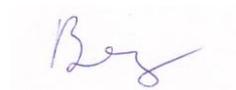


Новокузнецкий институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Кемеровский государственный университет»

На правах рукописи



Вячкин Евгений Сергеевич

**Разработка методов, алгоритмов и программного
обеспечения для математического моделирования слоистых
структур, содержащих объемно-несжимаемые слои**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., доцент Аульченко С.М.

Новокузнецк – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОБЗОР И АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ С ОБЪЕМНО-НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ.....	10
1.1 Применение слоистых структур, содержащих слабо сжимаемые слои, в технике	10
1.2 Основные методы решения некорректных задач о деформировании и течении слоистых структур с объемно-несжимаемыми слоями.....	13
1.3 Постановка цели и задач исследования. Выбор методов исследования.....	18
2 ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ И СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОБЪЕМНО-НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ.....	20
2.1 Основные уравнения и граничные условия задачи статики для конструкций, содержащих ортотропные и изотропные объемно- несжимаемые упругие слои	20
2.2 Основные уравнения и граничные условия задачи течения при пултрузионном формовании композитных труб. Регуляризация краевой задачи.....	25
2.3 Математическая аналогия в постановках задач упругого деформирования и вязкого течения	28
2.4 Предел регуляризованной задачи. Напряжения в предельной точке	30
2.5 Выводы по главе	32
3 ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР	33

3.1	Дискретизация задачи. Приведение к алгебраической задаче	33
3.2	Вычисление предела решения алгебраической задачи	35
3.3	Алгоритм решения алгебраической задачи	41
3.4	Обоснование сходимости дискретной схемы. Построение системы базисных функций	45
3.5	Выводы по главе	50
4	ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЁТУ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР	51
4.1	Реализация алгоритма в среде функционально-объектного программирования «Алгозит»	51
4.2	Расчет толстостенной трубы под действием внутреннего давления	67
4.3	Исследование сеточной сходимости задачи вязкого течения	74
4.4	Моделирование вязкого течения в фильере при пултрузии	84
4.5	Напряженно-деформированное состояние слоистого сферического шарнира из композитных материалов	87
4.6	Выводы по главе	90
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	93
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	108

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы и степень разработанности темы исследования.

Деформируемые слоистые структуры из полимерных композиционных материалов широко распространены в технике в качестве элементов силовых конструкций. Обеспечение их прочности в эксплуатации и предупреждение дефектов при изготовлении требует математического моделирования процессов упругого и вязкого деформирования, в том числе – расчёта полей напряжений на этапе проектирования новых и совершенствуемых конструкций. Во многих практически важных случаях такие структуры включают высокоэластичные слои, объемная сжимаемость которых на много порядков отличается от сжимаемости других, более жёстких слоёв. Построение математической модели слоистых структур со слоями малой сжимаемости сопряжено с рядом проблем, в частности с недостаточной точностью измерения физико-механических характеристик (например, коэффициента Пуассона). В связи с этим представляется рациональным моделирование таких слоёв на основе их представления как объемно-несжимаемой среды. Между тем, в настоящее время в практике проектирования конструкций из полимерных композиционных материалов, таких, как слоистые осесимметричные опоры, подобные модели не используются.

Особенность моделирования таких объектов заключается в том, что для сжимаемых слоев возможно использование функционала Лагранжа, который является выпуклым. Для несжимаемых слоев функционал Лагранжа неприменим. Численные схемы на основе функционала Васидзу (К.-Ю. Бате, А.Б. Ефимов, О.В. Аксененко, А.В. Цвелих) позволяют решать задачи статики с коэффициентами Пуассона, близкими к 0,5. Однако этот функционал не выпуклый, что может привести к погрешности решения в сжимаемых слоях.

Поэтому актуально построить модель неоднородной среды, содержащей слои разных свойств, как сжимаемые, так и не сжимаемые, исходя из функционала Лагранжа.

Цель работы: построение математической модели и численной схемы для определения полей напряжений и деформаций упругих и вязких осесимметричных слоистых структур, содержащих одновременно слои из объемно-несжимаемых и сжимаемых материалов, при действии статической нагрузки.

Для достижения цели в работе поставлены и решены следующие задачи:

1. Построение математической модели статического деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои.
2. Построение математической модели стационарного вязкого течения осесимметричных слоистых структур, содержащих ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью.
3. Разработка численной схемы для интегрирования уравнений равновесия и вязкого течения осесимметричных структур, содержащих объемно-несжимаемые слои.
4. Разработка методики и программного обеспечения для расчёта напряжений и деформаций упругих осесимметричных опор, содержащих слои из ортотропных композиционных материалов и слои эластомера.
5. Разработка методики и программного обеспечения для расчёта напряжений и скоростей вязкого течения формируемых элементов конструкций в процессе непрерывной пултрузии.

Методы исследования основаны на использовании:

- известных положений механики сплошных сред;
- методов исследования и решения краевых задач математической физики;
- методов регуляризации некорректных задач;
- численных методов решения краевых задач и вычислительной математики;

– методов алгоритмизации и объектно-ориентированного программирования.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов обеспечена корректным применением апробированных методов механики сплошной среды, исследования сходимости и точности численного решения; согласованием результатов расчетов с точными решениями модельных задач и известными экспериментальными данными.

Научная новизна.

1. Однопараметрическая модель деформирования слоистых осесимметричных структур, содержащих слои с нулевой и конечной объемной сжимаемостью, позволяющая определять напряжения и деформации в каждом слое пакета при статическом деформировании и стационарном вязком течении.
2. Алгоритм вычисления деформаций и напряжений в объемно-несжимаемой среде как предела решения регуляризованной задачи о деформировании сжимаемой среды.
3. Численная конечно-элементная схема решения стационарной краевой задачи, отличающаяся набором базисных функций для объемно-несжимаемых слоёв, явно включающим бездивергентные функции, что позволяет устранить зависимость ранга матрицы несжимаемости от квадратурной формулы.
4. Комплекс программ для расчёта напряжённо-деформированного состояния упругих и вязких слоистых осесимметричных конструкций из полимерных композиционных материалов с объемно несжимаемыми слоями, отличающийся использованием функционально-объектной парадигмы программирования и позволяющий производить гибкую перестройку алгоритма при изменении физических определяющих уравнений.

Защищаемые положения:

1. Однопараметрическая модель деформирования слоистых осесимметричных структур, содержащих объемно несжимаемые слои и слои без внутренних кинематических связей, при упругой деформации и вязком течении.
2. Численная конечно-элементная схема решения стационарной краевой задачи для расчёта напряжений и деформаций слоистых осесимметричных структур при упругом деформировании и вязком течении.
3. Комплекс программ для расчёта напряжённо-деформированного состояния упругих и вязких слоистых осесимметричных конструкций из полимерных композиционных материалов, содержащих объемно несжимаемые слои.
4. Результаты расчётов напряжённо-деформированного состояния слоистых осесимметричных опор при статическом нагружении осевой силой.
5. Результаты расчётов вязких напряжений и скоростей деформации формируемых элементов композиционных конструкций при непрерывной пултрузии.

Практическая ценность работы состоит:

- в возможности использования разработанных моделей, алгоритмов и программ при проектировании и совершенствовании элементов конструкций летательных аппаратов;
- в возможности использования разработанных моделей, алгоритмов и программ при совершенствовании технологических процессов пултрузионного формования цилиндрических изделий;
- в разработке модуля в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» для расчета напряженно-деформированного состояния осесимметричных конструкций, в том числе из композитных материалов, содержащих объемно-несжимаемые слои и подтверждена справкой об использовании результатов диссертации.

Работа выполнялась в соответствии с планом НИР Новокузнецкого института (филиала) федерального государственного бюджетного

образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет».

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах» (Новокузнецк, 2016); VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественнонаучному, экономическому, юридическому, социогуманитарному и педагогическому направлениям (Новокузнецк, 2016); Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2016); VII Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Новокузнецк, 2017); Всероссийской конференции с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 – в рецензируемых периодических изданиях из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы из 130 наименований и 1 приложения. Материал диссертации изложен на 112 страницах, содержит 56 рисунков и 9 таблиц.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость полученных результатов, излагается краткое содержание основных глав.

Первая глава содержит анализ основных методов и результатов исследования полей напряжений в слоистых структурах с объемно-несжимаемыми слоями. Отмечается, что при приближении коэффициента Пуассона к значению 0,5 решение задач расчета напряженно-

деформированного состояния неустойчиво, чем обосновывается необходимость диссертационного исследования.

Во второй главе построена однопараметрическая математическая модель течения и статического деформирования слоистых композитных конструкций с объемно-несжимаемыми слоями, заданы главные и естественные граничные условия. Проведена регуляризация основных уравнений.

В третьей главе проведена дискретизация основных уравнений; предложенная в главе 2 математическая модель приведена к алгебраической задаче; показано существование и единственность решения полученной задачи. Построен алгоритм решения дискретной задачи и предложен подход к построению системы базисных функций.

В четвертой главе описан модуль, разработанный в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» для расчета напряженно-деформированного состояния осесимметричных конструкций, в том числе из композитных материалов, содержащих объемно-несжимаемые слои. Исследуется точность численного решения на модельных задачах. Показано, что численное решение сходится к точному при сгущении сетки. Решена задача расчета напряженно-деформированного состояния сферического шарнира из композитных материалов.

В заключении приведены выводы и основные результаты работы.

Результаты работы используются в АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» при разработке методики расчёта напряженно-деформированного состояния многослойных упругих опор, в ООО «Компания «Армопроект» при разработке методики расчёта слоистых элементов конструкций в процессе пултрузионного формирования, в учебном процессе НФИ КемГУ, что подтверждено актами об использовании результатов диссертационной работы, приведенными в приложении.

1 ОБЗОР И АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ С ОБЪЕМНО-НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ

Слоистые структуры, образованные чередованием слоёв с различающимися жесткостями, находят применение в конструкциях высоконагруженных опор в автомобилестроении, мостостроении, двигателестроении и других областях техники. Особенность применяемых материалов состоит в существенно различных физико-механических свойствах их структурных компонентов – слоев. В связи с этим возникает необходимость исследования полей напряжений слоистых структур с объемно-несжимаемыми слоями.

1.1 Применение слоистых структур, содержащих слабо сжимаемые слои, в технике

Слоистые структуры являются частным случаем неоднородных структур, свойства которых изменяются лишь вдоль одной координаты. Они весьма просты в изготовлении, при этом достаточно функциональны, в связи с чем и получили широкое применение в различных сферах техники: звуковая и вибрационная защита [72, 83, 103, 113, 123, 127-129], волноводы [38], фильтры продольных или поперечных волн [61, 97], эффективные демпфирующие покрытия [37, 45, 80, 81, 111]. В механике деформируемого твердого тела с помощью многослойных сред моделируются поведения сосудов высокого давления [85, 90], слоистых и волокнистых композитов [28, 90, 105], неоднородных преград, препятствующих прониканию ударников [13-18]. В оптике [20, 49, 55, 98-100, 108] и радиофизике [92] с помощью слоистых покрытий управляют спектром электромагнитных волн. В теплофизике используются многослойные теплоизоляционные ограждения

[36, 82, 84, 107, 112]. В связи с этим изучение слоистых конструкций представляет не только научный, но и практический интерес.

Построению теоретической базы для расчета статики и динамики слоистых структур и решению разнообразных практических задач для объектов из таких материалов посвящен обширный спектр литературы. Изучению статики многослойных конструкций посвящены работы таких авторов, как С.А. Амбарцумян [4-6], А.Н. Андреев [7-12], В.В. Болотин [39, 40], А.Т. Василенко, Я.М. Григоренко [41], Э.И. Григолюк [50-53], Н.П. Ершов [58], В.А. Лазько [69], Л. Либреску [70, 71], Ю.В. Немировский [88, 89], А.П. Прусаков [93, 94], А.П. Филин [110] и другие. Создание и развитие теории динамики многослойных сред связано с именами таких ученых, как В.М. Александров [1-3], В.А. Бабешко [21-25], А.В. Белоконь [30-33], В.М. Бабич [26], Л. М. Бреховских, И.И. Ворович [21, 23, 33], А.О. Ватульян [43], А.Н. Гузь [26], В.Т. Гринченко [54], Е.В. Глушков [22], А.А. Ляпин [73-79], В.В. Мелешко [54], О.Д. Пряхина [24], М.Г. Селезнев [21, 25, 73, 77], В.М. Сеймов [101], Б.В. Соболев [3] и другие. Ими составлены варианты основных дифференциальных уравнений и соответствующих краевых условий, даны постановки задач, разработаны методы их решения.

Одним из видов слоистых структур, имеющих широкое применение в технических устройствах как бытового, так и промышленного назначения, являются структуры, содержащие объемно-несжимаемые слои. Например, в современном машиностроении для снижения динамических нагрузок применяют силовые резиновые элементы, которые могут иметь различную форму и конструктивные параметры, иметь различные виды нагружения. В ходовой части гусеничных машин, для соединения траков гусеничной цепи наибольшее распространение получили резинометаллические шарниры комбинированного типа с ограничителем радиальной деформации. Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния для данного вида конструкций, нагруженных радиальной силой и крутящим моментом,

подробно изложен в работе [65]. В основу предложенного алгоритма положен Δ -метод и метод конечных элементов.

Пултрузионное формование является одним из наиболее часто используемых способов создания композитных монолитных и полых профилей с различной формой поперечного сечения – круглой, квадратной, треугольной, прямоугольной и т. д. При формовании изделий в фильере происходит течение слоистой среды с объемно-несжимаемыми слоями, состоящей из чередующихся слоев связующего и армирующего материала. Основой для связующего обычно являются эпоксидные и полиэфирные смолы, к которым добавляются различные отвердители, ускорители, модификаторы, колеры, пеногасители и прочие добавки. Пултрузионное оборудование позволяет производить различные длинномерные изделия из композиционных материалов, имеющие заранее заданные свойства. Перед началом производства, исходя из типа связующего и наполнителя, необходимо выбрать температурный режим, профиль фильеры и скорость пултрузии.

Рассмотрим область применения пултрузионных изделий. Изделия, полученные методом пултрузионного формования, наилучшим образом подходят для использования в условиях больших нагрузок [56]. В строительстве пултрузионные стержни применяются в качестве арматуры для бетонных конструкций. Широкое применение нашли стеклопластиковые стержни, так как в сравнении с другими композитными материалами, они отличаются экономичностью и технологичностью. Однако в последнее время с ними начали конкурировать базальтопластиковые стержни [104], технология производства которых мало отличается от стеклопластиков.

Пултрузионные стержни широко применяются в морской добыче нефти и газа. Например, в составе глубоководных шлангов стержни из углепластика применяются, так как имеют высокую осевую прочность. Также их используют в качестве основы для швартов и фалов для центрирования плавучих платформ над буровой скважиной. В России

разрабатываются специальные насосные штанги из стеклопластика, использование которых позволяет снизить в 2-3 раза вес колонны штанг при нефтедобыче [104]. Стекло- и углепластиковые стержни диаметром от 1 до 4 мм применяются в качестве армирующих элементов волоконно-оптических кабелей. Их применение в качестве сердечника в кабелях способствует значительному уменьшению их провисания.

Пултрузионные стержни находят применение в вантовых мостах. Такие мосты поддерживают полотно с помощью кабелей, прикрепленных на заданных интервалах к мостовым фермам. При этом кабели располагаются диагонально к точкам крепления на вертикальных опорах.

Пултрузионные композитные трубы используются в качестве заготовок для получения различных изделий [66], а трубы из стекло- и углепластика диаметра до 50 мм используются для различных хозяйственных нужд.

Композитные стержни находят применение в шахтах, при строительстве сводов в качестве анкерной крепи для предотвращения обрушения породы [35].

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что изделия, полученные с помощью пултрузионного формования, имеют широкое применение. Однако при производстве пултрузионных изделий трудно осуществить контроль процессов, происходящих внутри фильеры. При этом процессы, происходящие в ней, значительно влияют на качество, так как при неправильно подобранных параметрах возможно образование зон каверн, что влечет потерю прочности готового изделия.

1.2 Основные методы решения некорректных задач о деформировании и течении слоистых структур с объемно-несжимаемыми слоями

Задачи расчета напряженно-деформированного состояния изделий из объемно-несжимаемого материала требует особого подхода. Это связано с тем, что такой материал имеет значение коэффициента Пуассона, равное 0,5,

что приводит к вырожденности определяющего соотношения и делает данную задачу некорректной по А.Н. Тихонову. Задача течения вязкой жидкости также является некорректной, так как модуль объемной вязкости стремится к бесконечности. Рассмотрим основные методы решения некорректных задач.

Задача деформации резиновых элементов, работающих на сжатие, решалась в разное время такими авторами, как Э. Э. Лавендел [68], С.И. Дымников [57], В.Л. Бидерман, Н.А. Сухова [34, 106] и др.

В работе [96] решается задача о сжатии цилиндрического резинового элемента при больших деформациях. Авторы данной статьи предлагают использовать для удельной потенциальной энергии деформации следующее выражение:

$$W = C_1 J_1 + C_2 J_2^2 + F(J_2),$$

где J_1, J_2 – первый и второй инвариант тензора конечной деформации, принятые $J_1 = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$, $J_2 = \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_r \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_\theta - \varepsilon_{rz}^2$;

C_1, C_2 – константы материала;

$F(J_2)$ – функция, принимающая различный вид для разных материалов.

В работе А.Б. Ефимова, О.В. Аксененко, А.В. Цвелиха [59] решается осесимметрическая задача теории упругости для несжимаемых материалов. Широко распространенный метод конечных элементов в форме метода перемещений [60] неприменим для прочностного анализа деталей из несжимаемых материалов. Причина заключается в том, что невозможно использовать закон Гука в виде:

$$\sigma = [D] \varepsilon$$

из-за неограниченного роста элементов матрицы D при стремлении коэффициента Пуассона к 0,5. Альтернативным подходом, предлагаемым в [59], является использование гибридного метода конечных элементов [124], позволяющего избежать указанной неприятности при значениях коэффициента Пуассона, близких (но меньших) 0,5. Авторы предлагают

версию гибридного метода конечных элементов, дающую возможность решать осесимметричную задачу теории упругости без ограничений на величину коэффициента Пуассона. Подход основан на применении четырехугольного изопараметрического элемента, в пределах которого поля напряжений и перемещений аппроксимируются независимо друг от друга. Преимуществом данного подхода является также и возможность задания узлов конечно-элементной модели непосредственно на оси симметрии, что невозможно для обычного метода конечных элементов в форме перемещений, из-за возникновения неинтегрируемой особенности при вычислении матрицы жесткости [60]. Однако остается неизвестным, до какого предела можно увеличивать коэффициент Пуассона.

В работе В.Б. Огаркова, А.А. Аксенова и С.В. Малякова «Расчет равномерно вращающегося упругого цилиндра из несжимаемого материала» [91] авторами подробно доказывается невозможность применения закона Гука для расчета напряженно-деформированного состояния несжимаемого материала и предлагается в качестве решения возникшей проблемы использование смешанного метода.

В работе [44] представлена разработанная физически и геометрически нелинейная конечно-элементная модель, в которой связь девиаторных и шаровых компонент тензоров напряжений и деформаций выражается с помощью упругого потенциала Трелоара и модифицированного уравнения Ван-дер-Ваальса. Из полученных результатов следует, что в области деформаций сжатия тонкослойных эластомерно-металлических конструкций, превышающих 15 %, использование линейных реологических моделей приводит к существенным ошибкам.

Примером течения вязкой жидкости может быть течение связующего в фильтре при пултрузионном формовании. Существенный вклад в задачи расчета процесса пултрузии внесли отечественные и зарубежные ученые: И.В. Абрамов, В.М. Виноградов, Б.А. Жовнер, В.Ф. Царев, А.В. Петров, В.П. Ставров, А.Е. Ушаков, А.А. Сафонов, В.А. Бужгулашвили, Ю.Г. Кленин, Н.

Price, T. G. Gutowski, C. D. Han, T. J. Tulig, G. L. Batch, R. Gorthala, Y. R. Chachad, D. H. Kim, J. A. Roux, A. Atarsia и др.

В работе Прайса [125] впервые была решена задача определения температуры в фильере в одномерной постановке, используя изотермическое условие с однородным распределением температуры в фильере без учета теплопроводности. Задача решалась численно методом конечных разностей. Кроме Прайса и Капшалка [126] работы по определению усилия пултрузии проводили Биббо и Гутовский [118]. Однако полученные авторами математические модели не учитывали уравнения теплопроводности и отверждения связующего.

В работе Айлвард [115] впервые был применен метод конечных элементов к решению задачи отверждения связующего для тонкой полосы из углепластика.

Двумерная постановка, по-видимому, впервые была применена в работе Хана [121]. Он разработал математическую модель, в которой учитывалось как изменение температурного поля вдоль фильеры, так и степень отверждения связующего.

В работе Батча и Макоско применялась механическая кинетическая модель для моделирования процесса пултрузии стекло-полиэфирной системы [116]. Авторы определили влияние вязкости связующего, скорости пултрузии и температуры на процесс отверждения материала внутри фильеры. Однако они не рассматривали влияние размеров и конструкции преформующей пластины на давление связующего внутри фильеры.

В работах [117] Батч и Макоско доказали, что отверждение связующего при повышенном давлении снижает образования каверн, а также улучшает качество изделий.

Волш и Чармши [130] первыми стали учитывать тонкий слой связующего между композитом и стенкой фильеры. В своей работе они использовали условие неприлипания, при котором слой связующего имел линейный профиль скорости.

В 1991 году Горфала предложил двумерную модель в цилиндрических координатах, основанную на гидродинамической теории жидкости [120]. В работе предполагалась зависимость давления как функции от скорости пултрузии, вязкости, радиуса преформирующей пластины для круглой, параболической и клиновидной формы продольного сечения входного участка фильеры. Также было показано, что клиновидная форма обеспечивает более высокое давление связующего по сравнению с остальными. При этом вязкость в модели принималась константой, не зависящей от степени отверждения и температуры внутри фильеры.

В 1996 Чачад и др. разработали трехмерную модель пултрузии, позволяющую определять температуру и степень отверждения для изделий сложной формы [119]. Модель позволяла предопределять температурные условия на фильере, что является важным при проектировании этого узла. Решение осуществлялось методом конечных разностей.

Ким с соавторами предоставили модель по определению давления связующего и усилия пултрузии посредством широкого диапазона различных условий и сравнили результаты с экспериментом [122].

Атарсия и Букхили [114] изучили влияние скорости пултрузии на размеры зон жидкой фазы и зоны гелизации внутри фильеры. Сведения о расположении таких зон полезны для оптимального управления скоростью вытяжки и температурным режимом фильеры.

Крайне мало публикаций посвящено жидкой фазе процесса пултрузии. Математическое моделирование процессов течения слоистой жидкости с чередующимися слоями с конечной и бесконечной вязкостью ранее не производилось. В большей части работ внимание уделялось вопросам теплопроводности и отверждения связующего, определения давления при удалении избыточного материала, усилия пултрузии.

1.3 Постановка цели и задач исследования. Выбор методов исследования

Для расчета деформирования слоистых конструкций с объемно-несжимаемыми слоями и течения вязкой слоистой жидкости с конечным и бесконечным модулем объемного сжатия используются математические модели, основанные на гипотезах теории многослойных оболочек.

Одной из особенностей рассматриваемого класса конструкций и жидких сред является наличие несжимаемых слоев. Получение численного решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния осложняется несколькими факторами, вытекающими, с одной стороны, из больших нагрузок и деформаций, а с другой – из высокой сдвиговой податливости и слабой объемной сжимаемости слоев из несжимаемого материала.

Непосредственным следствием различия податливостей жестких и несжимаемых слоев является чрезвычайно плохая обусловленность системы разрешающих уравнений. Различие на 6 порядков означает соответствующую величину числа обусловленности.

Далее, моделирование деформации слоистой структуры с объемно-несжимаемыми слоями в рамках теории упругости невозможно без допущения о малой, но конечной объемной податливости, в связи с чем необходимо задавать высокий коэффициент Пуассона материала. Между тем, при приближении этого значения к «точному» (для несжимаемой изотропной среды) значению, равному 0,5, обусловленность разрешающей системы уравнений дополнительно ухудшается, поскольку задача теории упругости в пределе становится некорректной по Тихонову.

Таким образом, для получения достоверных результатов расчета необходимо устранить влияние отмеченных факторов.

В данной работе предлагается математическая модель, которая может быть построена на основе метода конечных элементов. Однако для снижения

числа степеней свободы целесообразно использовать сплайн-аппроксимацию по продольному сечению осесимметричной конструкции.

Объемную несжимаемость предлагается учитывать методом регуляризации с выбором коэффициента Пуассона в качестве регуляризирующего параметра. Решение системы линейных алгебраических уравнений сводится к минимизации функционала Тихонова, который отличается от исходного функционала. Поэтому должна быть решена задача перехода от минимума функционала Тихонова к минимуму исходного функционала.

Поскольку программная реализация алгоритмов решения перечисленных задач в среде существующих универсальных программных комплексов вызывает затруднения, для этой цели используется специализированная среда функционально-объектного программирования «Алгозит», имеющая достаточно развитые средства автоматизации программирования задач вычислительной механики.

2 ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ И СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОБЪЕМНО- НЕСЖИМАЕМЫМИ СЛОЯМИ

2.1 Основные уравнения и граничные условия задачи статики для конструкций, содержащих ортотропные и изотропные объемно- несжимаемые упругие слои

Рассмотрим осесимметричную конструкцию, содержащую ортотропные и изотропные объемно-несжимаемые упругие слои. Для построения модели деформирования конструкции был выбран вариационный принцип Лагранжа, позволяющий получить разрешающие уравнения на основе минимизации потенциальной энергии, которая может быть выражена через перемещения и упругие константы материала любой схемы армирования.

Материал конструкции считаем упругим, а деформации достаточно малыми, чтобы можно было принять определяющее уравнение в виде линейного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений;

ε_{kl} – линейный тензор деформаций;

d_{ijkl} – компоненты тензора упругости.

Тогда упругое деформирование подчиняется вариационному принципу Лагранжа [95]:

$$\delta \left[\int_V w dV - \int_V F_i u_i dV - \int_S f_i u_i dS \right] = 0, \quad (2.2)$$

где w – плотность энергии деформации;

u_i – векторное поле перемещений;

F_i – объемные силы;

f_i – поверхностные силы;

V – объем;

S – поверхность тела.

Плотность энергии деформации выражается через деформации и напряжения следующим образом:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + const ; \quad (2.3)$$

константа в этом соотношении несущественна, поскольку ее вариация равна нулю.

С учетом линейности тензора деформаций функционал (2.2) оказывается квадратичным, и условие его стационарности равносильно условию минимума:

$$\min \Pi = \min(W - A), \quad (2.4)$$

где $W = \int_V w dV$ – полная энергия деформации;

$A = \int_V F_i u_i dV + \int_S f_i u_i dS$ – работа внешних сил.

Наряду с исходной (общей) системой координат (X, Y, Z) , введем цилиндрическую систему координат (X, r, Φ) .

Учитывая, что физический закон (2.1) имеет наиболее простой вид в осях анизотропии, а граничные условия удобнее задавать в системе координат, связанной с конструкцией (X, Y, Z) , необходимо переходить в соотношениях (2.1-2.3) от ортогональной системы к другой. Коэффициенты закона упругости получаются с учетом армирования. Учет угла армирования производится преобразованием поворота [118].

Это позволяет выразить функционал Лагранжа (2.4) через напряжения и деформации, записанные в базисе (X, Y, Z) . Далее требуется перейти к его явному выражению через перемещения.

Малые деформации в каждой точке (X, r, Φ) выражаются через перемещения этой точки следующим образом [95]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X(X, r, \Phi) &= \frac{\partial u_X(X, r, \Phi)}{\partial X}, \quad \varepsilon_\Phi(X, r, \Phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial \Phi} + \frac{u_\rho(X, r, \Phi)}{r}, \\
\varepsilon_r(X, r, \Phi) &= \frac{\partial u_r(X, r, \Phi)}{\partial r}, \quad \gamma_{rX} = \frac{\partial u_r(X, r, \Phi)}{\partial X} + \frac{\partial u_X(X, r, \Phi)}{\partial r}, \\
\gamma_{r\Phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r(X, r, \Phi)}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial r} - \frac{u_\Phi(X, r, \Phi)}{r}, \\
\gamma_{\Phi X} &= \frac{\partial u_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial X} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_X(X, r, \Phi)}{\partial \Phi}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим слоистый осесимметричный, полый внутри объект (рисунок 2.1). На внешней и внутренней границах могут быть поставлены главные граничные условия запрета перемещений по одному или нескольким направлениям. В любом не закрепленном направлении может быть задана распределенная нагрузка q .



