае равенства порядковых номеров гармоник $n \neq r$

$$q_{C1+0} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0}) \right),$$

$$q_{C2+0} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un+} - 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} - \phi_{ir0} - 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n+} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un+} + \phi_{ir0} - 120^\circ) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C1-+} = u_{A-} i_{B+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

$$q_{C2-+} = -u_{B-} i_{A+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$, т.е. соблюдении условия равенства порядковых номеров гармоник

$$q_{C1-+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

$$q_{C2-+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in+} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in+} + 120^\circ)$$

и в случае $n \neq r$

$$q_{C1-+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{C2-+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir+} + 120^\circ) \right);$$

– произведение обратной $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-}(t)$ и нулевой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r0}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C1-0} = u_A i_{B0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

$$q_{C2-0} = -u_B i_{A0} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn-} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr0} \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}),$$

при выполнении равенства $n = r$

$$q_{C1-0} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0}),$$

$$q_{C2-0} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(\phi_{un-} - \phi_{in0} + 120^\circ) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-} I_{n0} \cos(2\omega_n t + \phi_{un-} + \phi_{in0} + 120^\circ)$$

и при $n \neq r$

$$q_{C1-0} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0}) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0}) \right),$$

$$q_{C2-0} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos(\omega_n t + \phi_{un-} + 120^\circ) \cos(\omega_r t + \phi_{ir0}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} - \phi_{ir0} + 120^\circ) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n-} I_{r0} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un-} + \phi_{ir0} + 120^\circ) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и прямой $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r+}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C10+} = u_{A0} i_{B+} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ),$$

$$q_{C20+} = -u_{B0} i_{A+} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr+} \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}),$$

при $n = r$

$$q_{C10+} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+} + 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+} - 120^\circ),$$

$$q_{C20+} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in+}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n+} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in+})$$

и при $n \neq r$

$$q_{C10+} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+} + 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+} - 120^\circ) \right),$$

$$q_{C20+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir+}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir+}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r+} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir+}) \right);$$

– произведение нулевой $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}(t)$ и обратной $\sum_{r=1}^{\infty} i_{r-}(t)$ последовательностей фаз

$$q_{C10-} = u_{A0} i_{B-} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ),$$

$$q_{C20-} = -u_{B0} i_{A-} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn0} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} i_{mr-} \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}),$$

при $n = r$

$$q_{C10-} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-} - 120^\circ) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-} + 120^\circ),$$

$$q_{C20-} = -\sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(\phi_{un0} - \phi_{in-}) - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} I_{n-} \cos(2\omega_n t + \phi_{un0} + \phi_{in-})$$

и при соблюдении неравенства $n \neq r$

$$q_{C10-} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-} - 120^\circ) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-} + 120^\circ) \right),$$

$$q_{C20+} = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos(\omega_n t + \phi_{un0}) \cos(\omega_r t + \phi_{ir-}) \right) =$$

$$= -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n - \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} - \phi_{ir-}) \right) -$$

$$- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_{n0} I_{r-} \cos((\omega_n + \omega_r) \cdot t + \phi_{un0} + \phi_{ir-}) \right).$$



Conformation of participation

This is to certify that Mr. Oleg Nos O. B. has presented on October 31.2013 during a meeting at Danfoss (Offenbach/Main/Germany) a new, based on the Hamilton's Quaternion approach control method for active filters.

The proposed by Mr. Oleg Nos O. B. method is a new approach in design of control systems, which makes applications of active filters for harmonic mitigation in networks with non linear consumers more effective. This method is recommended for practical implementations in control systems for active power filters.

Participants of the meeting:
Dipl.-Ing. Prof. Dr. M. Fender
Dipl.-Ing. Dr. techn. S. Kalaschnikow
Dipl.-Ing. H. Dörner
Mr. Nos O. B.



Danfoss GmbH
Geschäftsbereich Motion Controls
Carl-Legien-Str. 8, Tel.: 0 69 / 69 02 - 0 Fax: 106
63073 OFFENBACH AM MAIN



Hartmut Dörner
Manager EMC and Power Quality Analyses
Danfoss GmbH
Power Electronic VLT Drives
Carl-Legien-Strasse 8, D-63073 Offenbach, Germany

.....
Geschäftsführer: Gerhard Bertelsen, Amtsgericht Offenbach,
Handelsregister HRB 41812, Steuer-Nr. 1529001644, UST-Id. DE 811179653



АКТ
об использовании в учебном процессе результатов
диссертационного исследования О.В. Носа

Настоящий акт подтверждает, что научно-методические результаты докторской диссертации О.В. Носа на тему: “Методы анализа и синтеза трехфазных систем с активными силовыми фильтрами в гиперкомплексном пространстве” используются в учебном процессе на механико-технологическом факультете при реализации основных образовательных программ по направлениям подготовки 220301.65 – – Автоматизация технологических процессов и производств (в машиностроении) и 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств (профиль: “Автоматизация технологических процессов и производств в машиностроении”):

1. при проведении лекционных занятий по дисциплинам “Электромеханические системы” и “Теория дискретных систем управления”;
2. при дипломном проектировании в рамках выполнения выпускных квалификационных работ;
3. в научно-технической работе студентов механико-технологического факультета;
3. при подготовке кадров высшей квалификации по научной специальности 05.09.03 – Электротехнические комплексы и системы.