Рисунок 2.1 – Схема объекта расчета

Так как рассматривается осесимметричная задача, перемещение по третьей (окружной) координате равно нулю. В таком случае главные граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
u \cdot X \Big|_{\Gamma_{1X}} &= u_X^*, \\
u \cdot r \Big|_{\Gamma_{1r}} &= u_r^*,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$u \cdot \Phi|_{\Gamma_{1\phi}} = 0.$$

Естественные же граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} q|_{\Gamma_{2x}} &= q_x^*, \Gamma_{2x} \cup \Gamma_{1x} \equiv \Gamma, \\ q|_{\Gamma_{2r}} &= q_r^*, \Gamma_{2r} \cup \Gamma_{1r} \equiv \Gamma, \\ q|_{\Gamma_{2\phi}} &= q_\phi^*, \Gamma_{2\phi} \cup \Gamma_{1\phi} \equiv \Gamma, \end{aligned} \quad (2.7)$$

При деформировании сплошной среды, содержащей внутренние кинематические связи, отдельные компоненты деформаций остаются нулевыми. Для решения задачи используется регуляризация по Тихонову [109], в которой жесткие кинематические связи снимаются, а определяющие уравнения среды записываются так, чтобы малые деформации, несовместимые со связями, вызывали большие (но конечные) напряжения. Предельный переход обеспечит получение решения исходной задачи. В качестве параметра регуляризации выберем величину, обратную к модулю объемного сжатия; при устремлении к нулю этого параметра получаем среду с бесконечным объемным модулем упругости, т.е. объемно-несжимаемую.

Итак, несжимаемый материал с внутренней связью, наложенной на объемную деформацию, будем рассматривать как предельный случай изотропного материала с бесконечно большим модулем объемного сжатия и конечным модулем сдвига.

Примем для регуляризованной модели упругой среды обобщенный закон Гука в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.8)$$

где σ_{ij} - компонента тензора напряжений,

ε_{ij} - компонента тензора деформаций,

Θ - объемная деформация,

λ, μ - постоянные Ламе,

δ_{ij} - симметричный символ Кронекера.

Объемная деформация, входящая в равенство (2.8), выражается через компоненты тензора деформаций следующим образом:

$$\Theta = \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.9)$$

Постоянные Ламе выражаются через «технические» упругие постоянные – модуль Юнга E , сдвиговой модуль упругости (второго рода) G и коэффициент Пуассона ν – следующими равенствами:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G. \quad (2.10)$$

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} , в зависимости от того, являются они диагональными или внедиагональными, будем обозначать через $\varepsilon_i = \varepsilon_{ii}$ (диагональные компоненты, которые являются линейными деформациями) либо $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ (угловые деформации). Следуя общепринятому описанию, линейную зависимость между деформациями и напряжениями запишем в матричном виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = D(\lambda, \mu) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

где $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ - матрицы-столбцы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_r \quad \sigma_\varphi \quad \tau_{xr} \quad \tau_{r\varphi} \quad \tau_{x\varphi}]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_r \quad \varepsilon_\varphi \quad \gamma_{xr} \quad \gamma_{r\varphi} \quad \gamma_{x\varphi}]^T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Матрица упругости D , с учетом равенства (2.8), принимает вид:

$$D(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Нулевое значение постоянной μ соответствует материалу с нулевой сдвиговой жесткостью, а значение $\lambda = 0$ – материалу с нулевым коэффициентом Пуассона. В первом случае матрица упругости (2.13) вырождена. Во втором случае она обратима и положительно определена. При изменении коэффициента Пуассона ν от нуля до 0,5, как видно из (2.10), постоянная λ увеличивается от нуля до бесконечности, причем при любом

конечном неотрицательном λ матрица упругости (2.13) остается положительно определенной. Этот факт понадобится в дальнейшем для вывода разрешающих уравнений.

Далее, будем считать сдвиговой модуль μ постоянным, а постоянную λ - варьируемой от начального значения λ_0 до бесконечности. Введем малый параметр α , стремящийся к нулю при бесконечно большом λ . Тогда из (2.13) имеем:

$$D(\lambda, \mu) = D(\lambda_0, \mu) + \frac{1}{\alpha} H, \quad (2.14)$$

где обозначено:

$$H = D(\lambda_0, 0), \quad \frac{1}{\alpha} = \lambda - \lambda_0, \quad (2.15)$$

λ_0 - выбранное фиксированное значение постоянной Ламе.

С учетом регуляризации закона Гука функционал Лагранжа преобразуется к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \left(D_0 + \frac{1}{\alpha} H \right)^T \varepsilon dV - \int_{S_2} (\bar{q} \cdot \bar{u}) ds. \quad (2.16)$$

Правомерность (2.16) будет показана в параграфе 2.4.

2.2 Основные уравнения и граничные условия задачи течения при пултрузионном формовании композитных труб. Регуляризация краевой задачи

Для решения задачи течения при пултрузионном формовании композитных труб рассмотрим течение слоистой среды, содержащей объемно-несжимаемые вязкие слои, которое происходит в зазоре между двумя соосными поверхностями вращения (рисунок 2.2).

В качестве определяющего соотношения для жидкости возьмем [86]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \xi\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk} + 2\mu^* \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (2.17)$$

где p – гидростатическое давление $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$;

$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk}$ – скорость объёмной деформации

ξ – коэффициент объёмной вязкости;

μ^* – коэффициент сдвиговой вязкости;

$\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скоростей деформации.

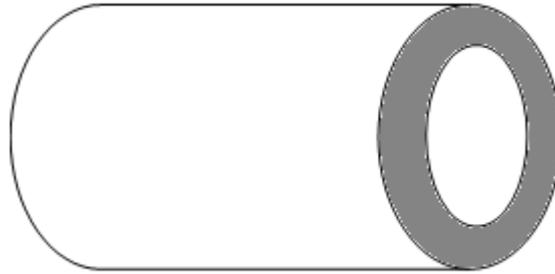


Рисунок 2.2 – Расчетная область

При этом тензор скоростей определяется соотношением:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (2.18)$$

где v – скорость.

При рассмотрении течения жидкости со слабой объёмной сжимаемостью на основе двухпараметрической модели необходимо задавать в качестве исходных данных коэффициенты сдвиговой и объёмной вязкости. Между тем, коэффициент объёмной вязкости для слабосжимаемой жидкости стремится к бесконечности, и он не измеряется с достаточной точностью [47].

Вместо того, чтобы считать давление реакцией внутренней кинематической связи, отождествим его с шаровой частью деформационного выражения [62]. Тогда (2.17) можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = \xi \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu^* \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.19)$$

Тогда в силу (2.19) соотношение между скоростями деформаций и напряжениями будет представлено следующим образом:

$$\begin{cases} (\xi + 2\mu)\dot{\epsilon}_{xx} + \xi\dot{\epsilon}_{yy} + \xi\dot{\epsilon}_{zz} = \sigma_{xx}, \\ \xi\dot{\epsilon}_{xx} + (\xi + 2\mu)\dot{\epsilon}_{yy} + \xi\dot{\epsilon}_{zz} = \sigma_{yy}, \\ \xi\dot{\epsilon}_{xx} + \xi\dot{\epsilon}_{yy} + (\xi + 2\mu)\dot{\epsilon}_{zz} = \sigma_{zz}, \\ \tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Рассмотрим ограниченную осесимметричную область, в которой движется сплошная среда. На боковых границах могут быть поставлены кинематические граничные условия прилипания:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v} = 0, \quad (2.21)$$

где n – нормаль к границе.

На оставшихся границах – слева и справа – необходимо задать граничные условия, как в скоростях, так и в напряжениях. Как показано в работе [19] в общем случае на части границы могут быть заданы значения отдельных компонент вектора скорости. Такие условия будем рассматривать как главные граничные условия. Объединяя те части границы, на которых заданы одноименные компоненты скорости, запишем главные граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} v \cdot x \Big|_{\Gamma_{1x}} &= v_x^*, \\ v \cdot y \Big|_{\Gamma_{1y}} &= v_y^*, \\ v \cdot z \Big|_{\Gamma_{1z}} &= v_z^*. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Аналогично, объединяя те участки границы, где не заданы одноименные компоненты скорости, получим естественные граничные условия:

$$\begin{aligned} q \Big|_{\Gamma_{2x}} &= q_x^*, \Gamma_{2x} \cup \Gamma_{1x} \equiv \Gamma, \\ q \Big|_{\Gamma_{2y}} &= q_y^*, \Gamma_{2y} \cup \Gamma_{1y} \equiv \Gamma, \\ q \Big|_{\Gamma_{2z}} &= q_z^*, \Gamma_{2z} \cup \Gamma_{1z} \equiv \Gamma. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для регуляризации модели вязкой несжимаемой жидкости запишем (2.19) в матричном виде:

$$\sigma = F(\xi, \mu^*) \dot{\epsilon}, \quad (2.24)$$

где σ , $\dot{\epsilon}$ - матрицы-столбцы:

$$\begin{aligned}\sigma &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T, \\ \dot{\epsilon} &= [\dot{\epsilon}_x \quad \dot{\epsilon}_y \quad \dot{\epsilon}_z \quad \dot{\epsilon}_{xy} \quad \dot{\epsilon}_{yz} \quad \dot{\epsilon}_{xz}]^T.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Тогда матрица F , с учетом равенства (2.19), имеет вид:

$$F(\xi, \mu^*) = \begin{bmatrix} \xi + 2\mu^* & \xi & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi + 2\mu^* & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi + 2\mu^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* \end{bmatrix}.\quad (2.26)$$

При стремлении ξ к бесконечности будем считать сдвиговой модуль μ^* постоянным, а постоянную ξ - варьируемой от начального значения ξ_0 до бесконечности. Введем малый параметр β , стремящийся к нулю при бесконечно большом ξ . Тогда из (2.26) имеем:

$$F(\xi, \mu^*) = F(\xi_0, \mu^*) + \frac{1}{\beta} J, \quad (2.27)$$

где обозначено:

$$J = F(\xi_0, 0), \quad \frac{1}{\beta} = \xi - \xi_0. \quad (2.28)$$

Согласно регуляризованному физическому закону (2.19) функционал Лагранжа преобразуется к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \dot{\epsilon}^T \left(F(\xi_0, \mu^*) + \frac{1}{\beta} J \right) \dot{\epsilon} dV - \int_{s_2} (\bar{q} \cdot \bar{v}) ds. \quad (2.29)$$

Минимизация функционала (2.29) позволяет перейти к системе алгебраических уравнений, решение которой приводится ниже.

2.3 Математическая аналогия в постановках задач упругого деформирования и вязкого течения

Сравним математические модели расчета статики для конструкций, содержащих объемно-несжимаемые слои и течения при пултрузионном формовании композитных труб. Сравнение начнем с рассмотрения

физических законов для упругой деформации (2.8) и вязкого течения жидкости (2.17). В законе Гука (2.8) зависимость напряжений от деформаций представлена в виде суммы. Коэффициентами слагаемых являются постоянные Ламе, которые отвечают за объемную и сдвиговую деформации. Закон (2.17) имеет аналогичный вид, но напряжения зависят от скоростей деформаций и в качестве коэффициентов принимаются объемная и динамическая вязкости. Таким образом, поиск напряжений и в том и в другом случаях осуществляется путем умножения матрицы коэффициентов на вектор, связанный с деформацией, что позволяет говорить об аналогичности данных законов с математической точки зрения.

В уравнениях связи также наблюдается аналогия. В задаче течения скорости деформаций выражаются через частные производные скоростей, а в задаче статики – деформации через производные перемещений. Если систему (2.20) преобразовать в полярную систему координат (X, r, Φ) , то она будет аналогична системе (2.5):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_X(X, r, \Phi) &= \frac{\partial v_X(X, r, \Phi)}{\partial X}, \quad \dot{\varepsilon}_\Phi(X, r, \Phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial \Phi} + \frac{v_\rho(X, r, \Phi)}{r}, \\ \dot{\varepsilon}_r(X, r, \Phi) &= \frac{\partial v_r(X, r, \Phi)}{\partial r}, \quad \dot{\gamma}_{rX} = \frac{\partial v_r(X, r, \Phi)}{\partial X} + \frac{\partial v_X(X, r, \Phi)}{\partial r}, \\ \dot{\gamma}_{r\Phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r(X, r, \Phi)}{\partial \Phi} + \frac{\partial v_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial r} - \frac{v_\Phi(X, r, \Phi)}{r}, \\ \dot{\gamma}_{\Phi X} &= \frac{\partial v_\Phi(X, r, \Phi)}{\partial X} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_X(X, r, \Phi)}{\partial \Phi}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из всего вышесказанного следует, что задачи течения при пултрузионном формовании композитных труб и расчета напряженно-деформированного состояния слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои, в осесимметричной постановке аналогичны с математической точки зрения при замене деформаций на скорости деформаций, перемещений на скорости в соответствующих местах математической модели и в главных граничных условиях. Следовательно,

такие задачи могут быть решены с использованием одного математического аппарата.

2.4 Предел регуляризованной задачи. Напряжения в предельной точке

Рассмотрим переход от регулярного определяющего уравнения (2.11) к предельному случаю. Поскольку при вариации малого параметра остаются фиксированными λ_0 и μ , уравнение (2.11) при переменном α принимает вид:

$$\sigma(\alpha) = \left(D_0 + \frac{1}{\alpha} H \right) \epsilon(\alpha). \quad (2.31)$$

Примем, что деформации $\epsilon(\alpha)$ являются непрерывно дифференцируемой функцией малого параметра в окрестности точки $\alpha=0$, и их можно представить в виде разложения в степенной ряд (в дальнейшем это будет доказано). С точностью до малых второго порядка, имеем:

$$\epsilon(\alpha) = \epsilon(0) + \alpha \epsilon'(0). \quad (2.32)$$

Штрихом обозначена производная по параметру α .

Подставив правую часть (2.32) в уравнение (2.31), получим разложение в ряд для напряжений:

$$\sigma(\alpha) = \left(D_0 + \frac{1}{\alpha} H \right) (\epsilon(0) + \alpha \epsilon'(0)) = D_0 \epsilon(0) + H \epsilon'(0) + \alpha D_0 \epsilon'(0) + \frac{1}{\alpha} H \epsilon(0). \quad (2.33)$$

В предельной точке $\alpha=0$ третье слагаемое полученного выражения обращается в нуль.

Остановимся подробнее на четвертом слагаемом, содержащем множитель $\frac{1}{\alpha}$. Матрица H определяется выражением (2.15); это – матрица упругости вырожденного материала, имеющего нулевой модуль сдвига. Из (2.13) при $\mu = 0$ получим:

$$H = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Матрица (2.34) имеет единственное ненулевое собственное число, которому соответствует собственный вектор с координатами (1, 1, 1, 0, 0, 0). Остальные собственные векторы обладают тем свойством, что сумма трех первых компонент собственного вектора равна нулю. Это означает, что произведение матрицы H на любой вектор-столбец, у которого сумма первых трех компонент равна нулю, есть нулевой вектор-столбец (верно и обратное). Применительно к вектору-столбцу деформаций вида (2.12) это означает, что произведение матрицы H на столбец деформаций равно нулю тогда (и только тогда), когда объемная деформация равна нулю. Таким образом, множество всех векторов деформаций, для которых объемная деформация равна нулю, образует ядро матрицы H . Следовательно, четвертое слагаемое в правой части (2.33) тождественно равно нулю, если $\boldsymbol{\varepsilon}(0)$ - деформация, при которой не изменяется объем. Но предельный случай $\alpha=0$ и есть объемно-несжимаемый материал. Таким образом, если будет вычислено предельное значение деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(0)$ и предел его производной по параметру $\boldsymbol{\varepsilon}'(0)$, то предельное значение напряжений может быть вычислено следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = D_0 \boldsymbol{\varepsilon}(0) + H \boldsymbol{\varepsilon}'(0). \quad (2.35)$$

С учетом отмеченного выше свойства, можно ослабить требования к вычислению производной от деформаций по параметру. В самом деле, произведение матрицы H на вектор-столбец не изменится, если к этому вектору добавить произвольный вектор из ядра матрицы H . Тогда предел напряжений в точке $\alpha=0$ равен

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = D_0 \boldsymbol{\varepsilon}(0) + H [\boldsymbol{\varepsilon}'(0) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}], \quad (2.36)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - любой вектор-столбец деформации без изменения объема.

В заключение отметим, что матрица упругости (2.14) при любых положительных постоянных Ламе и положительном параметре α остается симметричной и положительно определенной, при этом матрица H симметрична и полуположительно определена. Обе матрицы инвариантны относительно преобразования поворота координатных осей.

2.5 Выводы по главе

1. Предложена математическая модель статического деформирования слоистых композитных конструкций с объемно-несжимаемыми слоями, включающая малый параметр для регуляризации задачи, изначально некорректной по Тихонову.

2. Предложена математическая модель течения вязкой несжимаемой слоистой среды с объемно-несжимаемыми слоями, включающая малый параметр для регуляризации некорректной задачи.

3. Проведена математическая аналогия постановок задач статического деформирования композитных структур и течения вязкой слоистой среды с несжимаемыми слоями.

3 ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

3.1 Дискретизация задачи. Приведение к алгебраической задаче

Регуляризованная краевая задача статики решается по обычному алгоритму метода конечных элементов в форме метода перемещений [60]. В качестве неизвестных возьмем значения линейных перемещений u – осевые, v – радиальные, w – окружные. В силу отмеченной выше аналогии между задачами упругого деформирования и вязкого течения имеет смысл рассмотрение одной из этих задач (вторая решается точно так же). Поэтому в данной главе будет рассмотрена только дискретизация задачи об упругом деформировании.

Для построения конечно-элементной сетки сечение разбивается на конечные элементы четырёхугольной формы. Число узлов будет определяться порядком аппроксимации полей перемещений; примем, что это число задано, и построим интерполяционные формулы в виде:

$$u = \sum_i N_i u_i = N\{u\}. \quad (3.1)$$

Базисные функции N_i будут конкретизированы позднее, в п. 3.4. Пока будем считать их известными.

Равновесие оболочки достигается при минимуме потенциальной энергии, для отыскания которого необходимо выразить деформации и перемещения через узловые переменные и найти их из условия равенства нулю частных производных от потенциальной энергии по искомым узловым переменным.

Для задания зависимости перемещений от радиальной и осевой координат используем нормализованные координаты (ξ, η) . Начало нормализованной системы (ξ, η) помещено в центр тяжести элемента, а стороны четырехугольного элемента совпадают с координатными линиями $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$.

С учетом формул перехода, выражаем перемещения на элементе через узловые переменные с помощью базисных функций:

$$u(X, r) = \sum_i N_i(\xi, \eta) \cdot u_i, \quad v(X, r) = \sum_i N_i(\xi, \eta) \cdot v_i, \quad w(X, r) = \sum_i N_i(\xi, \eta) \cdot w_i. \quad (3.2)$$

Таким образом, вектор узловых переменных содержит 3 неизвестные:

$$\bar{\delta}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T, \quad (3.3)$$

Перемещения элемента выражаются через вектор неизвестных $\bar{\delta}_i$ с помощью матрицы функций формы N :

$$\begin{bmatrix} u_X(X, r, \Phi) \\ u_r(X, r, \Phi) \\ u_\Phi(X, r, \Phi) \end{bmatrix} = N \bar{\delta}_i, \quad (3.4)$$

Тогда вектор деформаций на элементе выражается через узловые переменные $\bar{\delta}_i$ следующим образом:

$$\varepsilon = B \bar{\delta}_i, \quad (3.5)$$

где B – матрица связи деформаций с узловыми перемещениями элемента, не зависящая от окружной координаты Φ .

С учетом вышеизложенного, первое слагаемое из выражения для потенциальной энергии малого элемента можно записать, используя узловые переменные, следующим образом:

$$\int_V \varepsilon^T D \varepsilon dV = \bar{\delta}_i^T \cdot \left(\int_V B^T D B \right) \cdot \bar{\delta}_i. \quad (3.6)$$

После решения системы уравнений в перемещениях вычисляются деформации по формулам (2.5), а затем напряжения на поверхностях раздела слоев (как в осях оболочки, так и в главных осях анизотропии) как произведение матрицы упругости на вектор деформаций.

Применение метода Рунца к минимизации функционала (2.16) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром:

$$\left[K + \frac{1}{\alpha} C \right] X(\alpha) = R, \quad (3.7)$$

где K – положительно определенная матрица высокого порядка N ,

C – полуположительно определенная матрица того же порядка,
 X – вектор-столбец неизвестных,
 K – заданный вектор-столбец нагрузок,
 α – малый параметр.

3.2 Вычисление предела решения алгебраической задачи

Требуется определить: предел решения $X(\alpha)$ при стремлении α к нулю;
 предел производной $X(\alpha)$ по параметру α при стремлении α к нулю.
 Выясним, прежде всего, корректность поставленной задачи.

Поскольку обе матрицы симметричны, а одна из них положительно определена, то они могут быть одновременно приведены к диагональному виду путем перехода к базису из обобщенных собственных векторов f_i - решений задачи:

$$(K - \lambda C)f = 0, \quad (3.8)$$

где λ - обобщенное собственное число.

Как известно, этот базис не ортогонален, но выполняются свойства K -ортогональности и C -ортогональности:

$$f_i^T K f_j = \delta_{ij} \kappa_{jj}, \quad f_i^T C f_j = \delta_{ij} \chi_{jj}, \quad (3.9)$$

где δ_{ij} - симметричный символ Кронекера.

Особо отметим, что все элементы диагональной матрицы κ_{jj} положительны, а среди элементов матрицы χ_{jj} имеются положительные и нулевые. Линейная оболочка векторов, для которых χ_{jj} равно нулю, является ядром матрицы C ; будем обозначать это подпространство как G , а линейную оболочку остальных собственных векторов – H .

Представим решение системы с параметром (3.7) в виде линейной комбинации собственных векторов:

$$X(\alpha) = x_i(\alpha) f_i. \quad (3.10)$$

Подстановка (3.10) в уравнение (3.7) дает:

$$\left[K + \frac{1}{\alpha} C \right] x_i(\alpha) f_i = R. \quad (3.11)$$

Умножим обе части (3.11) слева на транспонированный вектор f_j :

$$f_j^T \left[K + \frac{1}{\alpha} C \right] x_i(\alpha) f_i = f_j^T R. \quad (3.12)$$

Учитывая (3.9), получим:

$$\left[\kappa_{ii} + \frac{1}{\alpha} \chi_{ii} \right] x_i(\alpha) = \rho_i, \quad (3.13)$$

где $f_j^T R = \rho_i$.

Таким образом, система уравнений расщепилась на N уравнений, каждое из которых содержит одно неизвестное $x_i(\alpha)$. Решив это уравнение, получим:

$$x_i(\alpha) = \frac{\rho_i}{\kappa_{ii} + \frac{1}{\alpha} \chi_{ii}}. \quad (3.14)$$

Те из неизвестных $x_i(\alpha)$, для которых χ_{jj} равно нулю, не зависят от параметра α . Эти неизвестные являются коэффициентами при собственных векторах из ядра матрицы C в разложении (3.9). Для них получаем:

$$x_m(\alpha) = \frac{\rho_m}{\kappa_{mm}}, \quad (3.15)$$

(индексом m помечены собственные векторы из ядра матрицы C). Отсюда следует важный для дальнейшего вывод – решения системы (3.7) при различных значениях параметра отличаются на вектор, принадлежащий подпространству H .

Перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$. Для коэффициентов при векторах из H равенство (3.14) при конечных положительных χ_{jj} дает:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_i(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\rho_i}{\kappa_{ii} + \frac{1}{\alpha} \chi_{ii}} = 0. \quad (3.16)$$

Предел коэффициентов при векторах из G найдем из (3.15):

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_m(\alpha) = \frac{\rho_m}{\kappa_{mm}}. \quad (3.17)$$

Тогда предел вектора решения системы (3.7) с учетом разложения (3.9) является линейной комбинацией собственных векторов из ядра матрицы C .

Введем следующие обозначения: пусть g_m - собственный вектор из ядра G , h_k - собственный вектор из подпространства H . Предельным переходом в равенстве (3.10) с учетом (3.16) и (3.17) получим:

$$X^* = \lim_{\alpha \rightarrow 0} X(\alpha) = \frac{\rho_m}{\kappa_{mm}} g_m, \quad (3.18)$$

(суммирование по индексу m выполняется в соответствии с размерностью ядра G).

Далее, найдем производную вектора $X(\alpha)$ по параметру и её предел при стремлении параметра к нулю. Из равенства (3.17) видно, что производные коэффициентов при векторах из ядра равны нулю, следовательно, вектор производной находится в H . Коэффициенты разложения по векторам h_k найдем дифференцированием равенства (3.14):

$$\frac{d}{d\alpha} x_i(\alpha) = \frac{\rho_i \cdot \chi_{ii}}{\alpha^2 \left(\kappa_{ii} + \frac{1}{\alpha} \chi_{ii} \right)^2}. \quad (3.19)$$

В пределе получим:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} x_i(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\rho_i \cdot \chi_{ii}}{(\alpha \kappa_{ii} + \chi_{ii})^2} = \frac{\rho_i}{\chi_{ii}}. \quad (3.20)$$

Тогда предел вектора производной равен

$$Z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} X(\alpha) = \frac{\rho_k}{\chi_{kk}} h_k. \quad (3.21)$$

Поскольку вектор X^* принадлежит ядру G , а вектор Z – подпространству H , эти векторы являются K - и C -ортогональными. Эти векторы определяются равенствами (3.19) и (3.21), т.е. пределы существуют, конечны и единственны.

Таким образом, задача отыскания предела решения системы (3.7) и предела его производной по параметру является однозначно разрешимой.

Формулы (3.19) и (3.21), однако, не дают возможности практического вычисления пределов, поскольку требуют знания всех собственных векторов пары матриц высокого порядка, что на практике невозможно. Поставим задачу вычисления искомых векторов, опираясь на их свойства, установленные в ходе предыдущего рассмотрения.

Рассмотрим решение системы (3.7) в окрестности предельной точки $\alpha=0$. Решение $X(\alpha)$ имеет в этой точке конечный предел и непрерывную первую производную; нетрудно показать также, что и производные высших порядков непрерывны. Поэтому ряд Тейлора для $X(\alpha)$ в окрестности точки $\alpha=0$ является сходящимся, и с точностью до малых высших порядков имеем:

$$X(\alpha) = X^* + \alpha Z + O(\alpha^2), \quad (3.22)$$

где $O(\alpha^2)$ - малая второго порядка относительно параметра α .

Подставим (3.22) в матричное уравнение (3.7):

$$\left[K + \frac{1}{\alpha} C \right] (X^* + \alpha Z + o(\alpha)) = R. \quad (3.23)$$

Раскрыв скобки, имеем:

$$KX^* + \alpha KZ + \frac{1}{\alpha} CX^* + CZ + o(\alpha) = R. \quad (3.24)$$

Вектор X^* принадлежит ядру матрицы C , поэтому произведение CX^* равно нулю. Второе и пятое слагаемые в левой части (3.24) – бесконечно малые величины. Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, из (3.24) получим:

$$KX^* + CZ = R. \quad (3.25)$$

Сформулируем вспомогательную алгебраическую задачу следующим образом: найти вектор $X^* \in G$ и вектор $Z \in H$, отвечающие уравнению (3.25), и выясним связь этой задачи с исходной задачей вычисления векторов (3.19) и (3.21). Для этого условие принадлежности ядру $X^* \in G$ запишем в виде равенства: $CX^* = 0$, или в силу симметрии матрицы C – в виде $C^T X^* = 0$, и добавим это равенство к системе (3.25). Получим матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Матрица этой системы вырождена и не имеет знаковой определенности. Кроме того, в записи (3.26) не учтена принадлежность вектора Z подпространству H , что расширяет множество решений системы (3.26). Получим общее решение этой системы. Для этого воспользуемся приведением пары матриц к собственному базису. Введем в рассмотрение матрицу, составленную из собственных векторов, так, что первые столбцы занимают координаты векторов из H , а последующие – собственных векторов из ядра G :

$$F = [h_1 \ h_2 \ \dots \ g_1 \ g_2 \ \dots]. \quad (3.27)$$

Тогда разложение векторов X^* и Z по собственным векторам можно записать в виде матричных равенств:

$$X^* = Fx, \quad Z = Fz, \quad (3.28)$$

где $x = (x_1 \ x_2 \ \dots)^T$ - коэффициенты разложения вида (3.10) для вектора X^* ,
 $z = (z_1 \ z_2 \ \dots)^T$ - то же, для вектора Z .

Подставим (3.28) в (3.26). Имеем:

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Умножим слева обе части (3.29) на матрицу, полученную транспонированием второго множителя; получим

$$\begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Раскрыв скобки и выполнив матричные умножения, приведем равенство (3.30) к виду:

$$\begin{bmatrix} F^T K F & F^T C F \\ F^T C^T F & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^T R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

С учетом (3.9), блоки матрицы в левой части (3.31) принимают диагональный вид:

$$F^T K F = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & \dots \\ 0 & \kappa_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \kappa_{NN} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

причем все числа на диагонали положительны;

$$F^T C F = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & \dots \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ \dots & 0 & \chi_{DD} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

В равенстве (3.33) через D обозначена размерность подпространства H . Первые D элементов на диагонали матрицы (3.33) положительны, остальные равны нулю.

Произведение $F^T R$, с учетом введенного выше обозначения $f_j^T R = \rho_j$, можно записать в виде столбца ρ , содержащего ρ_i :

$$\rho = (\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots)^T. \quad (3.34)$$

Таким образом, матричное уравнение (3.31) расщепляется на следующие четыре группы скалярных уравнений:

$$\kappa_{ii} x_i + \chi_{ii} z_i = \rho_i, \quad i = 1, \dots, D \text{ (не суммировать)}, \quad (3.35)$$

$$\kappa_{ii} x_i = \rho_i, \quad i = D+1, \dots, N \text{ (не суммировать)}, \quad (3.36)$$

$$\chi_{ii} x_i = 0, \quad i = 1, \dots, D \text{ (не суммировать)}, \quad (3.37)$$

$$0 \cdot z_i = 0, \quad i = D+1, \dots, N. \quad (3.38)$$

Уравнения (3.36) и (3.37) можно разрешить относительно переменных

$$x_i, \quad i = 1, \dots, N:$$

$$x_i = 0, \quad i = 1, \dots, D; \quad x_i = \frac{\rho_i}{\kappa_{ii}}, \quad i = D+1, \dots, N. \quad (3.39)$$

Тем самым, возвращаясь к исходному базису, получаем:

$$X^* = \frac{\rho_m}{\kappa_{mm}} g_m, \quad (3.40)$$

что совпадает с (3.18). Таким образом, любое частное решение системы (3.24) в точности определяет вектор X^* .

Подставив найденные значения (3.39) в уравнения (3.35), найдём:

$$z_i = \frac{\rho_i}{\chi_{ii}}, \quad i=1, \dots, D \text{ (не суммировать)}, \quad (3.41)$$

а оставшиеся неизвестные z_i , $i=D+1, \dots, N$, в соответствии с равенствами (3.38), могут быть произвольными константами:

$$z_{D+i} = C_i, \quad i=1, \dots, N-D. \quad (3.42)$$

Тогда, возвращаясь к исходному базису, получаем:

$$Z = \frac{\rho_k}{\chi_{kk}} h_k + C_i g_i. \quad (3.43)$$

Это отличается от результата (3.20) произвольным слагаемым, принадлежащим ядру матрицы C .

Итак, любое частное решение системы линейных алгебраических уравнений (3.24) позволяет однозначно найти предел решения системы (3.7) и с точностью до слагаемого, принадлежащего ядру, найти предел производной решения системы (3.7). Если необходимо вычислить вектор (3.20), то он должен быть найден ортогонализацией вектора (3.43) к ядру.

3.3 Алгоритм решения алгебраической задачи

Построим линейный итерационный процесс решения системы линейных алгебраических уравнений [27] вида

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

В качестве начального приближения выберем вектор x^0 (далее верхний индекс будет означать номер итерации), определяемый решением системы уравнений $Kx^0 = R$. Этот вектор не принадлежит ядру матрицы C , вследствие чего возникает невязка:

$$b^0 = -Cx^0. \quad (3.45)$$

Как следует из изложенного выше, вектор x^0 отличается от искомого решения на вектор, принадлежащий пространству H . Исходя из этого, определим направление поиска так, чтобы оно принадлежало H :

$$p^0 = K^{-1}Cx^0. \quad (3.46)$$

Далее, найдем следующее приближение – вектор x^1 так, чтобы он был S -ортогонален к направлению поиска:

$$x^1 = x^0 - \gamma \cdot p^0, (x^0 - \gamma \cdot p^0)^T Cp^0 = 0. \quad (3.47)$$

Из второго равенства (3.47) получаем величину коэффициента γ :

$$\gamma = \frac{x^{0T} Cp^0}{p^{0T} Cp^0}. \quad (3.48)$$

Повторяем эти вычисления, принимая каждый раз вычисленное значение x^1 за начальное, пока невязка не станет меньше заданной пороговой величины.

Схема вычислений может быть проиллюстрирована для простейшего случая, когда размерность каждого из подпространств H и G равна единице. На рисунке 3.1 оси координат соответствуют компонентам вектора X , больший из эллипсов является линией уровня квадратичной функции $X^T KX = const$, вписанный эллипс – линией уровня функции $X^T (K + C)X = const$. Прямые являются линиями уровня функции $X^T CX = const$. Эти прямые параллельны ядру, которое образовано векторами, направленными вдоль отрезка между точками касания эллипсов, а сам этот отрезок является результатом предельного перехода – линией уровня квадратичной функции $X^T (K + \frac{1}{\alpha} C)X = const$ при бесконечно малом α .

Нормаль к каждой из линий уровня квадратичной формы определяет направление вектора – произведения матрицы квадратичной формы на вектор, проведенный из начала координат в точку пересечения нормали к линии уровня. Ядро G содержит один собственный вектор g (он соединяет точки касания большего эллипса с прямыми), пространство H – также один собственный вектор h (направлен параллельно прямым и проходит через начало координат).

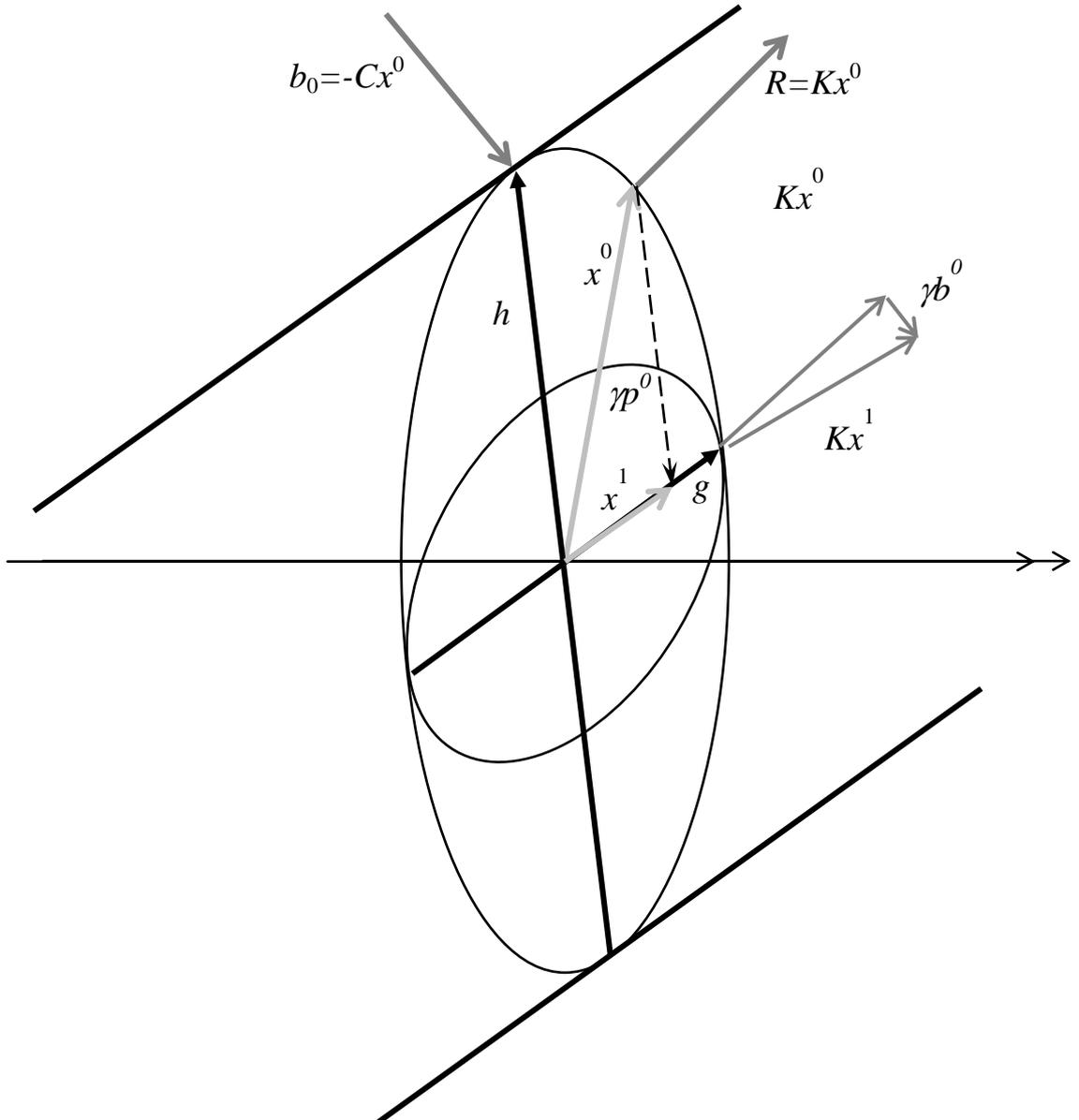


Рисунок 3.1 – Графическая интерпретация шага решения

Начало вектора R помещено в ту точку эллипса, в которой нормаль направлена вдоль вектора R . Тогда вектор, проведенный из начала координат в начало вектора R , показывает направление вектора x^0 . При умножении матрицы C на x^0 получаем вектор невязки $b^0 = -Cx^0$, направленный вдоль нормали к ядру. Умножая полученный вектор на матрицу K^1 , получаем вектор, направленный вдоль отрезка, соединяющего начало координат с точкой касания эллипса $X^T KX = const$ и прямой, который определяет направление шага поиска p^0 . Величина этого шага (пунктир на рисунке 3.1) определяется из условия C -ортогональности (3.43), т.е. так, чтобы

полученный вектор x^1 был ортогонален вектору Cp , направленному по нормали к прямым $X^T CX = const$. В нашем случае полученный вектор уже направлен вдоль вектора g , т.е. найденное приближение уже является точной проекцией на ядро. Если бы размерность H была больше единицы, то конец вектора x^1 мог бы оказаться «выше» или «ниже» плоскости рисунка, и итерации пришлось бы повторять. В целом на каждой итерации невязка теоретически уменьшается пропорционально, вследствие чего алгоритм обладает линейной сходимостью, и число итераций может быть бесконечно большим.

Для решения второй части задачи – отыскания вектора Z – рассмотрим, как изменяется произведение Kx при переходе от x^0 к x^1 . Обозначим это произведение через T , т.е. $T^0 = Kx^0$, $T^1 = Kx^1$. Разность $\Delta T^1 = T^1 - T^0 = K(x^1 - x^0)$ равна γb^0 , т.е. $-\gamma Cx^0$. Нетрудно видеть, что векторы x^1 и $z^1 = -\gamma Cx^0$ отвечают матричному уравнению:

$$Kx^1 + Cz^1 = R. \quad (3.49)$$

На следующем шаге очередное изменение вектора x вызовет изменение вектора T , которое также будет выражаться через предыдущее значение x .

Заметим, что вектор z^1 не является K -ортогональным к ядру, и его проекция на подпространство H не может быть вычислена, поскольку для этого необходимо было бы вначале построить полный базис этого подпространства. Это относится и к остальным итерациям. Однако для вычисления деформаций и напряжений достаточно найти любое частное решение системы (3.44), что и достигается приведенными выше вычислениями.

Окончательно, линейно сходящийся алгоритм может быть сформулирован следующим образом.

Шаг 1. Начальное приближение. Положим $x^0 = K^{-1}R$, $z^0 = 0$, номер итерации $t=0$.

Шаг 2. Выполним следующие вычисления.

Шаг 2.1. Найдем невязку $b^t = Cx^t$.

Шаг 2.2. Найдем вектор направления $p^t = K^{-1}b^t$.

Шаг 2.3. Найдем произведение $q^t = Cp^t$.

Шаг 2.4. Вычислим коэффициент $\gamma = \frac{(p^t)^T b^t}{(p^t)^T q^t}$.

Шаг 2.5. Вычислим $z^{t+1} = z^t + \gamma x^t$.

Шаг 2.6. Вычислим $x^{t+1} = x^t - \gamma p^t$.

Шаг 2.7. Если норма невязки b^t не превышает порогового уровня, переходим к шагу 3, иначе увеличиваем t на единицу и повторяем шаги 2.1 – 2.7.

Шаг 3. Закончим вычисления.

3.4 Обоснование сходимости дискретной схемы. Построение системы базисных функций

Выше была представлена дискретизация поставленной задачи, но не конкретизированы базисные функции. Традиционно в таких задачах используются Серендиповы конечные элементы. Тогда для такого четырехузлового элемента все четыре базисные функции записываются в виде одного выражения [60]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \quad . \quad (3.50)$$

Для восьмиузлового элемента базисные функции угловых узлов выглядят следующим образом [60]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (\xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i - 1), \quad (3.51)$$

а для узлов на сторонах элемента [60]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i), \quad \xi_i = 0, \quad \eta_i = \pm 1,$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 - \eta^2), \quad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = 0. \quad (3.52)$$

В рамках построения математической модели было получено уравнение (3.7). Было показано что, если ранг матрицы несжимаемости C

был меньше размерности задачи, а X^* принадлежит ядру матрицы C , то выполнялось условие

$$X^T C X = 0. \quad (3.53)$$

При расчете напряженно-деформированного состояния несжимаемых областей элементы высокого порядка не обеспечивается сходимость решения. Эта проблема известна, и она обходится при использовании гибридных элементов, но так и не решена для лагранжевых. При использовании аппроксимирующих функций высокого порядка, при численном интегрировании матрицы C , ее ранг был равен размерности задачи, и, следовательно, сходимость не достигалась. Необходимо определение такого набора базисных функций, который бы обеспечивал точное выполнение условие бездивергентности деформирования для произвольного плоского конечного элемента и определение ранга матрицы [48].

Для дальнейших вычислений введем вспомогательные функции $\bar{u}(x, r)$ и $\bar{v}(x, r)$, определяемые соотношением:

$$\bar{u}(x, r) = r \cdot u(x, r), \quad (3.54)$$

$$\bar{v}(x, r) = r \cdot v(x, r). \quad (3.55)$$

Введем вспомогательные координаты $y = r - r_0$, тогда

$$\bar{u}(x, r) = \bar{u}(x, y + r_0), \quad (3.56)$$

$$\bar{v}(x, r) = \bar{v}(x, y + r_0). \quad (3.57)$$

Для определения базисных функций запишем объемную деформацию Θ в цилиндрической системе координат:

$$\Theta = \text{div} (u, v) = \frac{\partial v(x, r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot v(x, r) + \frac{\partial u(x, r)}{\partial x}, \quad (3.58)$$

где $u(x, r)$ - перемещения по оси x , $v(x, r)$ - перемещения по оси r .

Из уравнений (3.54-3.57) выразим $u(x, r)$ и $v(x, r)$, подставим в формулу (3.58). Получим следующее уравнение

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}(x, r)}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\bar{v}(x, r)}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{u}(x, r)}{r} \right). \quad (3.59)$$

После преобразований получим уравнение:

$$\Theta = \frac{1}{r_0 + y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right). \quad (3.60)$$

Деформации сдвига определяются по формуле:

$$\gamma = \frac{\partial v(x, r)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, r)}{\partial r}. \quad (3.61)$$

После преобразований с помощью формул (3.54-3.57) получим следующее соотношение:

$$\gamma = \frac{1}{r_0 + y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{1}{(r_0 + y)^2} \bar{u}. \quad (3.62)$$

Условие несжимаемости $\Theta = 0$ имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.63)$$

Введем аналитическую функцию

$$F(z) = \bar{v} + i\bar{u} \quad (3.64)$$

комплексного аргумента $z = x + iy$, для которой (3.63) является условием Коши-Римана. Второе условие аналитичности примет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (3.65)$$

Это условие упростит вычисление γ .

Примем, что $F(z)$ – полином от z , и найдем $\bar{v} = \operatorname{Re} F(z)$, $\bar{u} = \operatorname{Im} F(z)$:

$$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad c_k = A_k + iB_k \quad (3.66).$$

Поскольку

$$z^k = (x + iy)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m x^{k-m} y^m i^m, \quad (3.67)$$

из (3.66) получим

$$F(z) = \sum_{k=0}^n (A_k + iB_k) \sum_{m=0}^k C_k^m x^{k-m} y^m i^m. \quad (3.68)$$

Раскроем скобки в (3.68) и получим:

$$F(z) = \sum_{k=0}^n A_k \sum_{m=0}^k C_k^m x^{k-m} y^m i^m + \sum_{k=0}^n iB_k \sum_{m=0}^k C_k^m x^{k-m} y^m i^m. \quad (3.69)$$

Выделим действительную и мнимую часть. Для этого заметим, что в первом слагаемом (3.69) действительные члены с четными m , а с нечетными m – мнимые. Во втором слагаемом, наоборот, при четном m получаем мнимые члены, а при нечетном – действительные. Результаты расчета приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Расчет коэффициентов при A_k и B_k

k	m	i^m	C_k^m	$x^{k-m}y^m$	Коэффициент при A_k	Коэффициент при B_k
0	0	1	1	1	1	i
1	0	1	1	x	x	ix
1	1	i	1	y	iy	$-y$
2	0	1	1	x^2	x^2	ix^2
2	1	i	2	$2xy$	$2ixy$	$-2xy$
2	2	-1	1	y^2	$-y^2$	$-iy^2$

Следовательно, для полиномов степени 2 имеем:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(x, y) \\ \bar{v}(x, y) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Получаем 6 линейно-независимых бездивергентных решений, среди которых есть функции содержащие квадраты координат. Из 8 степеней свободы 6 соответствует бездивергентным решениям. Найдем 2 оставшихся решения из условия:

$$\Theta = \frac{1}{r_0 + y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 1. \quad (3.71)$$

Преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = r_0 + y - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad (3.72)$$

и положим $\bar{v} = 0$. Тогда интегрируя (3.72), получаем

$$\bar{u} = (r_0 + y)x + const, \quad (3.73)$$

где константу C можно положить равной 0.

Аналогично, преобразовав (3.71) к виду:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = r_0 + y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (3.74)$$

и примем $\bar{u} = 0$, тогда

$$\bar{v} = r_0 y + \frac{1}{2} y^2 + const. \quad (3.75)$$

Теперь общее выражение для аппроксимации перемещений принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix} + \alpha_6 \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{bmatrix} + \alpha_7 \begin{bmatrix} (r_0 + y)x \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_8 \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 y + \frac{1}{2} y^2 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Объемная деформация примет вид:

$$\Theta = \text{div}(u, v) = \frac{1}{r_0 + y} (\alpha_7 (r_0 + y) + \alpha_8 (r_0 + y)) = \alpha_7 + \alpha_8. \quad (3.77)$$

С учетом этого матрица несжимаемости примет вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \int_V \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} dV, \quad (i, j = 7, 8), \quad (3.78)$$

где λ_0 – постоянная Ламе.

С учетом зависимости коэффициентов α_7, α_8 от узловых перемещений

$$\begin{bmatrix} \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \Omega_{7,8}^{-1} \cdot \bar{\delta}_i \quad (3.79)$$

получаем

$$C = \Omega_{7,8}^{-1 T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Omega_{7,8}^{-1} \cdot \lambda_0 \cdot V, \quad (3.80)$$

где

$$V = \int_S 2\pi r(\xi, \eta) \cdot J \cdot d\xi d\eta, \quad (3.81)$$

$$\Omega = \frac{1}{r_0 + y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1y_1 & 0 & r_0y_0 + \frac{1}{2}y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1y_1 & 0 & r_0y_0 + \frac{1}{2}y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1y_1 & 0 & r_0y_0 + \frac{1}{2}y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1y_1 & 0 & r_0y_0 + \frac{1}{2}y_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

что согласуется с применимостью одноточечной схемы интегрирования для четырёхузлового элемента [29]. Аналогичным образом могут быть получены наборы бездивергентных базисных функций для восьми- и двенадцатиузлового конечного элемента.

Таким образом, предложен подход для получения набора базисных функций, обеспечивающих выполнение условия несжимаемости в поставленной краевой задаче при любом порядке интегрирования по объёму элемента.

3.5 Выводы по главе

1. С использованием техники метода конечных элементов получен дискретный аналог краевой задачи статического деформирования композитной структуры с объемно-несжимаемыми слоями – система линейных алгебраических уравнений относительно малого параметра.

2. Разработан алгоритм расчета полей перемещений, напряжений и деформаций слоистых осесимметричных конструкций с объемно-несжимаемыми слоями путем численного решения дискретного аналога краевой задачи.

3. Приведено обоснование сходимости дискретного решения, а также предложена система базисных функций, позволяющая получить бездивергентное решение методом конечных элементов.

4 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЁТУ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

4.1 Реализация алгоритма в среде функционально-объектного программирования «Алгозит»

Программная реализация разработанных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния выполнена в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» в виде специализированной конфигурации.

Для выполнения вычислительных программ необходим персональный компьютер класса Pentium с тактовой частотой не менее 1,5 ГГц и оперативной памятью 1,75 Гбайт. Объем дисковой памяти для установки программ – 2 Гбайт.

Программы выполняются под управлением операционной системы Windows XP или систем, совместимых с ней. Язык разработки: C++. Среда разработки Borland Builder 5.0. В коде программ комплекса используются расширения языка C++ Borland.

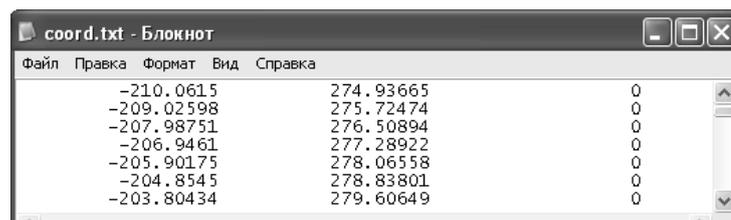
Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» включает в себя:

- интерактивную оболочку для управления процессом расчета;
- файлы конфигурации, содержащие представления алгоритмов в виде функционально-объектных схем (загружаются в оболочку автоматически);
- библиотеку визуальных компонентов для отображения элементов функционально-объектных схем;
- транслятор функционально-объектных схем в последовательность интерпретируемых команд;
- интерпретатор команд;
- библиотеку функциональных объектов, реализующих отдельные шаги алгоритмов;

- внешние приложения (инструменты) для выгрузки результатов расчета.

Задание данных осуществляется с помощью интерпретатора «Ядро» [63]. Данные на языке «Ядро» имеют текстовый формат и могут быть подготовлены или изменены с помощью любого встроенного редактора операционной системы (NotePad, WordPad и др.) либо непосредственно в интерпретаторе «Ядро». Исходные данные содержатся в текстовых файлах в виде таблиц.

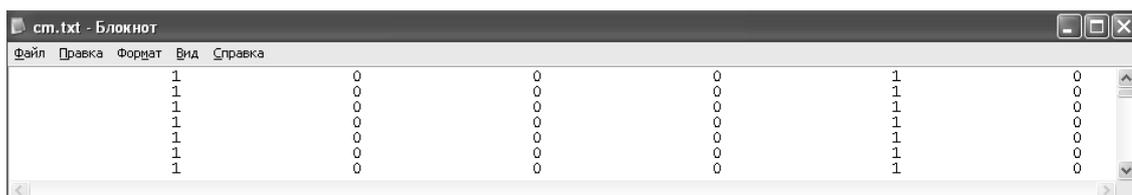
Файл «coord.txt» (рисунок 4.1) содержит координаты узлов расчетной модели в общей декартовой системе. В одной строке содержатся координаты узла, номер которого (с единицы) равен номеру строки; каждая строка содержит по три числа – координаты X , Y и Z .



Номер узла	X	Y	Z
1	-210.0615	274.93665	0
2	-209.02598	275.72474	0
3	-207.98751	276.50894	0
4	-206.9461	277.28922	0
5	-205.90175	278.06558	0
6	-204.8545	278.83801	0
7	-203.80434	279.60649	0

Рисунок 4.1 – Окно с фрагментом файла «coord.txt»

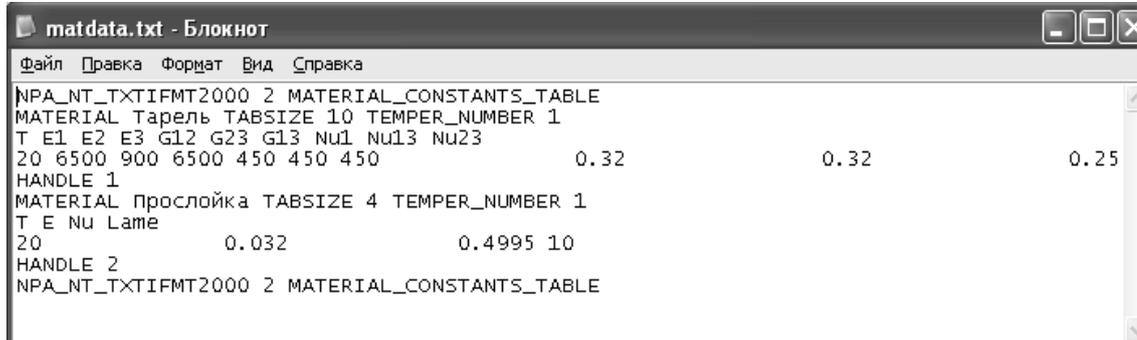
Файл «cm.txt» (рисунок 4.2) содержит местные оси узлов модели (s, t, n) . Местная система координат задается с помощью координат направляющих векторов осей s и t в общей системе координат (X, Y, Z) . Таблица содержит шесть столбцов, а число её строк равно числу конечных элементов. В каждой строке записываются координаты направляющих векторов осей s и t .



Номер узла	s _x	s _y	s _z	t _x	t _y	t _z
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Рисунок 4.2 – Окно с фрагментом файла «cm.txt»

В файле «matdata.txt» (рисунок 4.3) содержится таблица характеристик материалов. В файле задан номер материала и его физико-механические параметры.



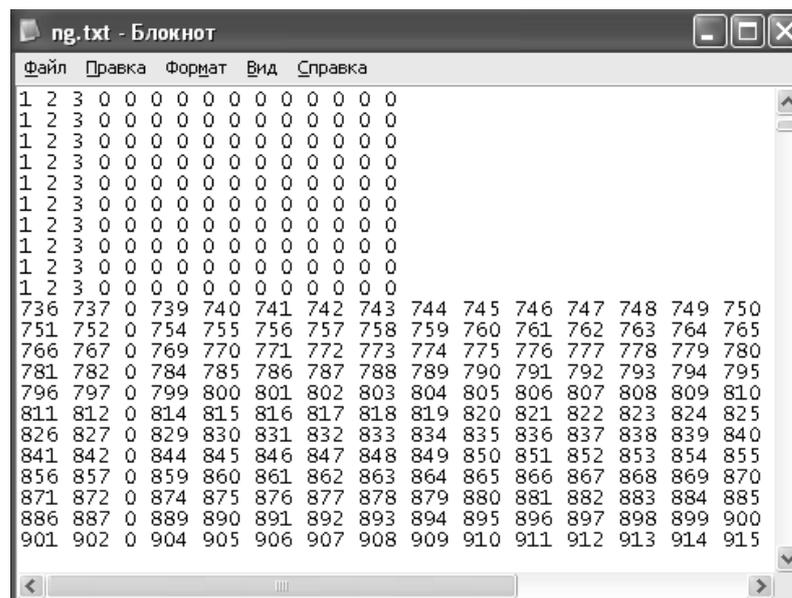
```

matdata.txt - Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
NPA_NT_TXTIFMT2000 2 MATERIAL_CONSTANTS_TABLE
MATERIAL Тарель TABSIZE 10 TEMPER_NUMBER 1
T E1 E2 E3 G12 G23 G13 NU1 NU13 NU23
20 6500 900 6500 450 450 450          0.32          0.32          0.25
HANDLE 1
MATERIAL Прослойка TABSIZE 4 TEMPER_NUMBER 1
T E Nu Lame
20          0.032          0.4995 10
HANDLE 2
NPA_NT_TXTIFMT2000 2 MATERIAL_CONSTANTS_TABLE

```

Рисунок 4.3 – Файл «matdata.txt»

В файле «ng.txt» (рисунок 4.4) задаются коды перемещений. Число строк этой таблицы равно числу узлов, а число столбцов – числу степеней свободы узла. Таким образом, каждая степень свободы каждого узла имеет собственный код закрепления. Код закрепления свободного перемещения равен номеру степени свободы в глобальной нумерации. Код закрепления может быть равен нулю; это означает, что перемещение по соответствующей степени свободы запрещено и равно нулю.



```

ng.txt - Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
736 737 0 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750
751 752 0 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765
766 767 0 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780
781 782 0 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795
796 797 0 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810
811 812 0 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825
826 827 0 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840
841 842 0 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855
856 857 0 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870
871 872 0 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885
886 887 0 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900
901 902 0 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915

```

Рисунок 4.4 – Окно с фрагментом файла «ng.txt»

В файле «option.txt» (рисунок 4.5) задаются переменные, управляющие процессом расчета. Файл опций состоит из строк, каждая из которых содержит три текстовых поля: имя опции, значение опции и комментарий. Эти поля отделяются друг от друга символом табуляции.

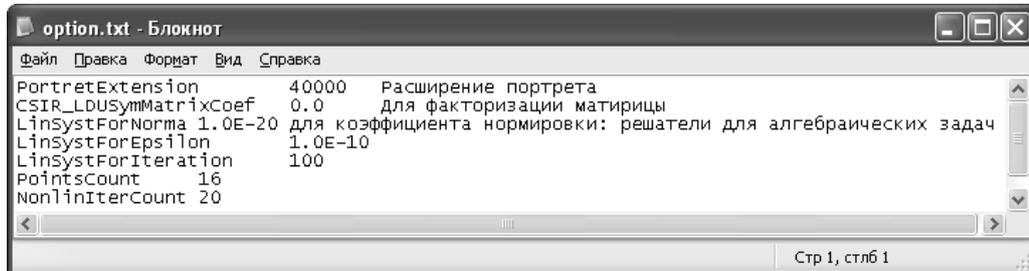


Рисунок 4.5 – Файл «option.txt»

В файле «Orient.txt» (рисунок 4.6) таблица содержит координаты направляющих векторов главных систем координат узлов. Главные оси обозначаются буквами: S , T , N и образуют правую декартову тройку. Таблица содержит в каждой строке по шесть чисел: координаты направляющего вектора оси S (в общей системе координат (X, Y, Z)) и координаты направляющего вектора оси T . При этом не требуется, чтобы эти векторы были единичными и ортогональными; необходима только их линейная независимость, обеспечивающая однозначное задание плоскости ST , следовательно, и однозначное определение направления оси N . Номер строки таблицы равен номеру узла, ориентация которого задана в данной строке. Узлы нумеруются с единицы.