Подготовленные О.В. Носом электронные версии соответствующих учебно-методических материалов, прошедших апробацию на кафедре проектирования технологических машин, планируется издать в 2016 г. в виде отдельного учебного пособия.

Декан механико-технологического
факультета НГТУ, канд. техн. наук

В.В. Янпольский

Заведующий кафедрой проектирования
технологических машин НГТУ, д-р техн. наук

В.В. Иванцовский

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор

ЗАО "ЭРАСИБ"

В.А. Отченаш

2015 г.



УТВЕРЖДАЮ

и.о. Проректора НГТУ

по научной работе

А.Т. Вострецов

"21"

2015 г.



АКТ

о внедрении результатов докторской диссертации О.В. Носа
на тему: "Методы анализа и синтеза трехфазных систем
с активными силовыми фильтрами в гиперкомплексном пространстве"

Настоящий акт удостоверяет, что в цифровой системе управления полупроводникового преобразовательного устройства рекуперации электрической энергии типа "ЭРАТОН-Р", предназначенного для возврата в трехфазную систему электроснабжения чисто активной мгновенной мощности в режимах торможения асинхронных двигателей группового электропривода переменного тока, реализованы следующие технические решения диссертационного исследования О.В. Носа:

1. Методика расчета параметров пропорционально-интегрального регулятора в замкнутом контуре регулирования напряжения емкостного фильтра, основанная на приведении характеристического полинома к стандартной линейной форме Бесселя.

2. Аналитическая процедура определения численного значения амплитуды выходного тока рекуператора в функции заданной величины коэффициента сдвига по первой гармонике.

Применение разработанных О.В. Носом методов позволяет обеспечить желаемое качество переходных процессов и нулевую статическую ошибку по всем регулируемым переменным в режимах предварительного заряда конденсаторной батареи, в результате чего исключаются неконтролируемые режимы работы в силовых цепях автономного инвертора "ЭРАТОН-Р".

Заместитель генерального
директора ЗАО "ЭРАСИБ"
по техническим вопросам

Л.А. Горев

Заведующий кафедрой электроники
и электротехники, д-р техн. наук

С.А. Харитонов

УТВЕРЖДАЮ

Главный инженер
ФГУП ПО "СЕВЕР"

Н.Н. Вагин

"17" 06 2015 г.



УТВЕРЖДАЮ

и.о. Проректора НГТУ
по научной работе

А.П. Востребов

"15" 06 2015 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертации О.В. Носа
на тему: "Методы анализа и синтеза трехфазных систем
с активными силовыми фильтрами в гиперкомплексном пространстве"

Мы, нижеподписавшиеся, удостоверяем, что в ходе совместных работ ФГУП ПО "СЕВЕР" с Новосибирским государственным техническим университетом в рамках выполнения мероприятия по постановлению правительства РФ №218 согласно государственному контракту №13.G36.31.0010 от 22.10.2010 г. на тему: «Исследование, разработка и организация промышленного производства мехатронных систем для энергосберегающих технологий двойного назначения», при проведении НИОКР по системам электроснабжения для летательных аппаратов типа ПЧА и ПЧ-ПСПЧ-Д1 были использованы следующие результаты диссертационной работы О.В. Носа на соискание ученой степени доктора технических наук:

1. Алгоритмы преобразования трехфазных токов и напряжений в $\alpha, \beta, 0$ переменные с использованием четырех кинематических параметров Родрига-Гамильтона.
2. Критерии оценки качества генерируемой электрической энергии на основе представления уравнения баланса мгновенных в виде вещественной и мнимой составляющих гиперкомплексного числа.

Передаваемые в ФГУП ПО "СЕВЕР" технические результаты позволили сократить временной интервал выполнения проектных работ при разработке ПЧА и ПЧ-ПСПЧ-Д1, а также снизить требования по производительности и объему памяти программно-аппаратных средств цифровой системы управления.

Заместитель главного
конструктора ФГУП ПО "СЕВЕР"

В.В. Машинский

Заведующий кафедрой электроники
и электротехники, д-р техн. наук

С.А. Харитонов