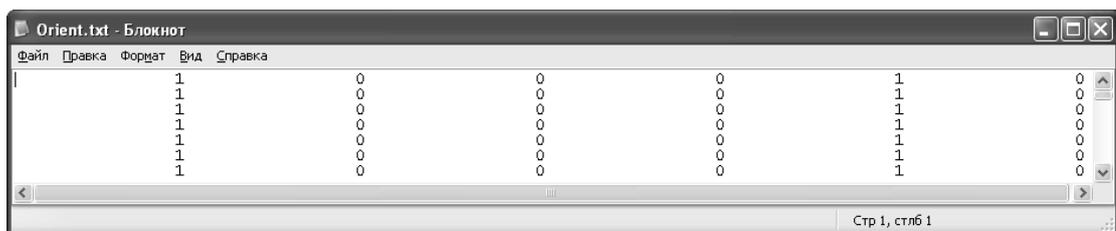


Рисунок 4.6 – Окно с фрагментом файла «Orient.txt»

Файл «Param.txt» (рис. 4.7) содержит коды закреплений первого узла.

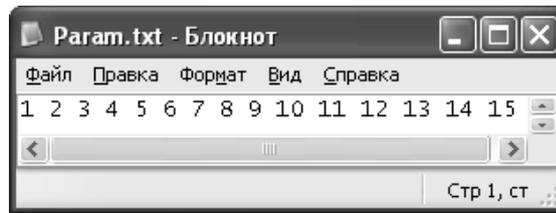


Рисунок 4.7 – Файл «Param.txt»

В файле «Q.txt» (рисунок 4.8) таблица содержит значения сосредоточенных сил и моментов сил. Силы и моменты отнесены к главной системе координат узла. Число строк таблицы равно числу узлов, а число столбцов – числу степеней свободы узла.

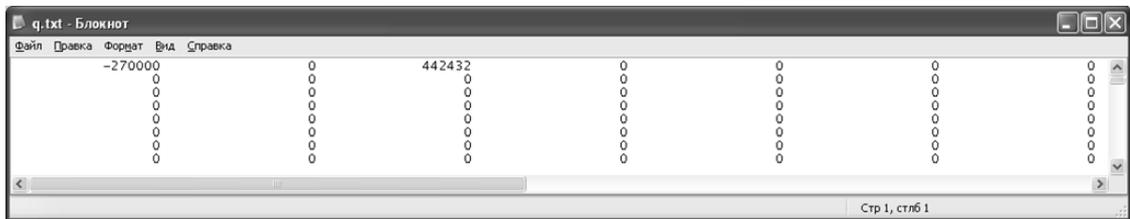


Рисунок 4.8 – Окно с фрагментом файла «Q.txt»

Файл «Secant.txt» (рисунок 4.9) содержит таблицу данных о сечениях и строится так, что каждая её строка соответствует одному конечному элементу. В строке содержатся данные: код типа сечения элемента, номер типа материала, три угла, определяющие направление главных осей анизотропии относительно местных осей.

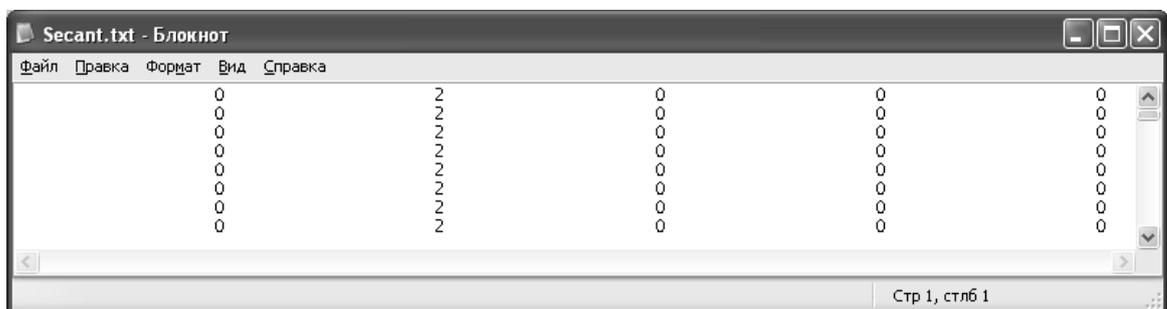


Рисунок 4.9 – Окно с фрагментом файла «Secant.txt»

В файле «top.txt» (рисунок 4.10) задаются номера узлов конечных элементов, т.е. «обход» геометрической формы конечного элемента по узлам. Число строк равно числу элементов модели, число столбцов – максимальному числу узлов одного элемента (4).

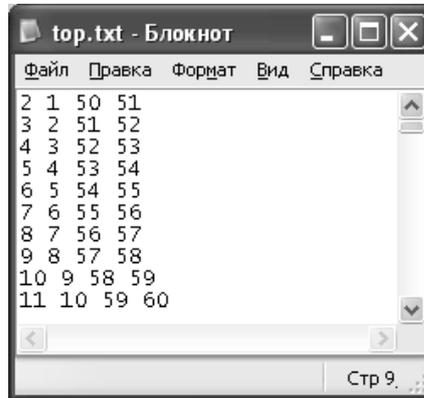


Рисунок 4.10 – Окно с фрагментом файла «top.txt»

Файл «typelt.txt» (рисунок 4.11) содержит один столбец, в котором для каждого конечного элемента указывается номер его типа. Следовательно, число строк равно количеству конечных элементов. Модель строится из элементов типа 3.

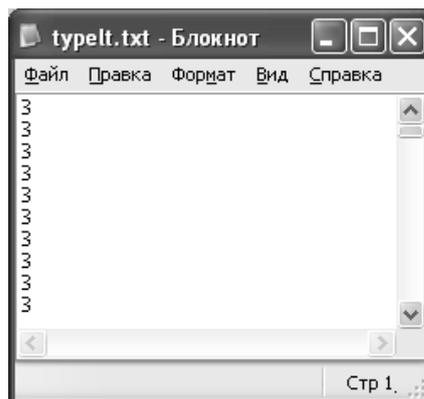


Рисунок 4.11 – Окно с фрагментом файла «typelt.txt»

Файлы «u.txt» и «UProizvod.txt» содержат значения заданных перемещений узлов и их производные. Число строк таблицы равно числу

узлов, а число столбцов – числу степеней свободы узла. В разработанной модели исходных данных эти значения взяты равными 0.

В среде функционально-объектного программирования «Алгозит» [64] было разработано приложение для расчета напряженно-деформированного состояния осесимметричных объектов из композитных материалов с объемно-несжимаемыми слоями. Главная панель «Алгозита» представлена на рисунке 4.12.

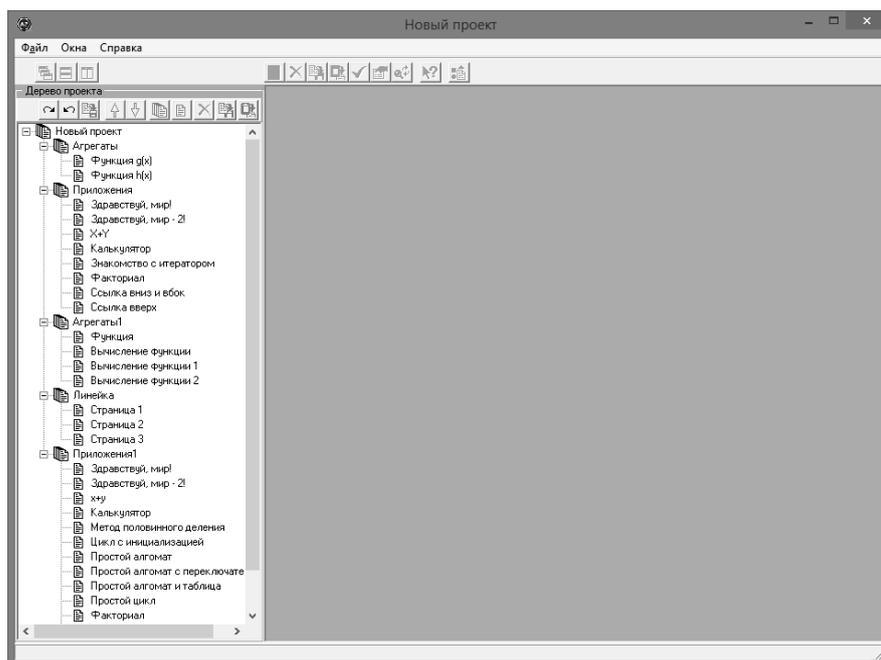


Рисунок 4.12 – Главное окно программы «Алгозит»

Для расчета напряженно-деформированного состояния были разработаны следующие страницы: «Локальные матрицы», «Перенумерация элементов и переменных», «Сборка начальная», «Решатель» и «Напряжения».

На странице «Локальные матрицы» вычисляются локальные матрицы жесткости, а также матрицы несжимаемости. На представленной на рисунке 4.13 странице осуществляется выгрузка вычисленных локальных матриц в файл, их непосредственное вычисление осуществляется на уровне конечного

элемента. Для этого обратимся к странице типового конечного элемента (рисунок 4.14).

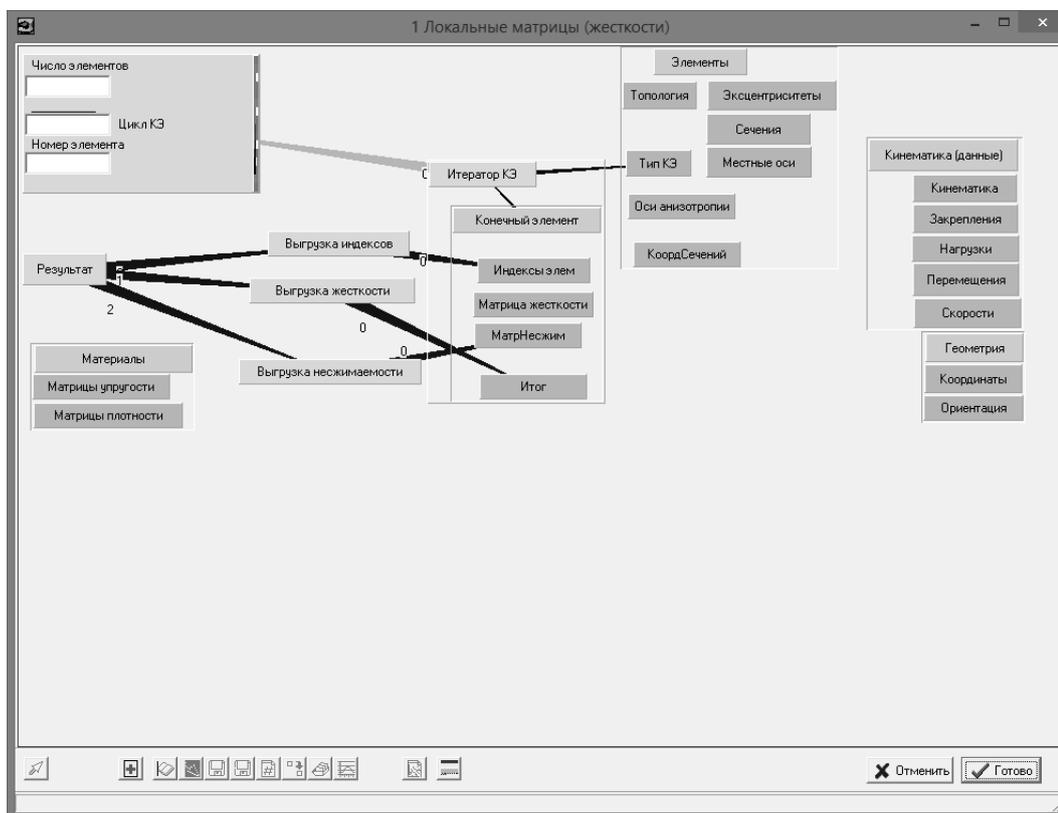


Рисунок 4.13 – Страница «Локальные матрицы»

Эти страницы выполняют роль функций, которые осуществляют непосредственный расчет при вызове «сверху».

После вычисления локальных матриц и выгрузки их в файл необходимо осуществить перенумерацию элементов и переменных, для этого обратимся к соответствующей странице (рисунок 4.17).

После перенумерации новые номера, а также суммарные нагрузки, выгружаются в файл для использования в следующих приложениях. Для неизвестных необходимо осуществить сборку глобальных матриц жесткости и несжимаемости (рисунок 4.18).

На рисунке 4.18 осуществляется только выгрузка соответствующих матриц жесткости и несжимаемости, но не отражается непосредственное

получение этих матриц. Для их вычисления используется страница «Сборка Фронт» (рисунок 4.19).

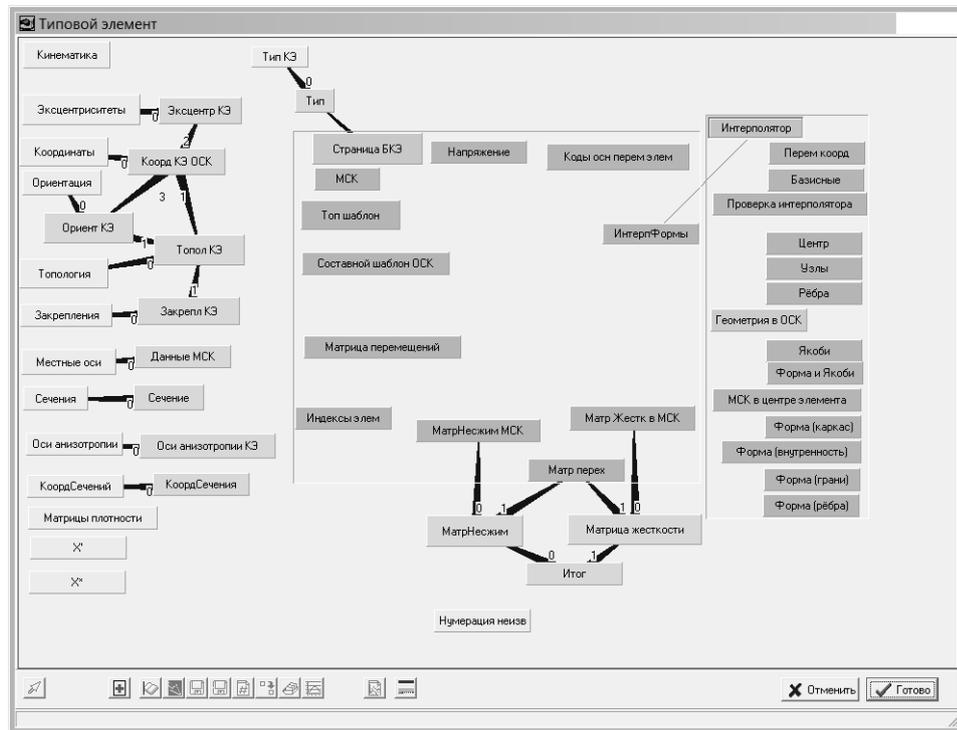


Рисунок 4.14 – Страница «Типовой элемент»

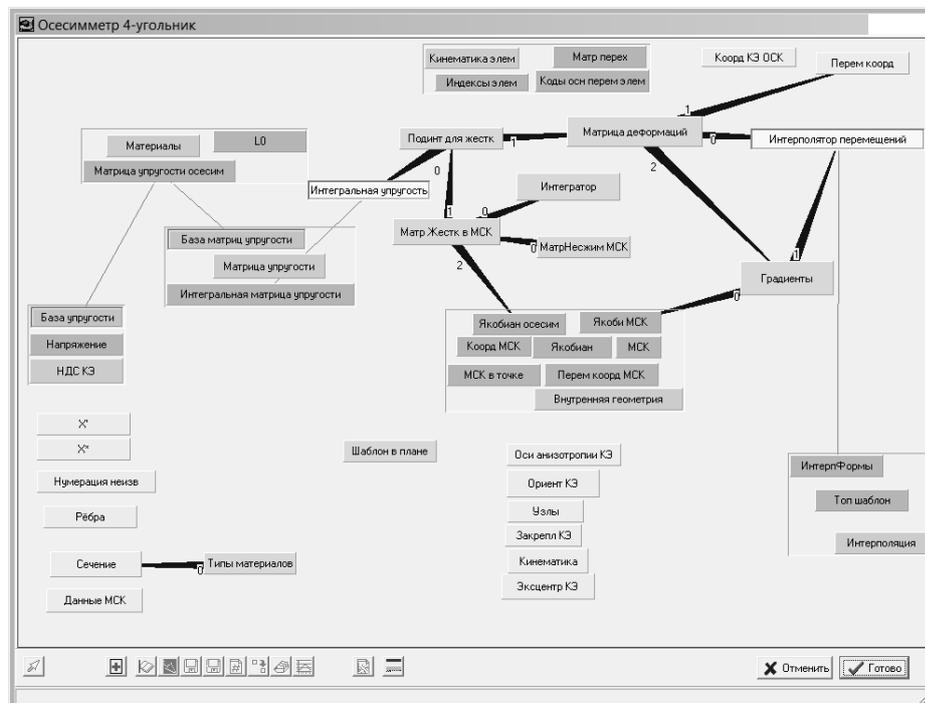


Рисунок 4.15 – Страница «Осесимметричный 4-угольник»

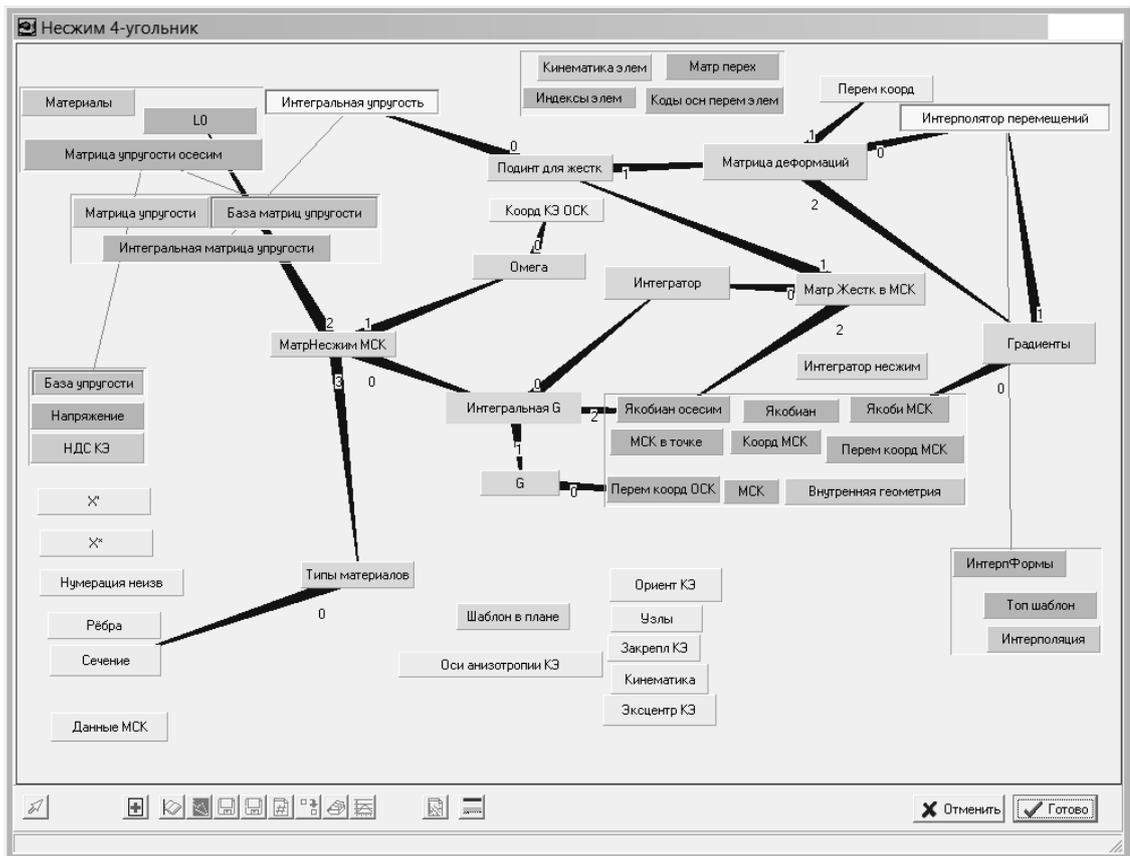


Рисунок 4.16 – Страница «Несжимаемый 4-угольник»

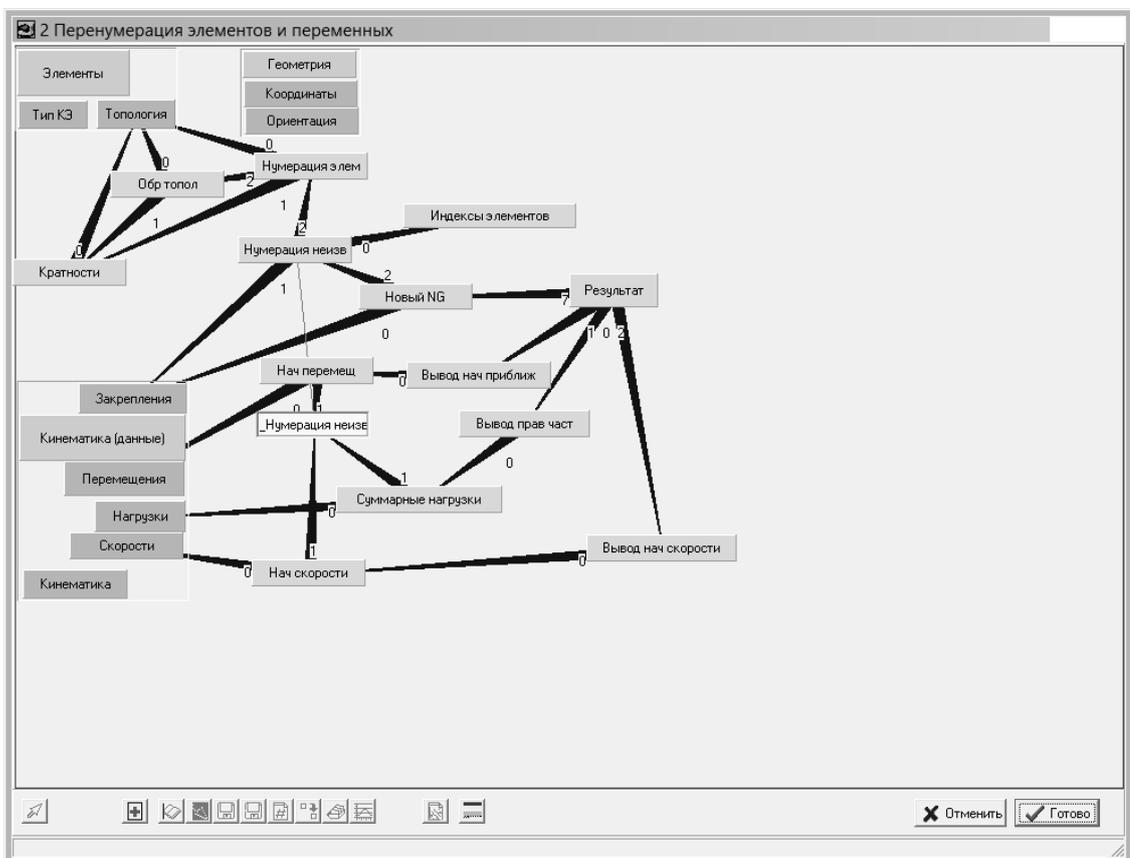


Рисунок 4.17 – Страница «Перенумерация элементов и переменных»

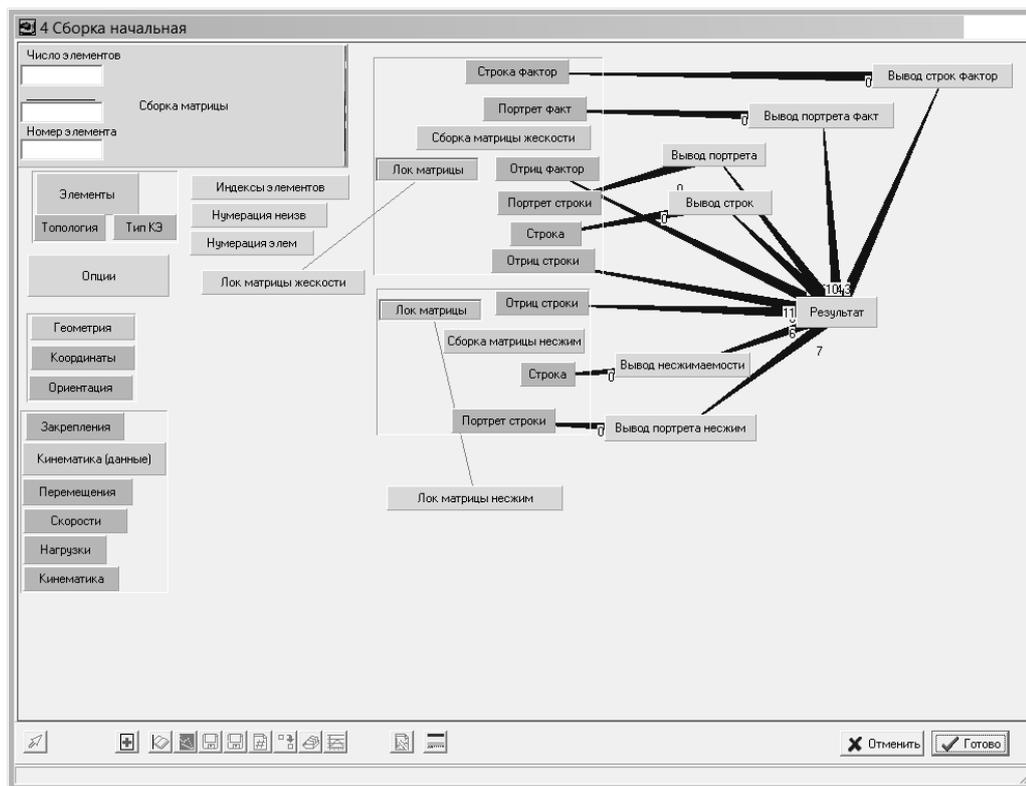


Рисунок 4.18 – Страница «Сборка начальная»

На рисунке 4.18 видно, что, если в качестве сходного параметра «Локальные матрицы» подставить матрицы жесткости, то получим глобальную матрицу жесткости, если же подставить матрицы несжимаемости – то, соответственно, глобальную матрицу несжимаемости.

Для непосредственного расчета перемещений (скоростей) используется страница «Решатель» (рисунок 4.20). На ней реализуется алгоритм, представленный в главе 3.

Из рисунка 4.20 видно, что используется только одна вложенная страница «Шаг», на которой реализуется шаг алгоритма (рисунок 4.21). На странице «Шаг» осуществляется расчет значений параметров алгоритма и неизвестных на каждом шаге. За остановку алгоритма отвечает блок «Пересчет» (рисунок 4.20). Таким образом, мы получаем значения перемещений (скоростей) и их производных, которые необходимы для вычисления напряжений и деформаций (скоростей деформаций).

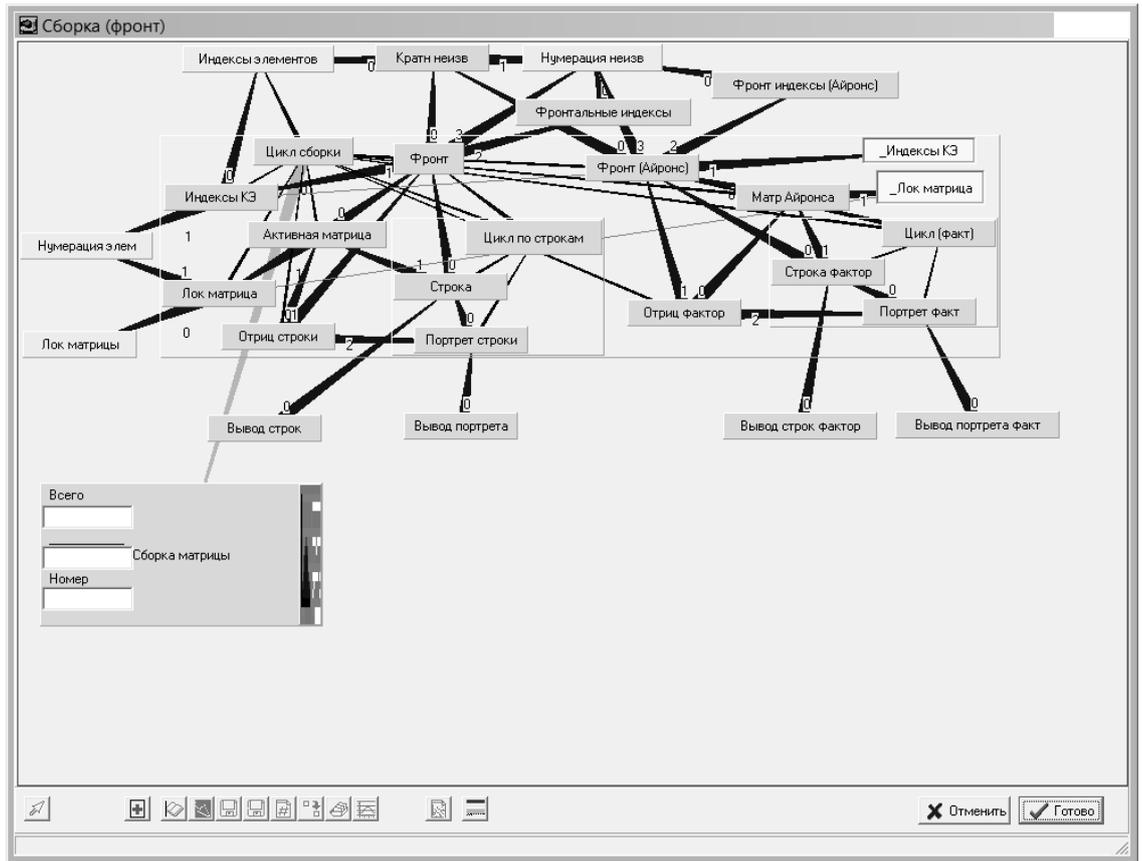


Рисунок 4.19 – Страница «Сборка (фронт)»

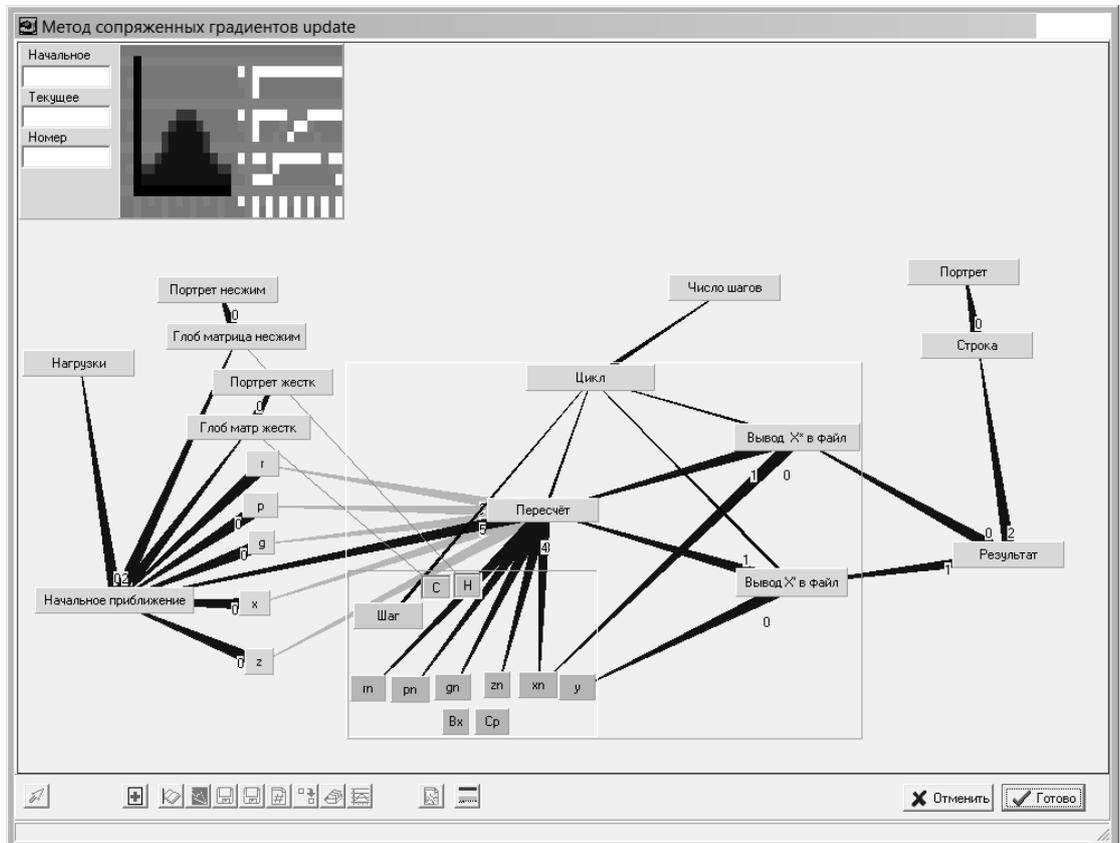


Рисунок 4.20 – Страница «Метод сопряженных градиентов»

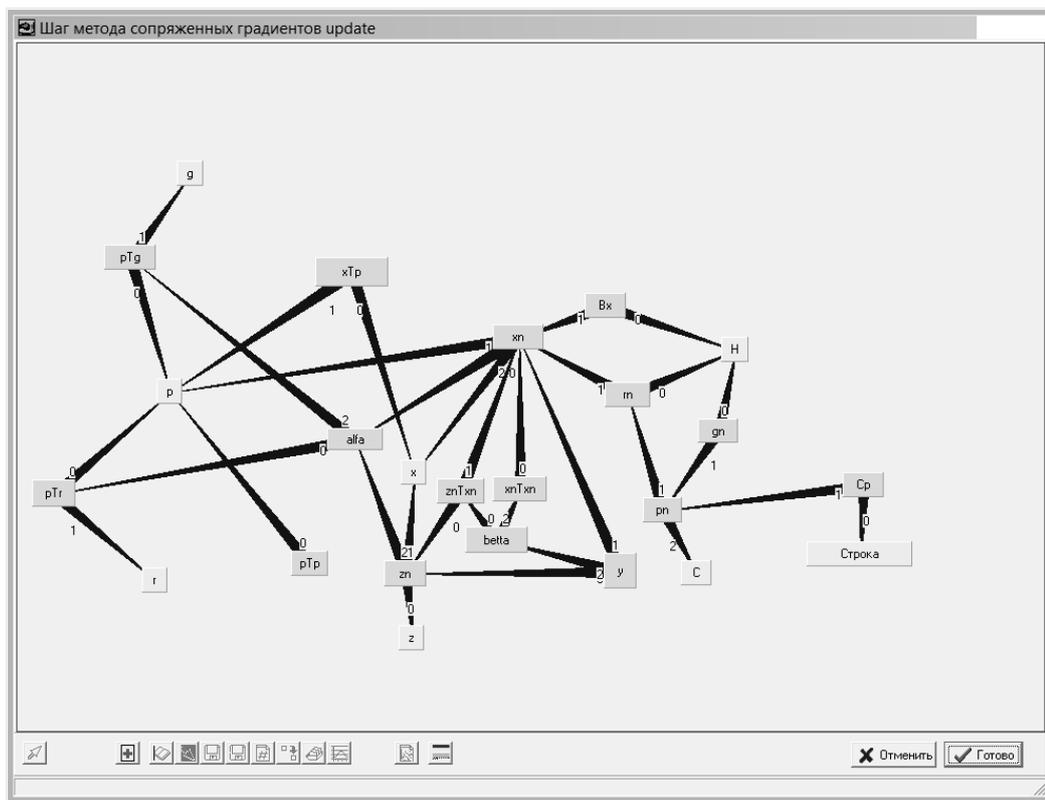


Рисунок 4.21 – Страница «Шаг метода сопряженных градиентов»

На странице «Напряжения» (рисунок 4.22) осуществляется вывод перемещений и напряжений, сам же расчет напряжений осуществляется на уровне конечного элемента (рисунок 4.15), для этого обращаемся к странице «НДС» (рисунок 4.23). Для непосредственного вычисления необходимо зайти в пункт меню «Показать->Отладчик» (рисунок 4.24).

Вычисление сводится к последовательному выполнению соответствующих приложений. Результаты вычислений выгружаются в файлы «Stress.lob» и «DisplaceRes.lob». С помощью пункта меню «Инструменты->Экспорт» можно посмотреть графическое отображение полученных результатов (рисунок 4.25).

При выборе соответствующего пункта меню появляется окно настройки графического отображения данных, есть возможность настроить фильтры по материалу, слою, сечению, точке в сечении и элементу. После осуществления настроек необходимо нажать кнопку «Выбрать» и станут активны кнопки «Таблица» и «Графика». По нажатию на кнопку «Таблица»

результаты представляются в виде таблицы (рисунок 4.26), а по нажатию на кнопку «Графика» – в виде графика (рисунок 4.27).

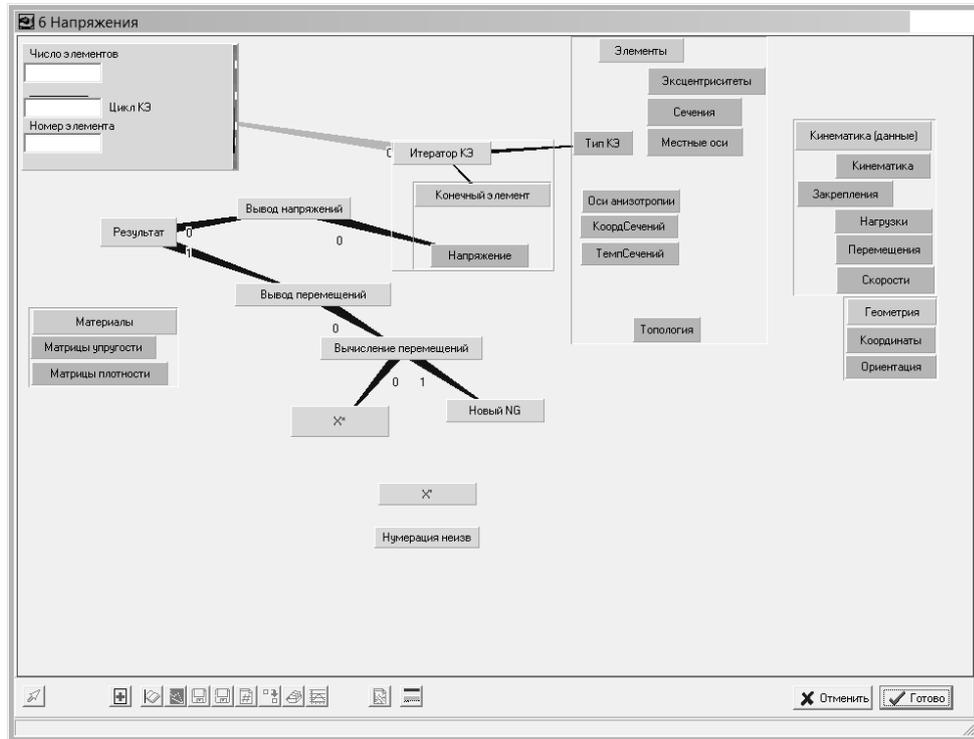


Рисунок 4.22 – Страница «Напряжения»

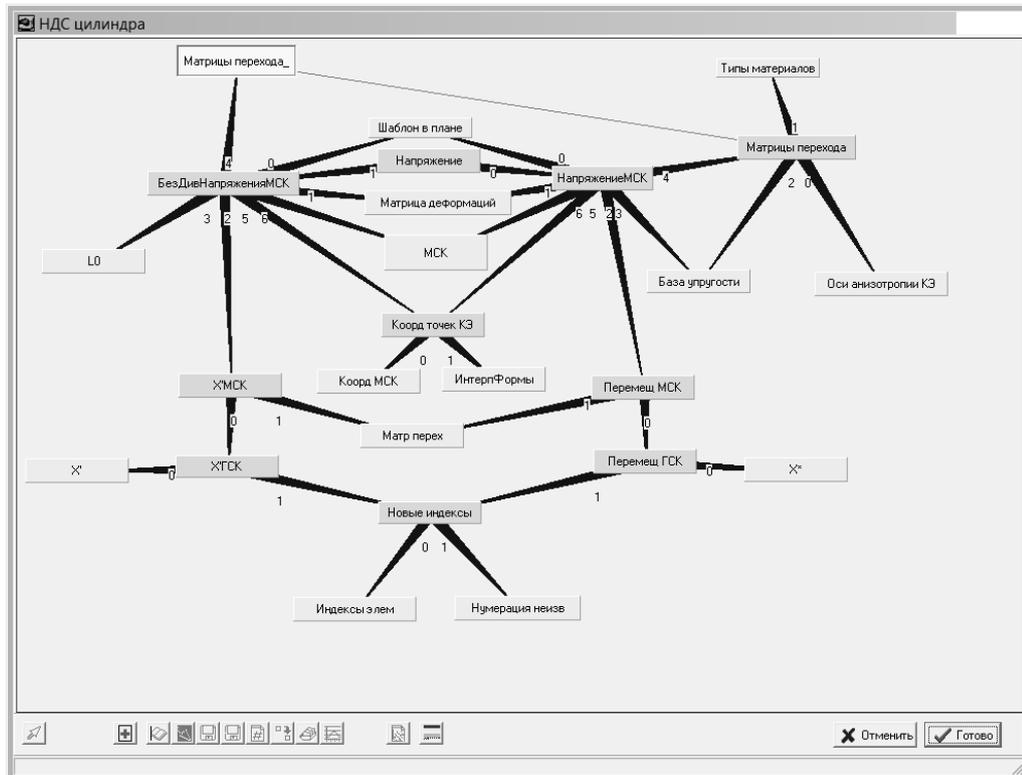


Рисунок 4.23 – Страница «НДС цилиндра»

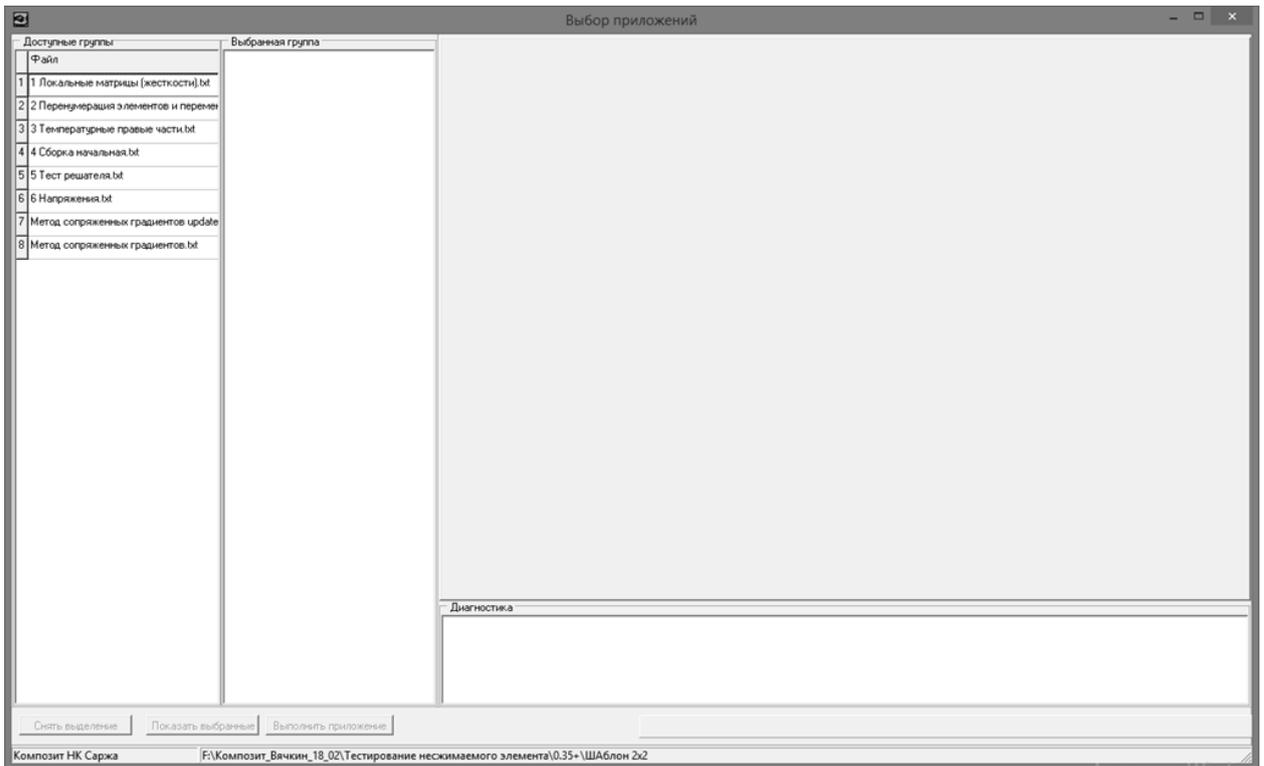


Рисунок 4.24 – Приложение «Отладчик»

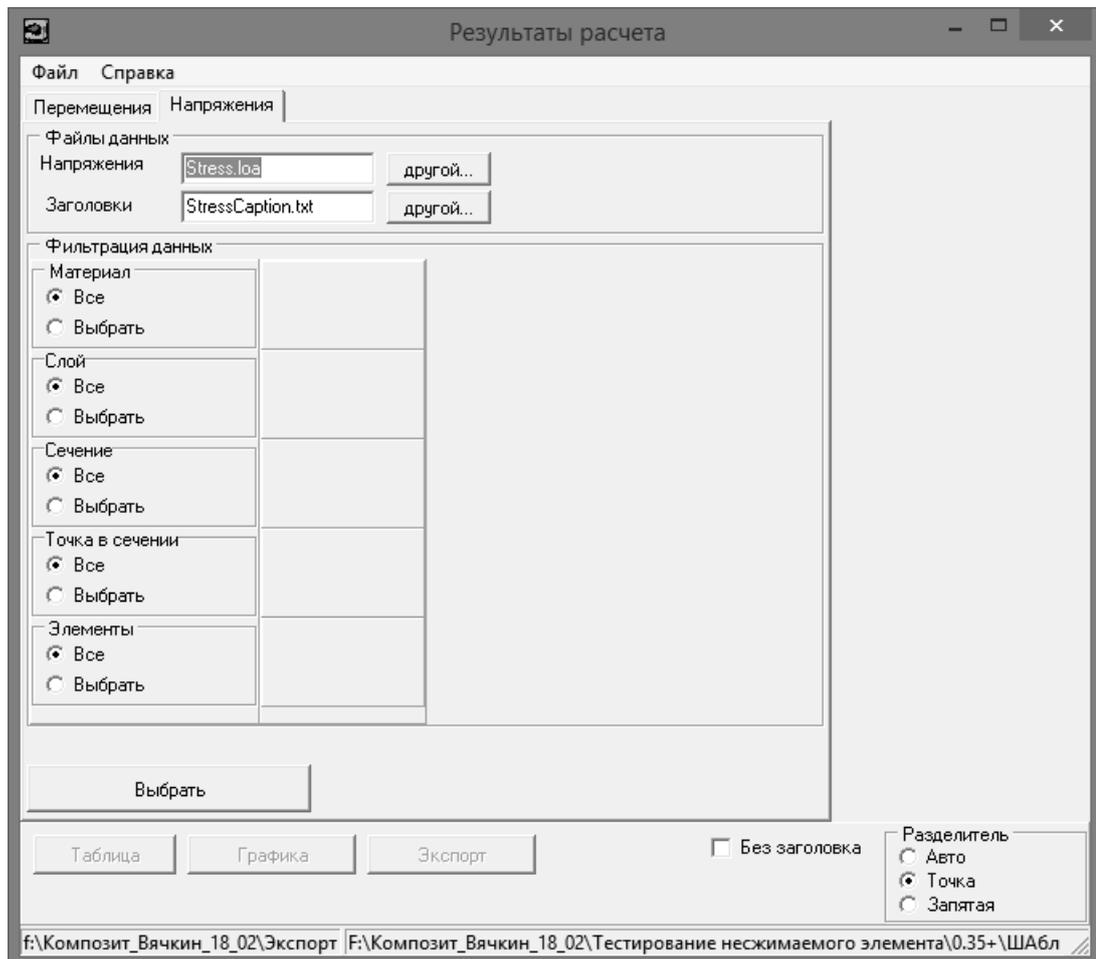


Рисунок 4.25 – Приложение «Экспорт»

Напряжения и деформации																				
Строка	Элемент	Сечение	Слой	Материал	Точка	X	Y	Z	Eps5	EpsT	EpsN	GammaST	GammaTN	GammaSN	Eps1	Eps2	Eps3	Gamma12	Gamma23	G
1	0	0	0	2	0	0.056351	10.113	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	4.7855e-12	0	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	4.7855e-12	0	
2	0	0	0	2	0	0.056351	10.5	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	7.276e-12	0	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	7.276e-12	0	
3	0	0	0	2	0	0.056351	10.887	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	1.3404e-11	0	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	1.3404e-11	0	
4	0	0	0	2	0	0.25	10.113	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	2.6613e-11	0	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	2.6613e-11	0	
5	0	0	0	2	0	0.25	10.5	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	2.5466e-11	0	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	2.5466e-11	0	
6	0	0	0	2	0	0.25	10.887	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.7956e-11	0	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.7956e-11	0	
7	0	0	0	2	0	0.44365	10.113	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	4.2075e-11	0	0	-6.9714e-12	-1817.6	3083.8	4.2075e-11	0	
8	0	0	0	2	0	0.44365	10.5	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	4.3656e-11	0	0	2.9916e-11	-1817.6	2903	4.3656e-11	0	
9	0	0	0	2	0	0.44365	10.887	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	4.9784e-11	0	0	6.6803e-11	-1817.6	2735.1	4.9784e-11	0	
10	1	0	0	2	0	0.55635	10.113	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	6.5811e-11	0	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	6.5811e-11	0	
11	1	0	0	2	0	0.55635	10.5	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.4916e-10	0	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.4916e-10	0	
12	1	0	0	2	0	0.55635	10.887	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.3978e-10	0	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.3978e-10	0	
13	1	0	0	2	0	0.75	10.113	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	5.035e-11	0	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	5.035e-11	0	
14	1	0	0	2	0	0.75	10.5	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.3097e-10	0	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.3097e-10	0	
15	1	0	0	2	0	0.75	10.887	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.1795e-10	0	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.1795e-10	0	
16	1	0	0	2	0	0.94365	10.113	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	2.8522e-11	0	0	6.9714e-12	-1817.6	3083.8	2.8522e-11	0	
17	1	0	0	2	0	0.94365	10.5	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.1278e-10	0	0	-2.9916e-11	-1817.6	2903	1.1278e-10	0	
18	1	0	0	2	0	0.94365	10.887	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.034e-10	0	0	-6.6803e-11	-1817.6	2735.1	2.034e-10	0	
19	2	0	0	2	0	0.056351	11.113	0	5.9507e-11	-1424.7	2646.7	-2.1432e-12	0	0	5.9507e-11	-1424.7	2646.7	-2.1432e-12	0	
20	2	0	0	2	0	0.056351	11.5	0	-2.4539e-12	-1424.7	2509.6	7.276e-12	0	0	-2.4539e-12	-1424.7	2509.6	7.276e-12	0	
21	2	0	0	2	0	0.056351	11.887	0	-6.4415e-11	-1424.7	2381.4	1.2147e-11	0	0	-6.4415e-11	-1424.7	2381.4	1.2147e-11	0	
22	2	0	0	2	0	0.25	11.113	0	5.9507e-11	-1424.7	2646.7	-3.2156e-11	0	0	5.9507e-11	-1424.7	2646.7	-3.2156e-11	0	
23	2	0	0	2	0	0.25	11.5	0	-2.4539e-12	-1424.7	2509.6	-2.5466e-11	0	0	-2.4539e-12	-1424.7	2509.6	-2.5466e-11	0	
24	2	0	0	2	0	0.25	11.887	0	-6.4415e-11	-1424.7	2381.4	-1.6957e-11	0	0	-6.4415e-11	-1424.7	2381.4	-1.6957e-11	0	

Рисунок 4.26 – Напряжения и деформации

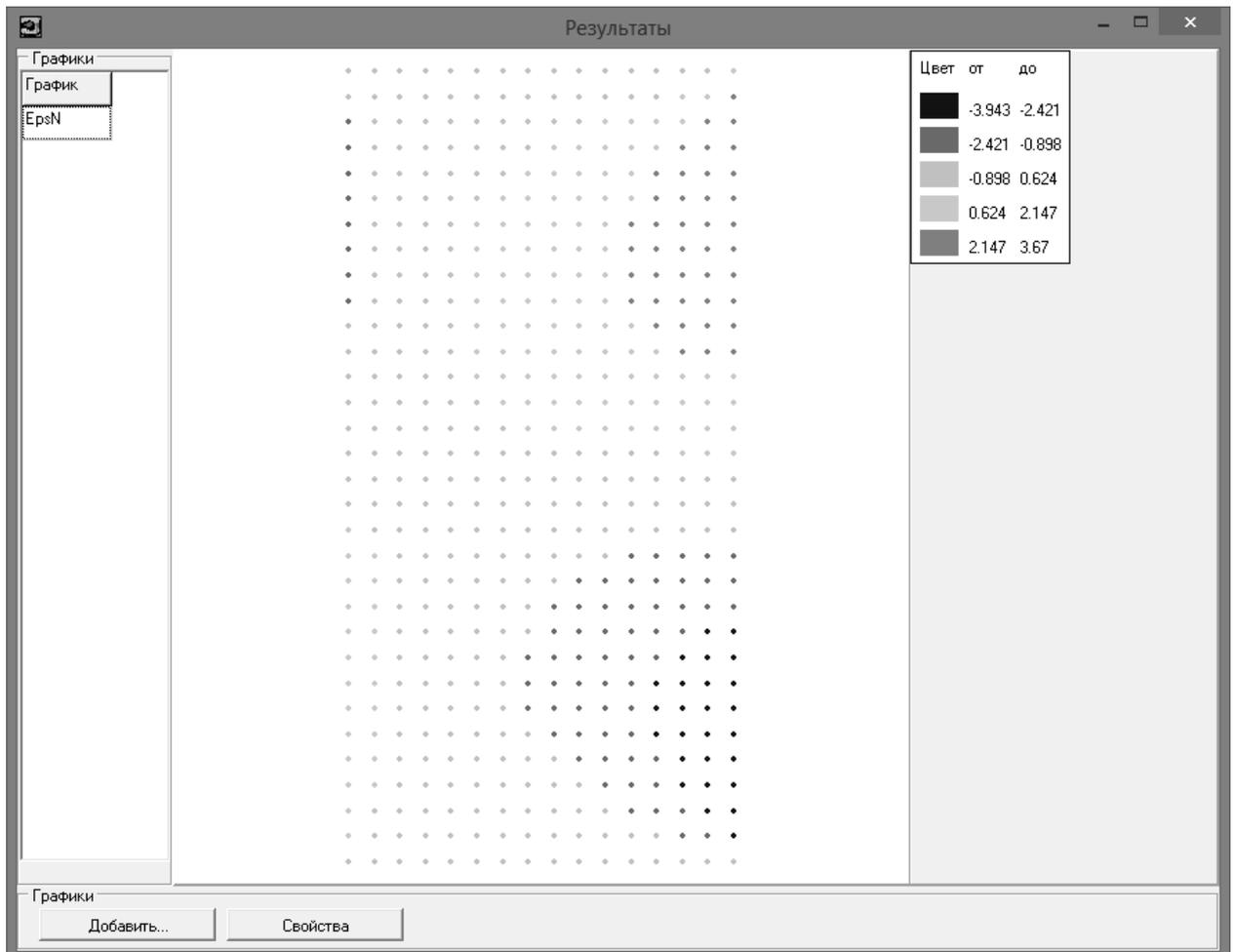


Рисунок 4.27 – Графическое представление результатов

4.2 Расчет толстостенной трубы под действием внутреннего давления

Для исследования сходимости численного решения сравним его с аналитическим решением, полученным для модельного примера. В качестве тестового примера рассмотрим задачу о толстостенной трубе под действием внутреннего давления (рисунок 4.28).

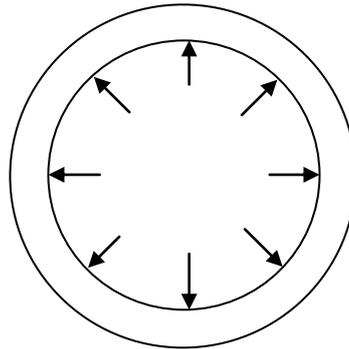


Рисунок 4.28 – Схема нагружения трубы

Обозначим a – внутренний радиус равный a м, b – внешний радиус трубы равный $1,2a$ м. Длина трубы l , может быть задана произвольно, но для численного расчета принято $l = a$ м. На внутреннюю стенку приложено нагрузка $q=1$ МПа, при этом торцы закреплены вдоль оси трубы. В дальнейшем рассматриваем задачу в безразмерных переменных, нормируя линейные размеры на a . Перемещения определяются по формуле:

$$U_r = \frac{rqa}{4\pi G(b^2 - a^2)} \left(1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (4.1)$$

где G – модуль сдвига равный 0.01 ГПа;

ν – коэффициент Пуассона (для несжимаемого материала равный 0.5);

r – радиальная координата.

По формуле (4.1) можно вычислить максимальные и минимальные перемещения, соответствующие минимальному и максимальному значениям радиуса: $U_{r_{\min}} = 0,021714$, $U_{r_{\max}} = 0,026056$.

Деформации будут определены по формуле:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (4.2)$$

Напряжения определим следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{qa}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta = \frac{qa}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z = \nu \frac{qa}{\pi(b^2 - a^2)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Проведем численные расчеты для тестовых моделей. Рассмотрим виды сеток, представленные в таблице 4.1:

Таблица 4.1 – Виды сеток

Номер	Разбиение на конечные элементы	Размер конечного элемента
1	1 по оси oZ 2 по оси oR	0,1 × 0,1
2	2 по оси oZ 4 по оси oR	0,05 × 0,05
3	4 по оси oZ 8 по оси oR	0,025 × 0,025
4	8 по оси oZ 16 по оси oR	0,0125 × 0,0125
5	16 по оси oZ 32 по оси oR	0,00625 × 0,00625

Построим зависимость значений минимальных (рисунок 4.29) и максимальных (рисунок 4.30) перемещений, от вида и размера конечных элементов из таблицы 4.1, и сравним с вычисленным аналитически значением. Для построения графиков будем использовать пределы решения задачи, регуляризованной при различных значениях коэффициента Пуассона,

а так же решение задачи о деформировании сжимаемой среды, с коэффициентами Пуассона близкими к 0,5.

Из рисунков 4.29 и 4.30 видно, что предложенный подход позволяет получить сеточную сходимость, при любом значении параметра регуляризации, при этом при значения этого параметра 0,35 и 0,45, даже на самой крупной сетки получены перемещения близкие к аналитически вычисленным. Решение задачи для сжимаемой среды, с $\nu = 0,49$ при сгущении сетки не позволяет выйти на аналитически полученное значение перемещений. Решение задачи для сжимаемой среды, с $\nu = 0,499$, при первых двух разбиениях, когда сетка более крупная, позволяет получить перемещения, значения которых отличаются от аналитических на 10-25%. Сгущение сетки позволяет выйти на полученные аналитически значения перемещений, но при этом размер конечного элемента должен быть меньше радиуса трубы примерно в 200 раз.

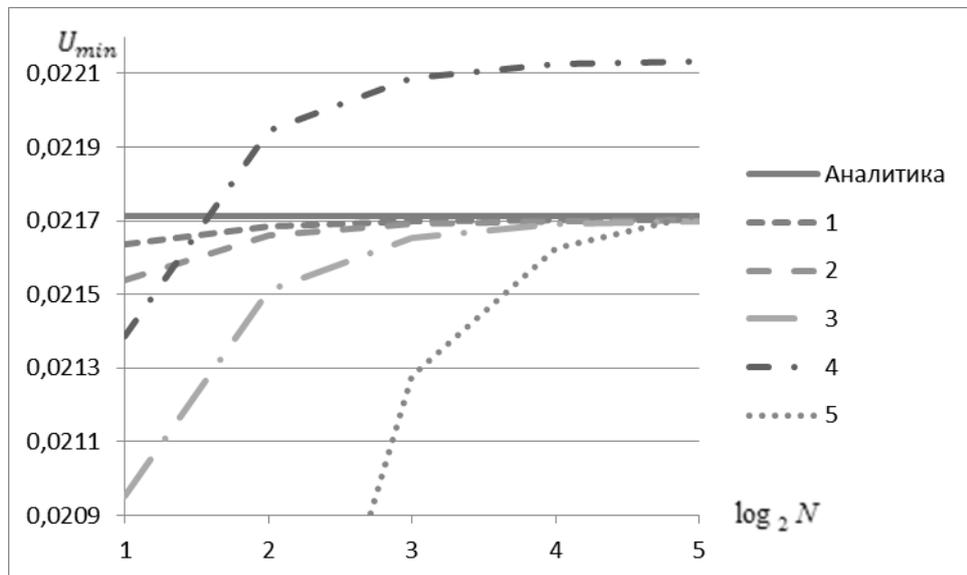


Рисунок 4.29 – Минимальные значения перемещений: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

Для сравнения вычисленных деформаций и напряжений будем использовать зависимость отношения деформаций и напряжений, полученных численно, к деформациям и напряжениям, вычисленным аналитически. Построим график только для ε_r (рисунок 4.31), так как $\varepsilon_z = 0$, а $\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r$.

На графике видно, что решение задачи для сжимаемой среды, с $\nu = 0,49$ имеет существенно большую погрешность для любого разбиения. Решение задачи для сжимаемой среды, с $\nu = 0,499$ при сгущении сетки позволяет значительно уменьшает погрешность, однако для $\log_2 N = 1$ она составляет 25%, а для $\log_2 N = 2$ – 9 %, что является неприемлемым. При использовании предложенного подхода, все значения параметра регуляризации позволяют получить приемлемую погрешность для любого разбиения сетки, при этом минимальная погрешность получается при использовании параметра регуляризации 0,35.

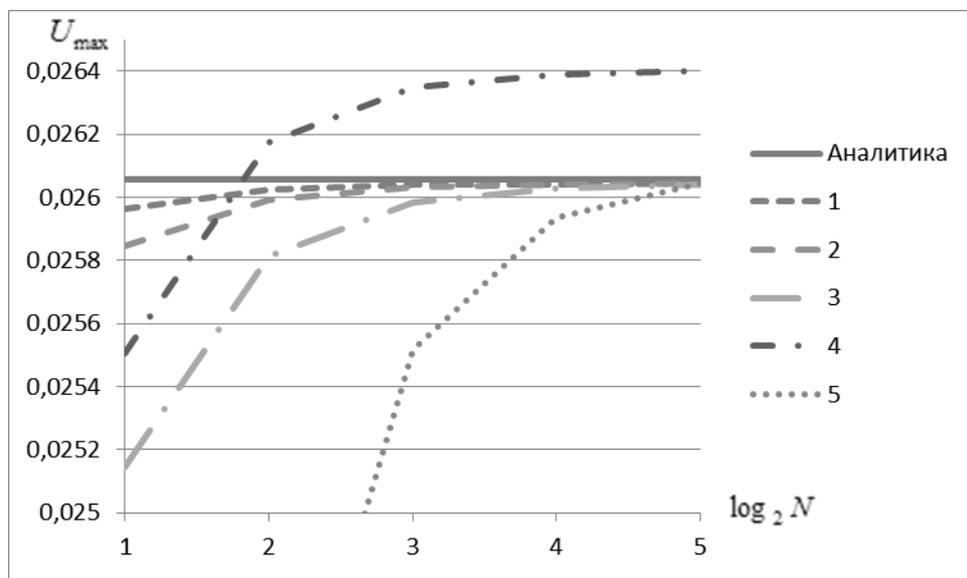


Рисунок 4.30 – Максимальные значения перемещений: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

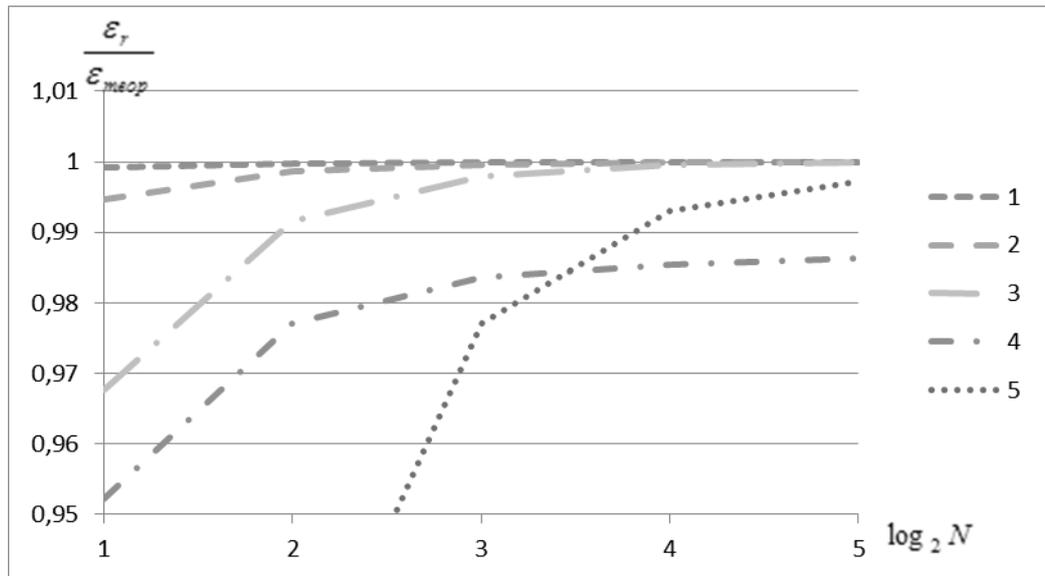


Рисунок 4.31 – Зависимость $\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{теор}}$ от $\log_2 N$: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

Построим графики зависимости $\frac{\sigma_r}{\sigma_{r теор}}$ (рисунок 4.32), $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{\theta теор}}$ (рисунок 4.33), $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z теор}}$ (рисунок 4.34) от $\log_2 N$.

Из графиков видно, что приемлемый уровень точности расчета напряжений для любой сетки достигается при параметре регуляризации соответствующим $\nu = 0,35$, $\nu = 0,45$. При параметре регуляризации соответствующим $\nu = 0,49$ решение становится неустойчивым и выходит на приемлемый уровень только при сгущении сетки. Похожие результаты получились при решении задачи для сжимаемой среды с $\nu = 0,49$, а с $\nu = 0,499$ приемлемые результаты были получены только на самой мелкой сетке.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что при использовании несжимаемых элементов решение устойчиво, предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$ имеет погрешность вычисленных

перемещений, напряжений и деформаций на любом виде сетки менее 0,5%. предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$ позволяет получить также устойчивое решение, однако необходимо сгущение сетки в два раза, чтобы получить такую же точность, как и при $\nu = 0,35$. Предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$ требует еще большего сгущения сетки. Использование математической модели деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона, близкими к 0,5, показало существенные отличия расчетных значений перемещений, деформаций и напряжений от теоретических.

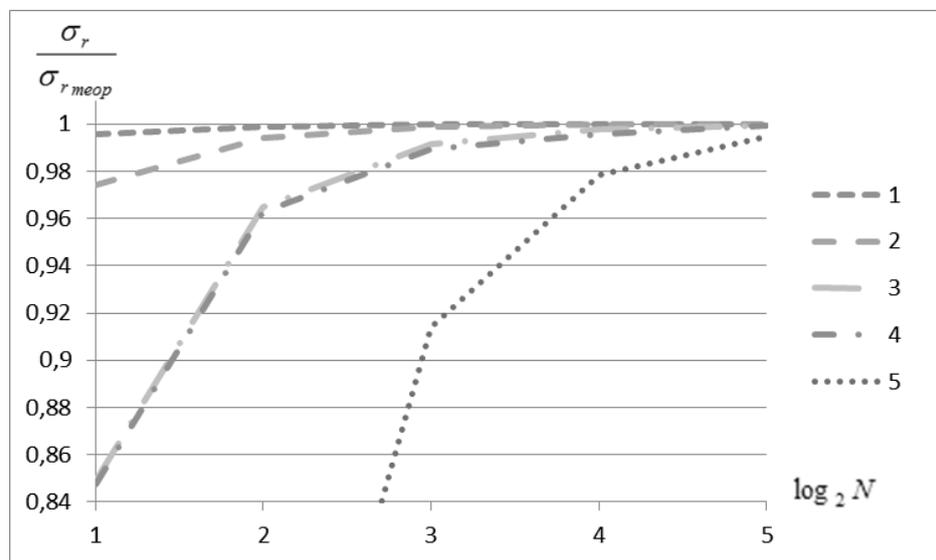


Рисунок 4.32 – Зависимость $\frac{\sigma_r}{\sigma_{r теор}}$ от $\log_2 N$: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

Стоит отметить, что в задачах расчета напряженно-деформированного состояния при работе со слабосжимаемыми материалами используют модель деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона близкими к 0,5. Однако проведенный эксперимент показал, что при использовании $\nu = 0,49$ значения перемещений отличаются от теоретических на 3-4%.

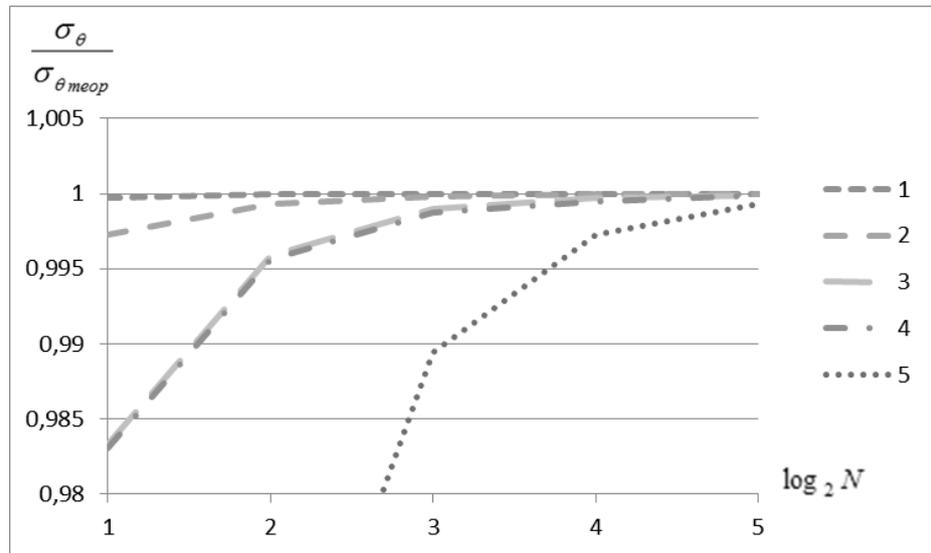


Рисунок 4.33 – Зависимость $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{\theta \text{ теор}}}$ от $\log_2 N$: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

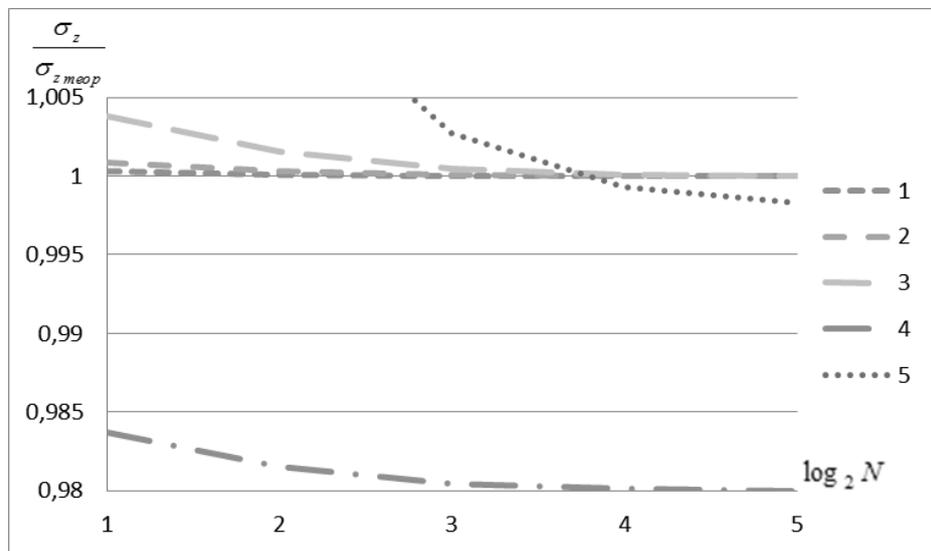


Рисунок 4.34 – Зависимость $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z \text{ теор}}}$ от $\log_2 N$: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,35$, 2 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,45$, 3 – предел решения задачи, регуляризованной при $\nu = 0,49$, 4 – решение задачи при $\nu = 0,49$, 5 – решение задачи при $\nu = 0,499$

При расчете деформаций сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 5% до 1.5%, а для напряжений с 15% до 2%. Если использовать $\nu = 0,499$, то отклонение перемещений от теоретических на 1 виде сетки составляет 26%. Использование сгущения сетки позволяет уменьшить эту погрешность до уровня менее 0,5%. При расчете деформаций и напряжений сгущение сетки позволило уменьшить погрешность с 15% до приемлемого уровня. Стоит отметить, что для этого элемента, при использовании сетки 1, значение σ_r имеет противоположный знак по отношению к аналитическому решению.

Таким образом при использовании математической модели деформирования сжимаемой среды с коэффициентами Пуассона близкими к 0,5, возникают следующие проблемы:

1. неизвестно насколько надо сгущать сетку, чтобы получить решение с приемлемой точностью;
2. при сильном сгущении сетки расчеты требуют большого количества времени, и мощностей компьютеров, при этом неизвестен необходимый объем оперативной памяти компьютера, требуемый для сгущения сетки в реальных задачах.

Этих недостатков можно избежать, если использовать предложенный подход с параметрами регуляризации соответствующими значению $\nu = 0,35$, $\nu = 0,45$.

4.3 Исследование сеточной сходимости задачи вязкого течения

Рассмотрим пример решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости по трубе. Движение жидкости происходит между двумя соосными цилиндрами (рисунок 4.35). Решение задачи осуществляется с помощью модели, представленной в главе 2.

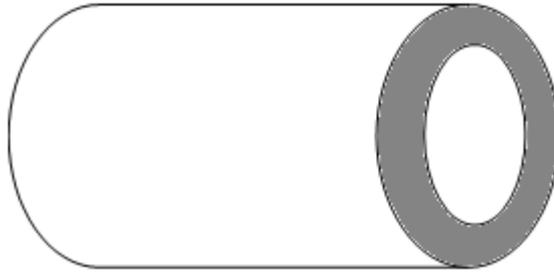


Рисунок 4.35 – Область исследования

В качестве объекта исследования рассматривается система вложенных цилиндров длиной 0,01 м. Радиус внутренней цилиндра 0,01 м, радиус внешнего цилиндра 0,012 м. Между двух вложенных труб происходит течение вязкой несжимаемой жидкости с объемной вязкостью $\lambda \rightarrow \infty$ и динамической вязкостью 18 Па·С.

На левой границе трубы приложена сила $F_1 = f H$, на правой границе скорость постоянна, а сила принимается последовательно значения, $F_2 = 0 H$, $F_2 = \frac{1}{2} f H$ и $F_2 = f H$. На стенках трубы (наружной и внутренней) выполняются условия прилипания. Расчет полей скоростей и напряжений реализован в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» [64] на основе математической модели, сформулированной в п. 2.2, и выполнен при различных размерах конечных элементов с последовательным удвоением сетки по каждой стороне. Сетки, применяемые при расчете, представлены в таблице 4.2, где N – число элементов по толщине исследуемой области. В качестве параметра регуляризации для отыскания решений задачи, использовалось значение $\nu = 0,35$.

Для анализа из каждого эксперимента были выбраны максимальные и минимальные нормальные и меридиональные значения скорости (таблица 4.3) и нормированные на величину f .

Как видно из таблицы 4.3 результаты, полученные для сетки первого вида, сильно отличаются от остальных, так как имеют слишком большой

размер конечного элемента, поэтому они были исключены из дальнейшего анализа.

Таблица 4.2 – Виды сеток

$\log_2 N$	Размер конечного элемента
1	0,001 м × 0,001 м
2	0,0005 м × 0,0005 м
3	0,00025 м × 0,00025 м
4	0,000125 м × 0,000125 м
5	0,0000625 м × 0,0000625 м
6	0,00003125 м × 0,00003125 м
7	0,000015625 м × 0,000015625 м

Таблица 4.3 – Максимальные и минимальные меридиональные и нормальные скорости, при силе, заданной на правой границе 0 Н

скорость, мм/с	$\log_2 N$						
	1	2	3	4	5	6	7
$v_{s \max}$	40,191	28,124	23,917	22,094	20,931	20,116	19,489
$v_{s \min}$	40,191	16,147	6,311	2,412	0,985	0,402	0,17
$v_{n \max}$	0	3,097	5,182	6,116	6,37	6,693	6,907
$v_{n \min}$	0	-2,652	-4,756	-5,937	-6,168	-6,545	-6,783

Исследуем сходимость решения задачи течения вязкой несжимаемой жидкости. Для этого построим зависимость значений скоростей от вида сетки (рисунки 4.36-4.39). Для $v_{s \max}$ найдем аналитическое решение. Для вязкой несжимаемой жидкости максимальную осевую скорость можно вычислить по формуле [67]:

$$v_{s \max} = \frac{r^2 \Delta p}{4\mu^* \Delta x} + C_1 \ln|r| + C_2, \quad (4.4)$$

где Δp - разница давлений на правой и левой границы,
 μ^* - коэффициент сдвиговой вязкости,
 Δx - длина канала, в котором происходит течение,
 C_1, C_2 - константы.

Определим константы из условия прилипания на верхней и нижней границе, т.е. $v_{s \max}(r_2) = 0$ и $v_{s \max}(r_1) = 0$. После нахождения C_1, C_2 уравнение (4.4) для определения значения максимальной скорости преобразуется к виду:

$$v_{s \max} = \frac{\Delta p}{4\mu^* \Delta x} \left(r^2 - r_1^2 - (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right), \quad (4.5)$$

Полученное значение нормируем на f и приведем на рисунке 4.36 для сравнения с численным расчетом. По горизонтальной оси отложен $\log_2 N$, где N – число элементов по толщине области разбиения. При сгущении сетки можно увидеть, что результат сходится к аналитическому.

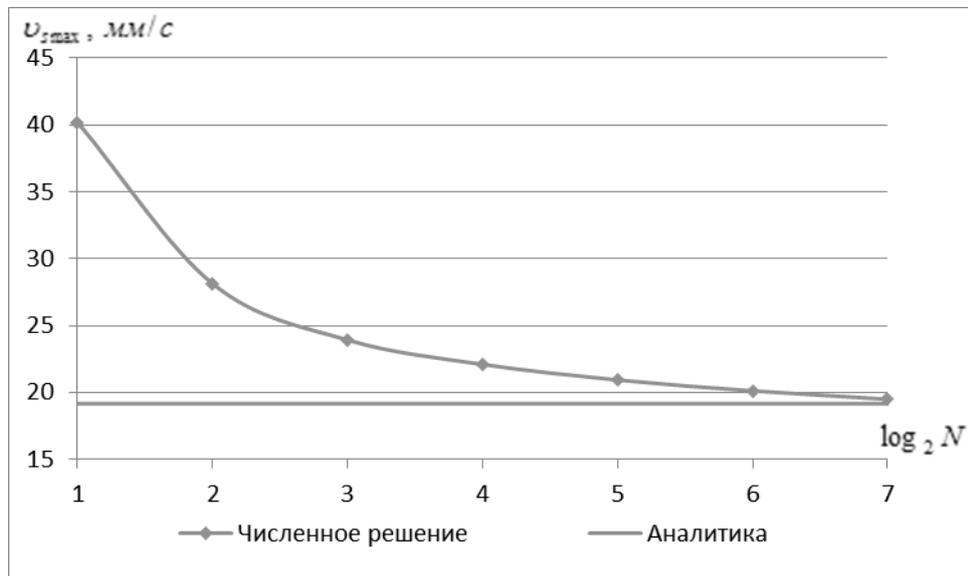


Рисунок 4.36 – Зависимость $v_{s \max}$ от $\log_2 N$

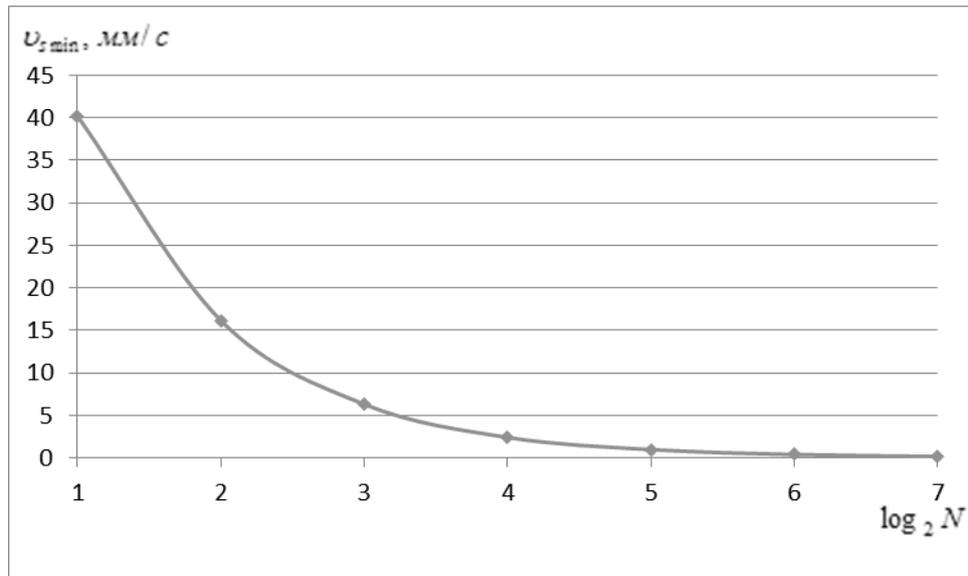


Рисунок 4.37 – Зависимость $v_{s,min}$ от $\log_2 N$

Как видно из представленных графиков, при сгущении сетки во всех четырех случаях значение скоростей стремится к предельному значению. Для получения этих предельных значений были построены графики зависимости скоростей от длины стороны конечного элемента и найдена аппроксимирующая функция (рисунки 4.40-4.43). Значения скоростей на первых двух видах сетки не использовались для построения аппроксимации, так как они значительно отличаются от других по величине.

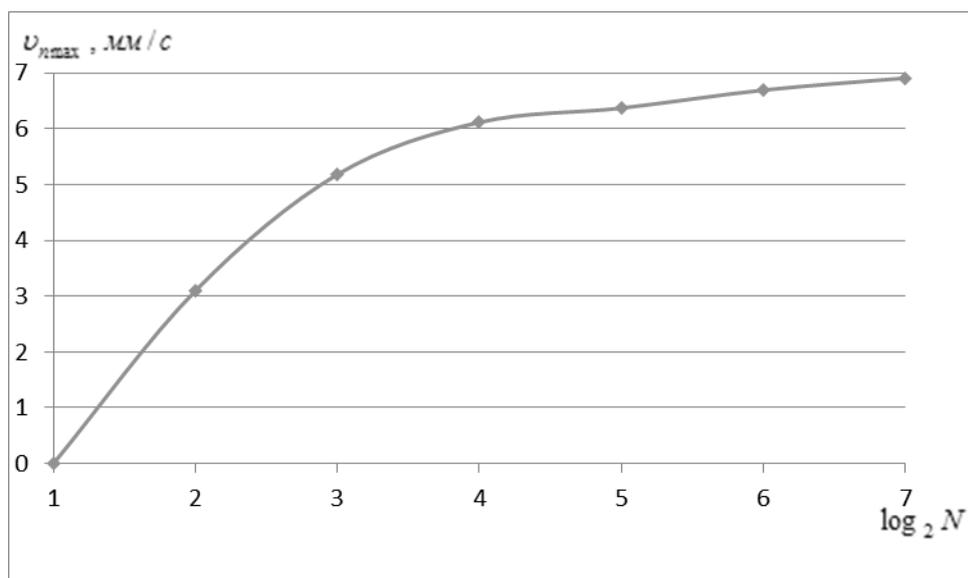
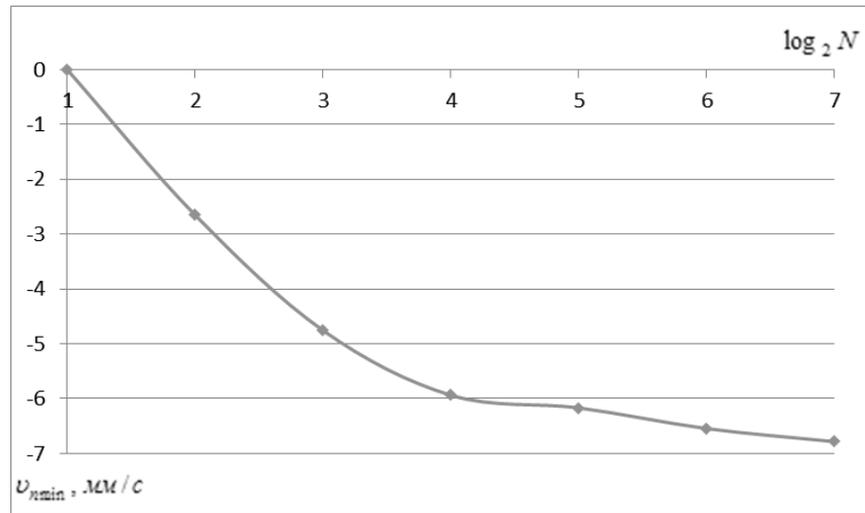
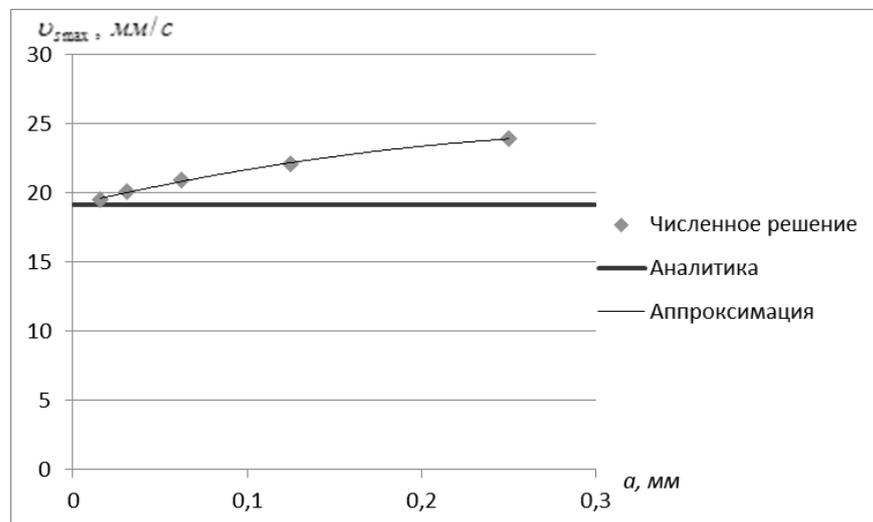
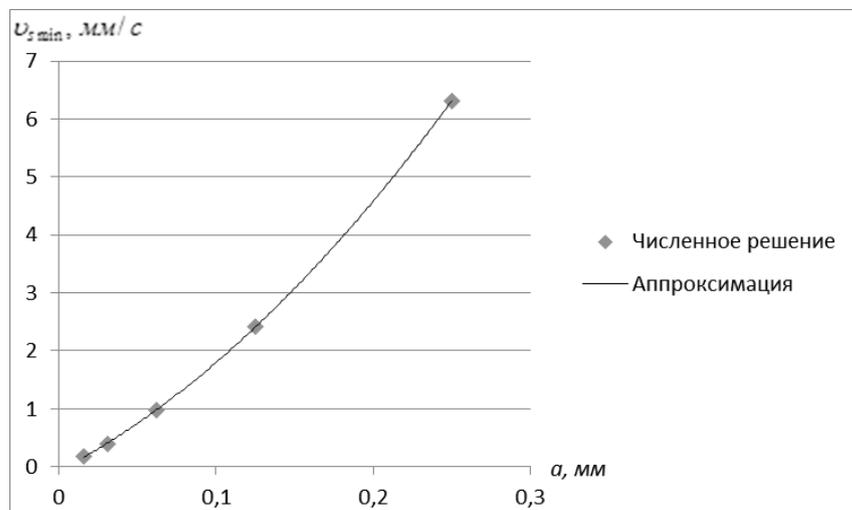


Рисунок 4.38 – Зависимость $v_{n,max}$ от $\log_2 N$

Рисунок 4.39 – Зависимость v_{nmin} от $\log_2 N$ Рисунок 4.40 – Зависимость v_{smax} от стороны конечного элемента a Рисунок 4.41 – Зависимость v_{smin} от стороны конечного элемента a

Как видно из рисунков 4.40-4.43 при уменьшении размеров конечного элемента максимальные и минимальные величины скоростей стремятся к предельному значению. Были построены аппроксимирующие функции для каждого из видов скоростей и получена оценка погрешности по правилу Рунге:

$$\Delta v \leq Ca^p, \quad (4.6)$$

где p – порядок сходимости,

a – длина стороны элемента,

C – неизвестная постоянная,

Δv - погрешность определения скорости. $v_{n\min}$, мм/с

Т.к. при расчете использовались четырехузловые конечные элементы с билинейной аппроксимацией скоростей, порядок сходимости решения равен 2. В связи с этим, приближённо приняв множитель C постоянным, аппроксимируем функцию $v(a)$ полиномом второго порядка.

Для зависимости, показанной на рисунке 4.40, была получена следующая аппроксимирующая функция:

$$v_{s\max}(a) = -41,758a^2 + 29,439a + 19,153, \quad (4.7)$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9969$. С ее помощью было рассчитано предельное значение максимальной меридиональной скорости при $a=0$, получившееся равным $v_{s\max}(0) = 19,153$ мм/с. Также на графике отмечено аналитическое значение. Сравнивая предельное значение со значением, полученным аналитически, определим, что погрешность вычислений составляет менее 0,1 %, а значит можно сделать вывод, что предельное значение скорости достигает аналитического.

Аналогично, проведем анализ для зависимости, показанной на рисунке 4.41. Аппроксимирующая функция будет иметь вид:

$$v_{s\min}(a) = 45,621a^2 + 14,134a - 0,0728, \quad (4.8)$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9998$. Предельное значение минимальной меридиональной скорости при $a=0$ равно $v_{s\min}(0) = -0,0728$ мм/с.

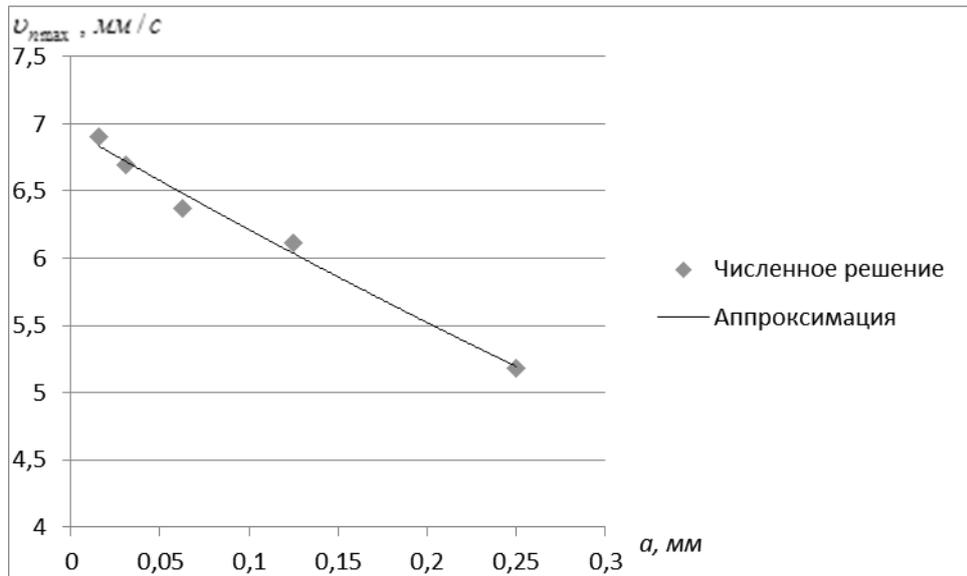


Рисунок 4.42 – Зависимость v_{nmax} от стороны конечного элемента a

Для рисунка 4.42 аппроксимирующая функция примет вид:

$$v_{nmax}(a) = 2,4625a^2 - 7,6524a + 6,9539, \quad (4.9)$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9858$. Предельное значение максимальной нормальной скорости при $a=0$ равно $v_{nmax}(0) = 6,9539$ мм/с.

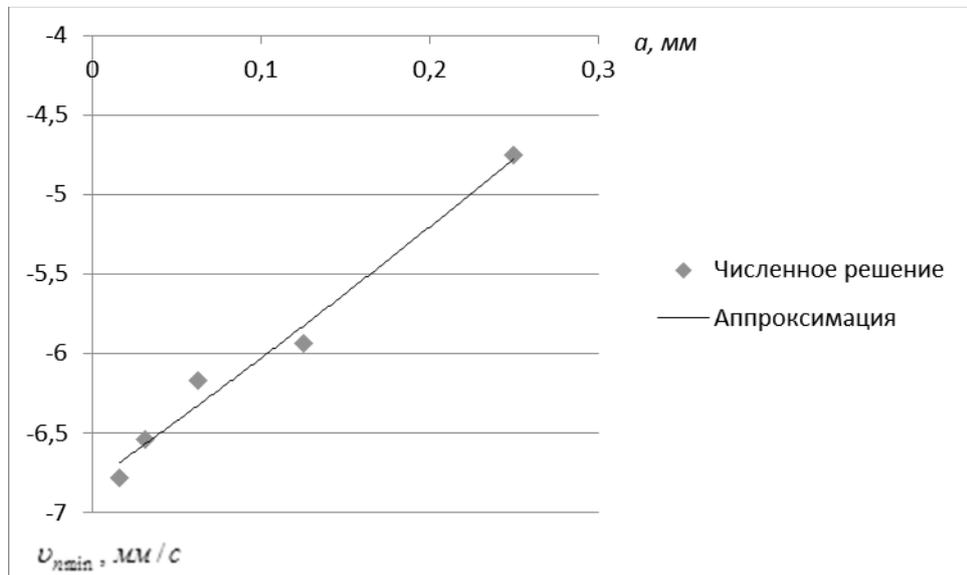


Рисунок 4.43 – Зависимость v_{nmin} от стороны конечного элемента a

Для рисунка 4.43 аппроксимирующая функция:

$$v_{nmin}(a) = 2,3913a^2 + 7,5425a - 6,8083, \quad (4.10)$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9811$. Предельное значение минимальной нормальной скорости при $a=0$ равно $v_{n\min}(0) = -6,8083$.

Для силы, приложенной на правой границе в $\frac{1}{2}fH$ были также получены значения максимальных и минимальных скоростей (таблица 4.4).

Таблица 4.4 – Максимальные и минимальные нормальные и меридиональные скорости при силе, заданной на правой границе в $\frac{1}{2}fH$

скорость, мм/с	$\log_2 N$						
	1	2	3	4	5	6	7
$v_{s\max}$	60,285	42,166	35,254	32,661	30,894	29,662	28,709
$v_{s\min}$	60,285	26,403	10,724	4,528	1,958	0,853	0,382
$v_{n\max}$	0	4,224	7,774	9,173	9,553	10,038	10,359
$v_{n\min}$	0	-3,983	-7,132	-8,904	-9,251	-9,816	-10,173

Для этой величины силы были проведены аналогичные расчеты аппроксимирующих функций и предельных значений скоростей, результаты представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Аппроксимирующие функции и предельные значения скоростей при силе, заданной на правой границе в $\frac{1}{2}fH$

Скорости	Аппроксимирующие функции	Предельные значения, мм/с
$v_{s\max}$	$v_{s\max}(a) = -68,851a^2 + 45,416a + 28,183$	$v_{s\max}(0) = 28,183$
$v_{s\min}$	$v_{s\min}(a) = 50,423a^2 + 30,869a - 0,141$	$v_{s\min}(0) = -0,141$
$v_{n\max}$	$v_{n\max}(a) = 3,7566a^2 - 11,484a + 10,429$	$v_{n\max}(0) = 10,429$
$v_{n\min}$	$v_{n\min}(a) = 3,6154a^2 + 11,309a - 10,211$	$v_{n\min}(0) = -10,211$

Результаты, полученные для силы, приложенной на правой границе в fH , представлены в таблице 4.6. Были также проведены расчеты

аппроксимирующих функций и предельных значений скоростей результаты представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.6 – Максимальные и минимальные нормальные и меридиональные скорости, при силе, заданной на правой границе в fH

скорость, мм/с	$\log_2 N$						
	1	2	3	4	5	6	7
$v_{s \max}$	80,381	56,208	46,995	43,244	40,929	39,313	38,037
$v_{s \min}$	80,381	36,205	15,138	6,644	2,899	1,293	0,592
$v_{n \max}$	0	5,629	10,365	12,23	12,736	13,383	13,811
$v_{n \min}$	0	-5,314	-9,508	-11,871	-12,334	-13,087	-13,564

Таблица 4.7 – Аппроксимирующие функции и предельные значения скоростей при силе, заданной на правой границе в fH

Скорости	Аппроксимирующие функции	Предельные значения, мм/с
$v_{s \max}$	$v_{s \max}(a) = -79,913a^2 + 58,287a + 37,388$	$v_{s \max}(0) = 37,388$
$v_{s \min}$	$v_{s \min}(a) = 55,81a^2 + 47,5506a - 0,2182$	$v_{s \min}(0) = -0,2182$
$v_{n \max}$	$v_{n \max}(a) = 5,0183a^2 - 15,311a + 13,905$	$v_{n \max}(0) = 13,905$
$v_{n \min}$	$v_{n \min}(a) = 4,8007a^2 - 15,087a - 13,614$	$v_{n \min}(0) = -13,614$

Анализ полученных результатов показывает, что для всех проведённых расчетов при уменьшении конечного элемента скорость стремится к предельному значению, величина которого равна свободному члену аппроксимирующей функции.

При сравнении результатов решения задачи с отсутствием приложенной силы на правой границе и задач с приложенной силой, равной, соответственно, $\frac{1}{2}fH$ и fH можно сделать вывод, что зависимость скорости течения жидкости пропорционально приложенной силе на правой границе.

Полученное численное решение сходится к конечному предельному значению и чувствительно к вариации силы на левой и правой границе. Поэтому представляется возможным его использование для расчёта полей напряжений в формуемом материале при непрерывной пултрузии [46].

4.4 Моделирование вязкого течения в фильтре при пултрузии

В рамках постановки задачи, изложенной в параграфе 4.3, и используя разработанный комплекс программ, есть возможность построить поля скоростей, напряжений и скоростей деформаций формуемого материала. Остановимся более подробно на полях напряжений. Рассмотрим поля меридиональных (рисунок 4.44), нормальных (рисунок 4.45), окружных (рисунок 4.46) и касательных (рисунок 4.47) напряжений. При получении данных на левой границе была задана сила в $2fH$, на правой - $2fH$. На рисунке 4.44 виден определенный фронт, на котором знак напряжения меняется с отрицательного на положительный. Эта зона опасна возможностью образования каверн, что неизбежно ухудшает качество формуемого изделия. На рисунках 4.45 и 4.46 видна аналогичная область.

Далее будем рассматривать графики только меридионального напряжения. Рассмотрим зависимость области положительных напряжений от приложенной силы к правой границе, при этом на левой границе сила равна $2fH$ во всех испытаниях. Приведем поля напряжений вязкой несжимаемой жидкости при заданной на правой границе силе, равной последовательно $0H$ (рисунок 4.48), fH (рисунок 4.49) и $3fH$ (рисунок 4.50).

На рисунке 4.44 виден определенный фронт, на котором знак напряжения меняется с отрицательного на положительный. Эта зона опасна возможностью образования каверн, что неизбежно ухудшает качество формуемого изделия. На рисунках 4.45 и 4.46 видна аналогичная область.

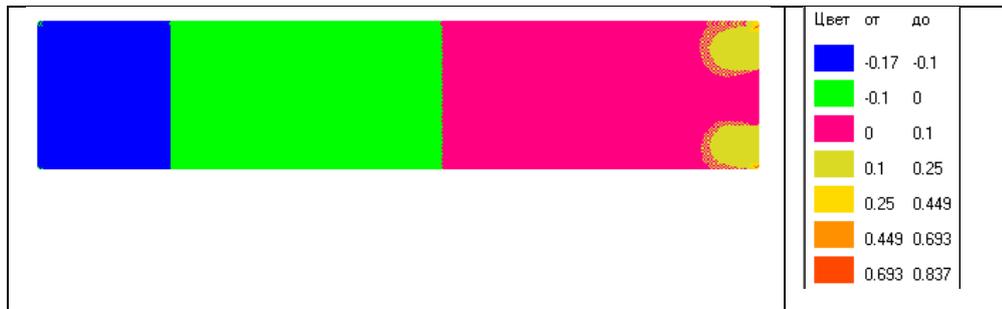


Рисунок 4.44 – Поле меридиональных напряжений

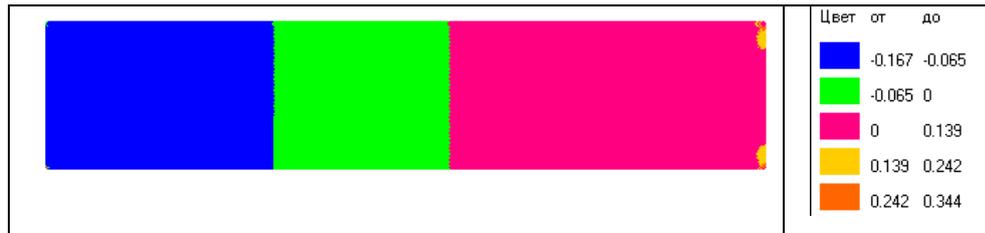


Рисунок 4.45 – Поле нормальных напряжений

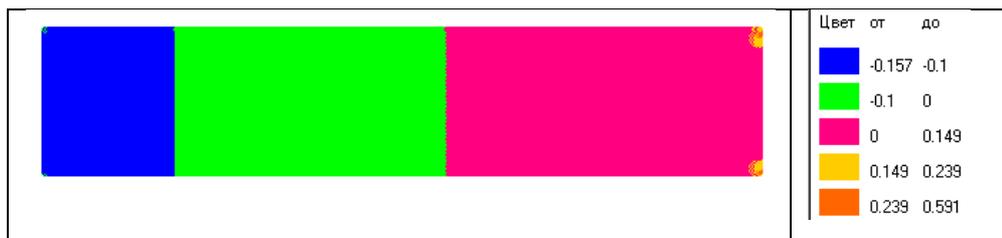


Рисунок 4.46 – Поле окружных напряжений

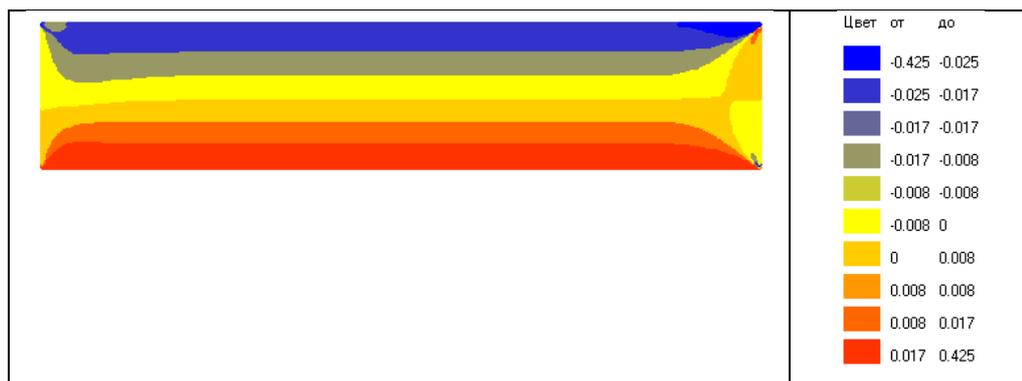


Рисунок 4.47 – Поле касательных напряжений

Далее будем рассматривать графики только меридионального напряжения. Рассмотрим зависимость области положительных напряжений от приложенной силы к правой границе, при этом на левой границе сила равна $2fH$ во всех испытаниях. Приведем поля напряжений вязкой

несжимаемой жидкости при заданной на правой границе силе, равной последовательно 0 Н (рисунок 4.48), $f \text{ Н}$ (рисунок 4.49) и $3f \text{ Н}$ (рисунок 4.50).

Дальнейший анализ позволил показать, что управление силами, приложенными на левой и правой границах, позволяет снизить растягивающие напряжения. Предложенная математическая модель позволяет определить для заданной скорости пултрзии определить давление на входе в канал, обеспечивающее отсутствие кавитационных зон.



Рисунок 4.48 – Поле меридиональных напряжений при $F=0 \text{ Н}$

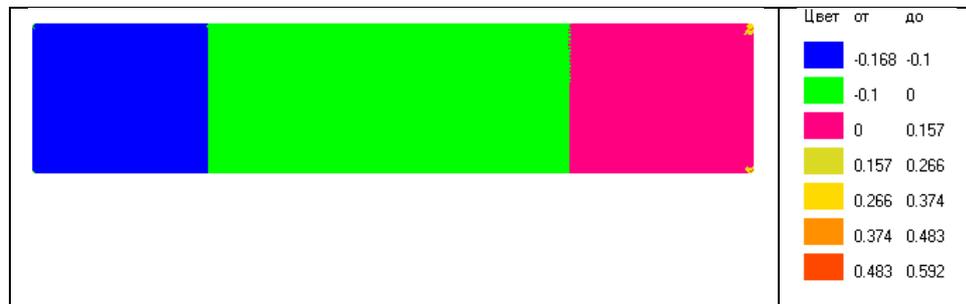


Рисунок 4.49 – Поле меридиональных напряжений при $F=f \text{ Н}$



Рисунок 4.50 – Поле меридиональных напряжений при $F=3f \text{ Н}$

4.5 Напряженно-деформированное состояние слоистого сферического шарнира из композитных материалов

Методика была применена при оценке прочности опор, содержащих слои из объемно-несжимаемого эластомера. Рассчитывался опытный образец шарнира, выполненный как многослойный пакет в форме сферического сегмента, содержащий чередующиеся упругие слои из жесткого материала (тарели) и слои эластомера. Слоистый пакет находится между двумя жесткими сферическими основаниями (рисунок 4.51), одно из которых закреплено неподвижно, а второе нагружается осевой силой, вертикальной поперечной силой и моментом, действующим в вертикальной плоскости.

Тарели и слои эластомера имеют форму концентрических сферических сегментов. Тарели обладают упругой симметрией, такой, что модули упругости в направлении меридиана и в направлении касательной к окружности неизменны в окружном направлении. Эластомер имеет модуль упругости 0,2999 МПа и коэффициент Пуассона 0,4995.

Рассчитывался опытный образец шарнира из 11 углепластиковых тарелей и 4 тарелей из стали с пределом текучести 1200 МПа, а также двух опорных колец из титанового сплава с пределом прочности 1050 МПа. Толщина тарелей составляла 2 мм.

Расчет напряженно-деформированного состояния указанной модели по методике, описанной выше. Величина сжимающей силы принята равной предельной осевой силе, при которой произошло разрушение в натурном эксперименте, проведенном в НПО «Искра».

Модули упругости углепластика в меридиональном, окружном и нормальном направлении приведены в таблице 4.8. Предел прочности на сжатие в окружном направлении 350 МПа. Расчет проводился при параметре регуляризации для эластомера, соответствующему коэффициенту Пуассона равной 0,35.

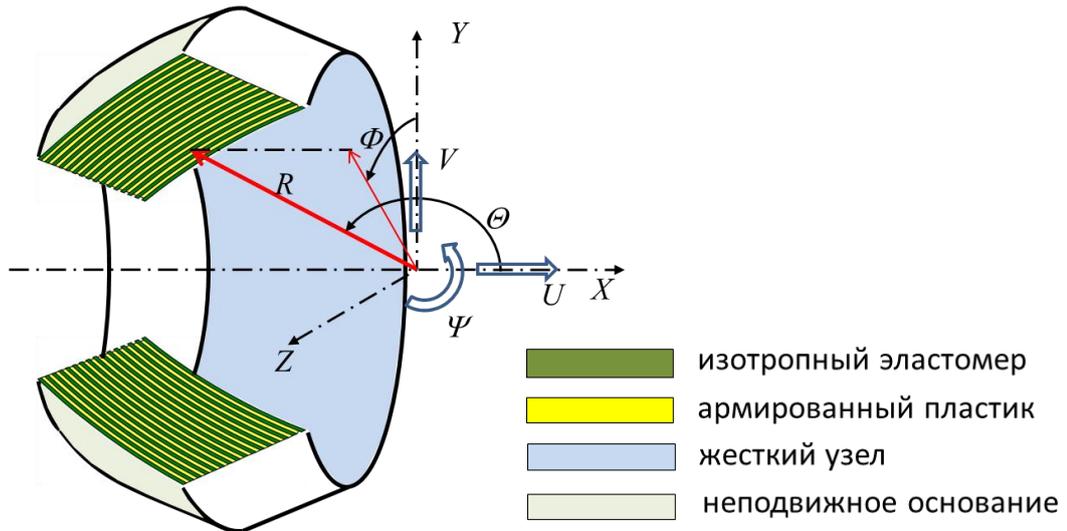


Рисунок 4.51 – Схема объекта расчета

Таблица 4.8 – Физические характеристики углепластика

i	1	2	3
E_i , МПа	69160	14000	63810
G_i , МПа	4500	4500	7020
ν_i	0,32	0,25	0,25

Распределение напряжений в тарелях из углепластика приведено на рисунке 4.52.

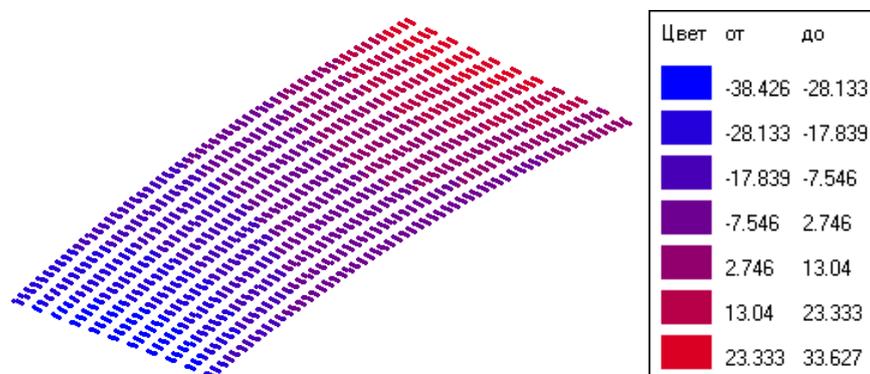


Рисунок 4.52 – Распределение напряжений в тарелях из углепластика

Максимальные сжимающие напряжения оказались равными 384 МПа, что на 9,7% отличается от предела прочности материала.

Итоговый характер разрушения тарелей представлен на рисунке 4.53.

Характер повреждений соответствует разрушению от действия сжимающих напряжений в окружном направлении. Тарели из стали оказались не разрушенными, что также соответствует уровню рассчитанных напряжений в них.

Таким образом, максимальные сжимающие напряжения согласуются с экспериментальными данными, в соответствии с которыми в эксперименте достигнут предел прочности на сжатие.

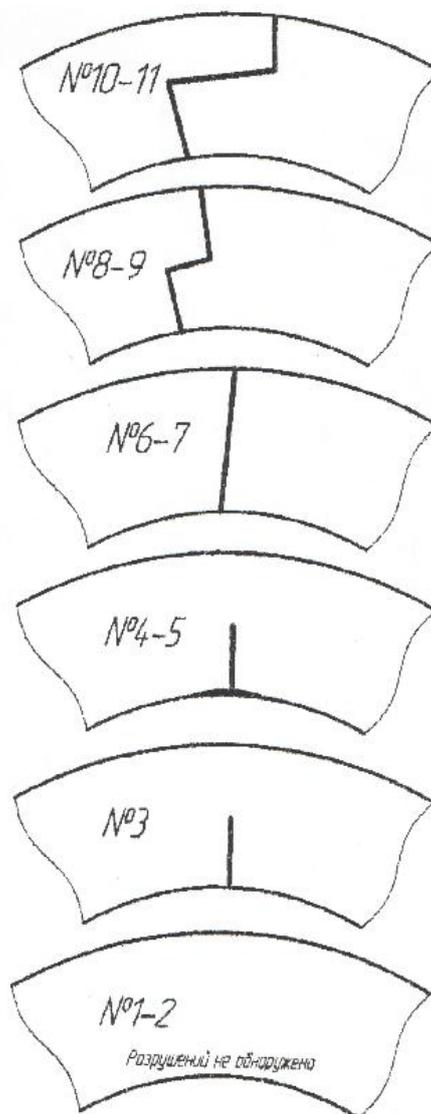


Рисунок 4.53 – Характер разрушения углепластиковых тарелей

4.6 Выводы по главе

1. Программная реализация алгоритма решения задачи статического деформирования и вязкого течения слоистой среды с объемно-несжимаемыми слоями выполнена в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» с использованием объектно-ориентированных программных средств конечно-элементного моделирования.

2. Показана сходимость численного решения задачи статического деформирования осесимметричной слоистой конструкции с объемно-несжимаемыми слоями при сгущении сетки к точному решению, полученному аналитически.

3. Показана сходимость численного решения задачи вязкого течения слоистой жидкости с объемно-несжимаемыми слоями при сгущении сетки к предельному значению.

4. Предлагаемая математическая модель позволяет определить параметры процесса пултрузии, для получения качественной продукции при меньших временных затратах.

5. Достоверность получаемых результатов подтверждена сопоставлением расчётной оценки напряжений в слоистой осесимметричной конструкции, содержащей упругие слои и слои несжимаемого эластомера, с данными натуральных разрушающих испытаний при осевом сжатии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена актуальная научно-практическая задача математического моделирования статического деформирования и вязкого течения слоистой среды со сжимаемыми и объемно-несжимаемыми слоями и получены следующие выводы.

1. Развита метод регуляризации некорректной по А.Н. Тихонову задачи о деформировании объемно-несжимаемой среды, в котором явно вычисляется предел решения регуляризованной задачи.

2. Построена математическая модель статического деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, с использованием развитого метода регуляризации.

3. Построена математическая модель стационарного вязкого течения осесимметричной слоистой среды, содержащей ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью, с использованием развитого метода регуляризации.

4. Построена система базисных аппроксимирующих функций с использованием теории функции комплексного переменного и условия Коши-Римана, отвечающих условию отсутствия дивергенции.

5. Исследована сходимость и оценена погрешность численного решения задачи на примере расчета напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из несжимаемого материала под действием внутреннего давления.

6. Исследована чувствительность численного решения к изменению начального значения коэффициента Пуассона и размеров конечных элементов. Показано, что при одном и том же числе итераций и при последовательном сгущении сетки решение быстрее сходится к аналитическому при выборе начального коэффициента Пуассона в диапазоне 0,3-0,35, чем при значениях, близких к 0,5.

7. Найдена оценка асимптотической скорости сходимости численного решения задачи определения скоростей при течении среды с бесконечно большой объемной вязкостью между двумя соосными цилиндрами.

8. Разработано программное обеспечение, позволяющее вычислять как перемещения, напряжения и деформации упругих осесимметричных опор, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, так и скорости, напряжения и скорости деформации, вязкого течения среды, содержащей ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью, в процессе непрерывной пултрузии.

9. Достоверность результатов подтверждена сопоставлением теоретической оценки напряжений в слоистой осесимметричной конструкции, содержащей упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, с данными натурных разрушающих испытаний при осевом сжатии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров, В. М.** Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости [Текст] / В. М. Александров, Н. Х. Арутюнян // ПММ, 1978. - Т.42, вып. 3. - С. 475 -485.
2. **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками [Текст] / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – Москва : Наука, 1983. - 488 с.
3. **Александров, В. М.** Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах [Текст] / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболев. - Москва: Наука, 1993. - 224 с.
4. **Амбарцумян, С. А.** Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С.А. Амбарцумян.– Москва : Наука, 1974. – 446 с.
5. **Амбарцумян, С. А.** Теория анизотропных оболочек [Текст] / С.А. Амбарцумян. – Москва : ГИФМЛ, 1961. – 384 с.
6. **Амбарцумян, С. А.** Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания [Текст] / С. А. Амбарцумян. – Москва : Наука, 1987. – 360 с.
7. **Андреев, А. Н.** Многослойные изотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288с.
8. **Андреев, А. Н.** К теории изгиба и колебаний упругих многослойных анизотропных пластин [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. – Горький, 1977. – Вып. 7. – С. 29 – 34.
9. **Андреев, А. Н.** К теории упругих многослойных анизотропных оболочек [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. - № 5. – С. 87 – 96.

10. **Андреев, А. Н.** Об одном варианте теории упругих многослойных анизотропных пластин [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 55 – 62.

11. **Андреев, А. Н.** Устойчивость упругих многослойных армированных оболочек [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский // Механика композит. материалов. – 1979. - № 1. – С. 86 – 95.

12. **Андреев, А. Н.** Фундаментальное решение неклассических дифференциальных уравнений изгиба трансверсально изотропной пластины [Текст] / А. Н. Андреев // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIII Межреспубликанской конф., Новосибирск, 22-24 июня 1993 г. – Новосибирск, 1995. – С. 13 – 19.

13. **Аптуков, В. Н.** Взаимодействие ударника с преградой как игровая ситуация [Текст] / В. Н. Аптуков // Аннот. докл. 5-го Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата, 1981. - С. 29.

14. **Аптуков, В. Н.** Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали [Текст] / В. Н. Аптуков, Г. И. Петрухин, А. А. Поздеев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985. - №1. - С. 165-170.

15. **Аптуков, В. Н.** Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине [Текст] / Аптуков В. Н. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985. - №3. - С. 149-152.

16. **Аптуков, В. Н.** Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника [Текст] / В. Н. Аптуков, В. Л. Белоусов, М. А. Каниболотский // Механика композит. материалов, 1986. - №2. - С. 252-257.

17. **Аптуков, В. Н.** Принцип максимума Понтрягина в задачах о динамическом взаимодействии твердых тел [Текст] / В. Н. Аптуков, Г. И. Петрухин // Численное моделирование и оптимизация процессов импульсного деформирования твердых тел, Свердловск, 1983. - С. 3-19.

18. **Аптуков, В. Н.** Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций [Текст] / В. Н. Аптуков, А. А. Поздеев // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1982. - №1. - С. 47-55.

19. **Аульченко, С. М.** Моделирование ламинарного течения вязкой сжимаемой жидкости при малых скоростях / С. М. Аульченко, Е. И. Васильева, В. О. Каледин // Вестник Кемеровского государственного университета, Кемерово, 2013. - № 2-1 (54). - С. 170-173.

20. **Бабе, Г. Д.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров [Текст] / Г. Д. Бабе, Е. Л. Гусев, Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. – 216 с.

21. **Бабешко, В.А.** Вибрация штампа на двухслойном основании [Текст] / В. А. Бабешко, И. И. Ворович, М. Г. Селезнев // ПММ, 1977. – Т.41, вып. 1. - С. 166-173.

22. **Бабешко, В. А.** Динамика неоднородных линейно упругих сред [Текст] / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. – Москва : Наука, 1989. — 334 с.

23. **Бабешко, В. А.** Изучение высокочастотного резонанса в полуограниченных средах с неоднородностями [Текст] / В. А. Бабешко, И. И. Ворович, И. Ф. Образцов // МТТ, 1990. - №6. - С. 74-83.

24. **Бабешко, В. А.** Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах [Текст] / В. А. Бабешко, О. Д. Пряхина // ПММ, 1978. – Т. 44, вып. 3. -С. 477-484.

25. **Бабешко, В. А.** Способ определения параметров смещения упругой среды при гармоническом воздействии [Текст] / В. А. Бабешко, М. Г. Селезнев, А. С. Шагинян. – Москва : Недра, Прикладная геофизика, 1983. - вып. 106. - С. 32-39.

26. **Бабич, С. Ю.** Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки [Текст] / С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухое, А. Н. Гузь // Прикладная механика, 2008, Т 44, вып. 3. - С.36-54.

27. **Баландин, М. Ю.** Методы решения СЛАУ большой размерности [Текст] / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина // Новосибирск: Издательство НГТУ, 2000. – 70 с.

28. **Баничук, Н. В.** Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов [Текст] / Н. В. Баничук, В. В. Кобелев, Р. Б. Рикардс. – Москва : Машиностроение, 1988. – 224 с.

29. **Бате, К.-Ю.** Методы конечных элементов / К.-Ю. Бате. - Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2010. - 1024 с.

30. **Белоконь, А. В.** Волны в трехмерном слое, подкреплены тонкой пластиной [Текст] / А. В. Белоконь, О. А. Белоконь, А. И. Болгова // Вестник Самарского Государственного Университета, 2007, №6. - С.30-42.

31. **Белоконь, А. В.** Гармонические колебания в системе: анизотропные полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред [Текст] / А. В. Белоконь, М. Ю. Ремизов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2002, № 3. - С. 120-121.

32. **Белоконь, А. В.** О некоторых закономерностях образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке [Текст] / А. В. Белоконь, И. И. Ворович // Механика и научно-технический прогресс, 1988, Т. 3. - С. 215-222.

33. **Белоконь, А. В.** Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками [Текст] / А. В. Белоконь, А. В. Наседкин //Акуст. ж., 1993, Т. 39. - №3. - С. 421-427.

34. **Бидерман, В. Л.** Расчет цилиндрических и прямоугольных длинных резиновых амортизаторов сжатия [Текст] / В. Л. Бидерман, Н. А. Сухова // Расчеты на прочность.– 1968.– №13.– С. 55-72.

35. **Блазнов, А. Н.** Методы механических испытаний композиционных стержней: монография / А. Н. Блазнов [и др.]. - Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. Ун-та, 2011. - 314 с.

36. **Боголепов, И. И.** Звукоизоляция на судах [Текст] / И. И. Боголепов, Э. И. Афренюк. – Ленинград : Судостроение, 1970. – 192 с.

37. **Боголепов, В. А.** Условия максимального демпфирования колебаний механических систем [Текст] / В. А. Боголепов, В. М. Чернышев // Изв. вузов. Машиностроение, 1977. - №1. - С. 28-31.

38. **Богомолов, С. И.** Оптимизация механических систем в резонансных режимах [Текст] / С. И. Богомолов, Э. А. Симеон, Харьков : Изд-во ХГУ, 1983. Высш. шк., 1982. – 153 с.

39. **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций [Текст] / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – Москва : Машиностроение, 1980. – 375 с.

40. **Болотин, В. В.** Прочность, устойчивость и колебание многослойных пластин [Текст] / В. В. Болотин // Расчеты на прочность. – Москва : Машиностроение, 1965. – Вып. 11. – С. 31 – 63.

41. **Василенко, А. Т.** Решение на основе моделей различного уровня задач и анализ напряженного состояния анизотропных неоднородных оболочек [Текст] / А. Т. Василенко, Я. М. Григоренко // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 10. – С. 77 – 86.

42. **Васильев, В. В.** Механика конструкций из композиционных материалов [Текст] / В. В. Васильев – Москва : Машиностроение, 1988. – 272 с.

43. **Ватульян, А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А. О. Ватульян. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 223 с.

44. **Водяков, В. Н.** Выбор определяющих уравнений в конечно-элементной модели тонкослойных эластомерно-металлических конструкций [Текст] / В. Н. Водяков // Каучук и резина. – 3. – 1997. – С. 35-40.

45. **Витт, Д. В.** Колебание сферической оболочки с вибродемпфирующим слоистым покрытием [Текст] / Д. В. Витт // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980. - №4. - С. 134-142.

46. **Вячкин, Е. С.** Моделирование течения вязкой слоистой среды при пултрузионном формовании композитных труб [Текст] / Е. С. Вячкин, В. О. Каледин, С. М. Аульченко, Е. А. Вячкина // Научно-технический вестник Поволжья.- Казань, 2017. - № 2. - С. 93-95.

47. **Вячкин, Е. С.** Однопараметрическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои [Текст] / Е. С. Вячкин, Е. В. Решетникова, С. М. Аульченко, А. П. Рябков, Е. А. Вячкина // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – №6. - С. 120-123.

48. **Вячкин, Е. С.** Численное решение задачи о деформировании слоистой структуры с объемно-несжимаемыми слоями / Е. С. Вячкин, В. О. Каледин, С. М. Аульченко, А. С. Бондаренко, Е. А. Вячкина // Научно-технический вестник Поволжья.- Казань, 2016. - № 6. - С. 117-120.

49. **Гласко, В. В.** О синтезе многослойных покрытий [Текст] / В. В. Гласко, А. Н. Тихонов, А. В. Тихонравов // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1974. - №1. - С. 135-144.

50. **Григолюк, Э. И.** Многослойное армирование оболочки. Расчет пневматических шин [Текст] / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – Москва : Машиностроение, 1988. – 287 с.

51. **Григолюк, Э. И.** Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем [Текст] / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков // Изв. АН СССР. Механика. - 1965. - № 5. – С. 68 – 80.

52. **Григолюк, Э. И.** Современное состояние теории многослойных оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т.8, № 5. – С. 5 – 17.

53. **Григолюк, Э. И.** Устойчивость оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – Москва : Наука, 1978. – 359 с.

54. **Гринченко, В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах [Текст] / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. - Киев: Наукова думка, 1981.-283 с.

55. **Гусев, Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур [Текст] / Е. Л. Гусев, Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма, 1993. – 262 с.

56. **Дубинчик, Е. В.** Особенности применения композитных материалов в строительстве [Текст] / Е. В. Дубинчик, В. Г. Пастушков, Л. В. Янковский // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе. - 2013. - Т. 3. - С. 175–181.

57. **Дымников, С. И.** Расчет резино-технических деталей при средних деформациях [Текст] / С. И. Дымников // Механика полимеров. – 1968. – №2. – С. 271-275.

58. **Ершов, Н. П.** Состояние и перспективы развития расчетно-экспериментальных работ в области проектирования тонкостенных конструкций из композиционных материалов [Текст] / Н. П. Ершов // Механика композитных материалов. – 1988.– № 1.– С. 86-92.

59. **Ефимов, А. Б.** Решение осесимметричной задачи теории упругости для несжимаемых материалов с помощью гибридного метода конечных элементов [Текст] / А. Б. Ефимов, О. В. Аксененко, А. В. Цвелих // Математическое моделирование систем и процессов. – 1(1). – 1992. – С. 67-81

60. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич – Москва : Мир, 1975. – 541 с.

61. **Исакович, М. А.** Применение слоев, устраняющих возникновение поперечных волн при отражении продольной волны от границы твердого тела [Текст] / М. А. Исакович // Акуст. журн., 1956. - Т. 2, вып. 2. - С. 150-152.

62. **Каледин, В. О.** Модель деформирования многослойной упругой конструкции, содержащей податливые объемно несжимаемые слои [Текст] / В. О. Каледин, Е. С. Вячкин // Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах труды IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Новокузнецк, 2016. - С. 132-138.

63. **Каледин, В.О.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Интерпретатор «Ядро» / В.О. Каледин // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, 02 марта 2017, № 2017612706.

64. **Каледин, В.О.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» / В.О. Каледин // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, 06 марта 2017, № 2017612895.

65. **Коростелев, С. А.** Расчет напряженно-деформированного состояния резиновых элементов РМШ гусеничного движителя / С. А. Коростелев, Д. Ю. Каширский, К. С. Нечаев // Ползуновский вестник. – вып. 1/1. – 2012. - С 140-145.

66. **Красновский, А. Н.** Научные основы непрерывного формообразования изделий из полимерных композиционных материалов: монография / А. Н. Красновский, И. А. Казаков, К. В. Квачев. – Москва : Изд-во МГТУ Станкин, 2012. - 65 с.

67. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика, ч. II [Текст] / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – Москва: Физматгиз. – 1963. – 728 с.

68. **Лавендел, Э. Э.** Расчет резинотехнических изделий [Текст] / Э. Э. Лавендел. – Москва : Машиностроение, 1976. – 232 с.

69. **Лазько, В. А.** Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев [Текст] / В. А. Лазько // Механика композит. материалов. – 1982. - № 1. – С. 77 – 84.

70. **Либреску, Л.** К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек . Ч. I [Текст] / Л. Либреску // Механика полимеров. – 1975. – № 6. – С. 1038 – 1050.

71. **Либреску, Л.** К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек . Ч. II [Текст] / Л. Либреску // Механика полимеров. – 1976. – № . – С. 100 – 109.

72. **Лурье, К. А.** Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном коэффициенте отражения монохроматической волны [Текст] / К. А. Лурье, М. М. Мачевариани // Прикл. механика и техн. физика, 1969. - №1. - С. 44-50.

73. **Ляпин, А. А.** Возбуждение колебаний в слоистом многосвязном полупространстве [Текст] / А. А. Ляпин, М. Г. Селезнев // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деф. сред и констр. Программа ГК РФ по ВО. Научные труды. Н. Новгород, 1993, В.1.

74. **Ляпин, А. А.** Динамическая контактная задача для полуплоскости, жестко сцепленной с пакетом из двух слоев [Текст] / А. А. Ляпин, Н. М. Селезнев, О. В. Шиляева // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС), 2008. - № 2. - С. 82-88.

75. **Ляпин, А. А.** К расчету слоистых оснований с локальными включениями [Текст] / А. А. Ляпин, О. В. Шиляева // Материалы Международной научно-практической конференции «Строительство 2004». Ростов-на-Дону: РГСУ, 2004. - С. 111-112.

76. **Ляпин, А. А.** Метод полупространств в динамических задачах для многослойных сред [Текст] / А. А. Ляпин, О. В. Шиляева // Материалы Международной научно-практической конференции «Строительство — 2007». Ростов-на-Дону: РГСУ, 2007. - С. 69-70.

77. **Ляпин, А. А.** Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. ГНТП «Глобальные изменения природной среды и климата» [Текст] / А. А. Ляпин, М. Г. Селезнев, Л. Е. Собисевич, А. Л. Собисевич. – Москва : ГНИЦ ПГК, 1999. - 294 с.

78. **Ляпин, А. А.** О построении фундаментальных решений для слоистых полуограниченных сред [Текст] / А. А. Ляпин // Труды XI международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 2007.

79. **Ляпин, А. А.** Расчет сложнопостроенных оснований при динамическом воздействии [Текст] / А. А. Ляпин, О. В. Шиляева // Материалы Международной научно-практической конференции «Строительство — 2003». Ростов-на-Дону: РГСУ, 2003. - С. 119-120.

80. **Майборода, В. П.** Динамика неоднородных вязкоупругих систем [Текст] / В. П. Майборода // Изв. АН УзССР, 1982. - №5. - С. 29-32.

81. **Майборода, В. П.** Собственные колебания неоднородных вязкоупругих тел [Текст] / В. П. Майборода, И. Е. Трояновский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982. - № 2. - С. 49-56.

82. **Мачевариани, М. М.** Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред [Текст] / М. М. Мачевариани, В. В. Тютюкин, А. П. Шкварников // Акуст. журн., 1971. - Т. 22, вып. 1. - С. 97-102.

83. **Мачевариани, М. М.** Оптимальное распределение показателя преломления в неоднородном слое, обеспечивающее заданную звукоизоляцию монохроматической волны [Текст] / М. М. Мачевариани, В. В. Миронова // Акуст. журн, 1975. - Т. 21, вып. 4. - С. 583-590.

84. **Мерич, Р. А.** Оптимизация коэффициентов теплопроводности изотропных и ортотропных тел [Текст] / Р. А. Мерич // Тр. Америк. общества инж.-механиков: Теплопередача, 1985. - №3. - С. 1-7.

85. **Молотков, Л. А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах [Текст] / Л. А. Молотков. - Ленинград: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984. – 204 с.

86. **Мейз, Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред [Текст] / Дж. Мейз. – Москва : Мир. – 1974. – 319 с.

87. **Мэттьюз, Ф.** Композитные материалы. Механика и технология [Текст]/ Ф. Мэттьюз, Р. Ролингс. – Москва : Техносфера, 2004. - 408 с.

88. **Немировский, Ю. В.** К теории упругих многослойных анизотропных оболочек [Текст] / Ю. В. Немировский, А. Н. Андреев // Тр. междунар. симпозиума «Тонкостенные элементы и строительные конструкции». – Лодзь, 1976. – С. 191 – 218.

89. **Немировский, Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. – Новосибирск : Изд. Наука, сибирское отделение, 1986. – 166 с.

90. **Ниордсон, Ф. И.** Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций [Текст] / Ф. И. Ниордсон, П. Педерсен // Механика: Период, 1973.- №2. - С. 136-152.

91. **Огарков, В. Б.** Расчет равномерно вращающегося упругого цилиндра из несжимаемого материала [Текст] / В. Б. Огарков, А. А. Аксенов, С. В. Малюков // Воронежский научно-технический вестник. – 3(7). – Т.3. – 2016. – С. 57-60.

92. **Оравский, В.** О проектировании слоистых балок с оптимальным демпфированием [Текст] / В. Оравский, Ш. Маркуш // Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах, Москва : Наука, 1979. - С. 255-259.

93. **Прусаков, А. П.** Изгиб, устойчивость и колебания многослойных пластин несимметричного строения [Текст] / А. П. Прусаков, Ю. К. Растеряев // Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Днепропетровск, 1969. – Москва, 1970. – С. 518 – 523.

94. **Прусаков, А. П.** Конечные прогибы многослойных пологих оболочек [Текст] / А. П. Прусаков // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. - № 3. – С. 119–125.

95. **Работнов, Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. / Ю. Н. Работнов – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.

96. **Расчет резиновых вибро-сейсмоблоков для защиты тяжелых машин и сооружений** [Текст] / А.Ф. Булат, [и др.] // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр., Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2012. - Вып. 106. - С. 38-44.

97. **Рейтман, М. И.** Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел [Текст] / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро // Механика

деформируемого твердого тела: Итоги науки и техники, Москва : ВИНТИ, 1978. - Т. 12. - С. 590.

98. **Рыбак, Л. М.** Об одном случае полной звукоизоляции при прохождении звука через слоисто-симметричную перегородку [Текст] / Л. М. Рыбак, Б. Д. Тартаковский // Акуст. журн., 1961. - Т. 7, вып. 4. - С. 497-499.

99. **Сагомоян, А. Я.** Пробивание плиты тонким твердым снарядом [Текст] / А. Я. Сагомоян // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1975. - №5. - С. 104-110.

100. **Свешников, А. Г.** Некоторые задачи проектирования многослойных оптических покрытий [Текст] / А. Г. Свешников, А. В. Тихонравов, С. А. Яншин // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия, 1983. - №4. - С. 3-7.

101. **Сеймов, В. М.** Колебания и волны в слоистых средах [Текст] / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий. - Киев: Наукова думка, 1990 - 224 с.

102. **Способ подачи армирующих волокон для технологических линий непрерывного изготовления изделий из полимерных композиционных материалов:** пат. 2494953 Рос. Федерация: В65Н 51/00, В29С 31/00, D02Н1/00 / Красновский А. Н., Казаков И. А., Хазиев А. Р. и др.; заявитель и патентообладатель Московский гос. техн. ун-т СТАНКИН. - № 2012116422/05; заявл. 24.04.2012; опубл. 10.10.2013.

103. **Срочко, В. А.** Итерационные методы решения задач оптимального управления [Текст] / В. А. Срочко. - Москва : Физматлит, 2000. – 160 с.

104. **Старовойтова, И. А.** Одноосноориентированные армированные пластики: анализ состояния, проблемы и перспективы развития / И. А. Старовойтова, [и др.] // Изв. КГАСУ. - 2012. - № 4. - С. 332-339.

105. **Степанов, В. Б.** Интерференционное ви-бропоглощающее покрытие [Текст] / В. Б. Степанов, Б. Д. Тартаковский // Акуст. журн., 1986. - Т. 32, вып. 1. - С. 87-92.

106. **Сухова, Н. А.** К расчету резиновых амортизаторов, работающих на сжатие [Текст] / Н. А. Сухова, В. Л. Бидерман // Расчеты на прочность.– 1962.– №8.–С. 200-211.

107. **Тартаковский, Б. Д.** Звуковые переходные слои [Текст] / Б. Д. Тартаковский // Докл. АН СССР, 1950. - Т. 75, №1. - С. 29-32.

108. **Тимошенко, А. Т.** Теплозащита и теплоустойчивость легких ограждающих конструкций жилых зданий на Севере [Текст] / А. Т. Тимошенко, Якутск, 1981. – 172 с.

109. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач [Текст]/А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва :Наука. Главная редакция физико-математической литературы,1979. – 284 с.

110. **Филин, А. П.** Элементы теории оболочек. 3-е изд., перераб. и доп. [Текст] / А. П. Филин – Ленинград : Стройиздат. Ленингр. отд-ние, 1987. – 384 с.

111. **Чернышов, В. М.** Вибропоглощающие свойства металлополимерных оболочек [Текст] / В. М. Чернышов // Изв. вузов. Машиностроение, 1986. - №8. - С. 38-43.

112. **Шкловер, А. М.** Теплопередача при периодических тепловых воздействиях [Текст] / А. М. Шкловер. – Москва; Ленинград : Госэнергоиздат, 1961. – 160 с.

113. **Щевьев, Ю. П.** Анализ и синтез неоднородных акустических сред [Текст] / Ю. П. Щевьев. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1984.- 216 с.

114. **Atarsia, A.** Effect of pulling speed on the sizes of the liquid, gel and solid zone, during thermoset pultrusion / A. Atarsia, R. Boukhili // Journal of reinforced plastics and composites, 2000. - № 19/18. - P. 1493-1503.

115. **Aylward, L.** Transient Finite Element Model for Pultrusion Processing / L. Aylward, C. Douglas, D. Royslance // Polym. Proc. Eng. - 1985. - № 3. - P. 247-261.

116. **Batch, G.** A Computer Analysis of Temperature and Pressure Distributions in a Pultrusion Die / G. Batch, C. Macosko // Proceedings of the SPI

Composite Institute's 42nd Annual Conference, The Society of Plastics Industry. - 1987. - № 12. - P. 1-7.

117. **Batch, G. L.** Heat transfer and cure in pultrusion: model and experimental verification / G. L. Batch, C. W. Macosko // AICHE J. - 1993. - № 39. - P. 1228-1241.

118. **Bibbo, M. A.** An Analysis of the Pulling Force in Pultrusion / M. A. Bibbo, T. G. Gutowski // SPE Tech. Papers. - 1986. - № 32. - P. 1430-1432.

119. **Chachad, Y.** Thermal Model for Three-Dimensional Irregular Shaped Pultruded Fiberglass Composites / Y. Chachad, J. Roux, J. Vaughan, E. Arafat // Journal of composite materials, 1996. - V.30. - P. 692-721.

120. **Gorthala, R.** Impact of pultrusion pull speed on temperature and degree of cure profiles within a composite material / R. Gorthala, J. A. Roux, J. G. Vaughan // 46th Annual Conference, Composites Institute, SPI Inc, February 18–21, 1991. - P. 13-15.

121. **Han, C. D.** Development of a Mathematical Model for the Pultrusion Process / C. D. Han, D. S. Lee, H. B. Chin // Polymer Engineering Science. - 1986. - № 26. - P. 3933-4004.

122. **Kim, D. H.** A model for thermosetting composite pultrusion process / D. H. Kim, P. G. Han, G. H. Jin, W. I. Lee // Journal of Composite materials, 1997. - № 31(20). - P. 2105 - 2122.

123. **Matonis, V. A.** A macroscopic analysis of composites containing layered spherical inclusions [Text] / V. A. Matonis, N. C. Small // Polymer Eng. and Sci, 1969. - V. 9, №2. - P. 90-99.

124. **Pian, T.H.H.** A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations / T.H.H. Pian, Chun Wu. // Int. J. for Num. Meth. in Eng. – Vol 26. – 1988. – P. 2331-2343

125. **Price, H.** Curing and Flow of Thermosetting Resins for Composite Material Pultrusion / H. Price // PhD Thesis, Old Dominion University, Virginia. 1979.

126. **Price, H. L.** Pulling Force and its variation in Composite Materials Pultrusion / H. L. Price, S. G. Cupschalk // Polymer Blends and Composites in Multiphase Systems. - 1984. - P. 301-322

127. **Scharnhorst, K. P.** Optimal distribution of density and dilatation modulus in inhomogeneous layers [Text] / K. P. Scharnhorst // J. of the Acoust. Soc. of Amer, 1979. - V.66. - P. 1526-1535.

128. **Stepanishen, P. R.** Reflection and transmission of acoustic wideband plane waves by layered viscoelastic media [Text] / P. R. Stepanishen, B. Stozeshi // J. of the Acoust. Soc. of Amer, 1982. - V. 71, №1. - P. 9-21.

129. **Ursin, B.** Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media [Text] / B. Ursin // Geophysics, 1983. - V.48, №8. - P. 1063-1081.

130. **Walsh, S. M.** Heat Transfer Characteristics of a Pultrusion Process / S. M. Walsh, M. Charamchi // ASME 25th National Heat Transfer Conference, Houston. - 1988. - P. 23-28.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
АКТЫ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора – руководитель Центра
социогуманитарного и информационно-
технологического образования НФИ КемГУ
доктор социологических наук


" 15 " _____ О.А. Урбан
2018 г.

АКТ О ВНЕДРЕНИИ

результатов диссертационной работы Вячкина Е. С.
в учебный процесс факультета информационных технологий

Результаты диссертационной работы Вячкина Евгения Сергеевича, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение, внедрены в учебный процесс факультета информационных технологий (ФИТ) Новокузнецкого института (филиала) ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» и используются при изучении дисциплины «Математические модели в естествознании и методы их исследования» для бакалавров направления «Прикладная математика и информатика» и дисциплины «Математические модели упругости, пластичности и ползучести» для магистров направления «Прикладная математика и информатика». Освоение обучающимися соответствующих разделов дисциплин способствует приобретению необходимых знаний и умений для применения на практике

Декан ФИТ
д.т.н., доцент



Т. В. Бурнышева

Заведующий кафедрой
математики и математического моделирования,
к.т.н., доцент



Е. В. Решетникова

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по центру
СПИТО НФИ КемГУ



О.А. Урбан

2018 г.

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор ООО
«Компания «Армопроект»



В. Асеев

«17» 2018 г.

АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Мы, нижеподписавшиеся, представители ООО «Компания «Армопроект»: генеральный директор, Асеев А.В., руководитель проектов, к.т.н. Новиков В.В. с одной стороны, и представитель НФИ КемГУ: заведующий кафедрой математики и математического моделирования к.т.н., доцент Е.В. Решетникова, с другой стороны, составили настоящий акт об использовании результатов диссертационной работы «Разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения для математического моделирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои», выполненной старшим преподавателем кафедры математики и математического моделирования НФИ КемГУ Вячкиным Е.С. в 2014-2018 г.

Результаты диссертационной работы внедрены в ООО «Компания «Армопроект» в следующем виде:

Принято для использования в работах ООО «Компания «Армопроект»:

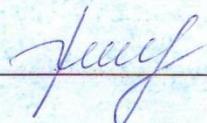
- математическая модель стационарного вязкого течения осесимметричных слоистых структур, содержащих ортотропные слои с конечной и бесконечно большой сдвиговой вязкостью;
- методика расчёта напряжений и скоростей вязкого течения слоистых элементов конструкций в процессе непрерывной пултрзузии.

При внедрении результатов диссертационной работы получен следующий технический эффект:

– повышение обоснованности конструкторско-технологических решений, обеспечивающее качество конечных изделий при пултрзузионном формовании.

Подписи:

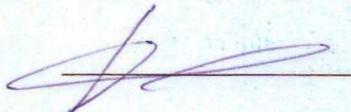
От НФИ КемГУ:
Зав. кафедрой математики и
математического моделирования,
к.т.н., доцент

 Е.В. Решетникова

От ООО «Компания «Армопроект»:
Генеральный директор

 Асеев А.В.

Руководитель проектов, к.т.н.

 Новиков В.В.

УТВЕРЖДАЮ

Зам.директора по центру
СРЦ «НФИ КемГУ»

О.А. Урбан

2018 г.

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор и главный
конструктор АО «ЦНИИСМ»

А.Ф. Разин

2018 г.

АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Мы, нижеподписавшиеся, представители акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (АО «ЦНИИСМ»): начальник отделения, к.т.н. А.В. Пашутов и начальник отдела к.т.н. Ю.А. Гашков, с одной стороны, и представитель НФИ КемГУ: заведующий кафедрой математики и математического моделирования к.т.н., доцент Е.В. Решетникова, с другой стороны, составили настоящий акт об использовании результатов диссертационной работы «Разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения для математического моделирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои», выполненной старшим преподавателем кафедры математики и математического моделирования НФИ КемГУ Вячкиным Е.С. в 2014-2018 г.

Результаты диссертационной работы использованы в АО «ЦНИИСМ» в следующем виде:

Принято для использования в работах АО «ЦНИИСМ»:

- математическая модель статического деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, на основе единой вариационной постановки;
- численная схема для интегрирования уравнений равновесия осесимметричных структур, содержащих объемно-несжимаемые слои;
- методика расчёта напряжений и деформаций упругих осесимметричных конструкций, содержащих слои из ортотропных композиционных материалов и слои из объемно-несжимаемого материала.

При внедрении результатов диссертационной работы получен следующий технический эффект:

- повышение обоснованности принятия конструкторских решений, обеспечивающих прочность и жесткость новых осесимметричных конструкций, содержащих объемно-несжимаемые слои;
- сокращение календарной продолжительности, затрат машинного времени и повышение точности при прочностных расчетах конструкций.

Подписи:

От НФИ КемГУ:

Зав. кафедрой математики и
математического моделирования,
к.т.н., доцент

 Е.В. Решетникова

От АО «ЦНИИСМ»:

Начальник отделения, к.т.н.

 А.В. Пашутов

Начальник отдела, к.т.н.

 Ю.А. Гашков