

На правах рукописи



Вячкин Евгений Сергеевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ, АЛГОРИТМОВ И  
ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОИСТЫХ СТРУКТУР, СОДЕРЖАЩИХ  
ОБЪЕМНО-НЕСЖИМАЕМЫЕ СЛОИ**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Новокузнецк– 2018

Работа выполнена в Новокузнецком институте (филиале) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет»

Научный руководитель доктор физико-математических наук, доцент,  
Аульченко Сергей Михайлович

Официальные оппоненты Кургузов Владимир Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатории механики разрушения материалов и конструкций, ведущий научный сотрудник

Ганджа Тарас Викторович, кандидат технических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра Компьютерных систем в управлении и проектировании, доцент

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», г. Красноярск

Защита состоится «31» мая 2018 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, Россия, г. Новосибирск, проспект К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте <http://www.nstu.ru/>.

Автореферат разослан «\_\_» апреля 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета



Фаддеев Андрей Владимирович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Деформируемые слоистые структуры из полимерных композиционных материалов широко распространены в двигателестроении, мостостроении, автомобиле строении и других областях техники в качестве элементов силовых конструкций. Обеспечение их прочности в эксплуатации и предупреждение дефектов при изготовлении требует математического моделирования процессов упругого и вязкого деформирования, в том числе – расчёта полей напряжений на этапе проектирования новых и совершенствуемых конструкций. Во многих практически важных случаях такие структуры включают высокоэластичные слои, объемная сжимаемость которых на много порядков отличается от сжимаемости других, более жёстких слоёв. Построение математической модели слоистых структур со слоями малой сжимаемости сопряжено с рядом проблем, в частности с недостаточной точностью измерения физико-механических характеристик (например, коэффициента Пуассона). В связи с этим представляется рациональным моделирование таких слоёв на основе их представления как объемно-несжимаемой среды. Между тем, в настоящее время в практике проектирования конструкций из полимерных композиционных материалов, таких, как слоистые осесимметричные опоры, подобные модели не используются.

Особенность моделирования таких объектов заключается в том, что для сжимаемых слоев возможно использование функционала Лагранжа, который является выпуклым. Для несжимаемых слоев функционал Лагранжа неприменим. Численные схемы на основе функционала Васидзу (К.-Ю. Бате, А.Б. Ефимов, О.В. Аксененко, А.В. Цвелих) позволяют решать задачи статики с коэффициентами Пуассона, близкими к 0,5. Однако этот функционал не выпуклый, что может привести к погрешности решения в сжимаемых слоях.

Поэтому актуально построить модель неоднородной среды, содержащей слои разных свойств, как сжимаемые так и не сжимаемые, исходя из функционала Лагранжа.

**Цель работы:** построение математической модели и численной схемы для определения полей напряжений и деформаций упругих и вязких осесимметричных слоистых структур, содержащих одновременно слои из объемно-несжимаемых и сжимаемых материалов, при действии статической нагрузки.

**Для достижения цели в работе поставлены и решены задачи:**

1. Построение математической модели статического деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои.

2. Построение математической модели стационарного вязкого течения осесимметричных слоистых структур, содержащих ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью.

3. Разработка численной схемы для интегрирования уравнений равновесия и вязкого течения осесимметричных структур, содержащих объемно-несжимаемые слои.

4. Разработка методики и программного обеспечения для расчёта напряжений и деформаций упругих осесимметричных конструкций, содержащих слои из ортотропных композиционных материалов и слои эластомера.

5. Разработка методики и программного обеспечения для расчёта напряжений и скоростей вязкого течения формируемых элементов конструкций в процессе непрерывной пултрузии.

**Методы исследования** основаны на использовании известных положений механики сплошных сред; методов исследования и решения краевых задач математической физики; методов регуляризации некорректных задач; численных методов решения краевых задач и вычислительной математики; методов алгоритмизации и объектно-ориентированного программирования.

**Научную новизну работы** определяют:

1. Однопараметрическая модель деформирования слоистых осесимметричных структур, содержащих слои с нулевой и конечной объемной сжимаемостью, позволяющая определять напряжения и деформации в каждом слое пакета при статическом деформировании и стационарном вязком течении.

2. Алгоритм вычисления деформаций и напряжений в объемно-несжимаемой среде как предела решения регуляризованной задачи о деформировании сжимаемой среды.

3. Численная конечно-элементная схема решения стационарной краевой задачи, отличающаяся набором базисных функций для объемно-несжимаемых слоёв, явно включающим бездивергентные функции, что позволяет устранить зависимость ранга матрицы несжимаемости от квадратной формулы.

4. Комплекс программ для расчёта напряжённо-деформированного состояния упругих и вязких слоистых осесимметричных конструкций из полимерных композиционных материалов с объемно несжимаемыми слоями, отличающийся использованием функционально-объектной парадигмы программирования и позволяющий производить гибкую перестройку алгоритма при изменении физических определяющих уравнений.

**На защиту выносятся:**

1. Однопараметрическая модель деформирования слоистых осесимметричных структур, содержащих объемно несжимаемые слои и слои без

внутренних кинематических связей, при упругой деформации и вязком течении.

2. Численная конечно-элементная схема решения стационарной краевой задачи для расчёта напряжений и деформаций слоистых осесимметричных структур при упругом деформировании и вязком течении.

3. Комплекс программ для расчёта напряжённно-деформированного состояния упругих и вязких слоистых осесимметричных конструкций из полимерных композиционных материалов, содержащих объемно несжимаемые слои.

4. Результаты расчётов напряжённно-деформированного состояния слоистых осесимметричных опор при статическом нагружении осевой силой.

5. Результаты расчётов вязких напряжений и скоростей деформации формируемых элементов композиционных конструкций при непрерывной пултрузии.

**Личный вклад автора** заключается в построении однопараметрической математической модели деформирования объемно-несжимаемой сплошной среды, описывающей упругие деформации и вязкое течение при статических силовых воздействиях; разработке численной схемы решения стационарной краевой задачи, отличающейся набором базисных функций для объемно-несжимаемых слоёв, явно включающим бездивергентные функции; участие в коллективной разработке пакета прикладных программ для решения задач вычислительной механики; разработке программы для расчёта напряжённно-деформированного состояния упругих и вязких слоистых осесимметричных конструкций из полимерных композиционных материалов, содержащих объемно-несжимаемые слои; проведение численных расчетов и анализе их результатов, интерпретации экспериментальных данных.

**Практическая значимость** работы состоит в возможности использования разработанных моделей, алгоритмов и программ при совершенствовании технологических процессов пултрузионного формования цилиндрических изделий и при проектировании осесимметричных конструкций из композитных материалов, содержащих объемно-несжимаемые слои, и подтверждена справкой об использовании результатов диссертации.

**Обоснованность и достоверность** научных положений и выводов обеспечена корректным применением апробированных методов механики сплошной среды, исследования сходимости и точности численного решения; согласованием результатов расчетов с точными решениями модельных задач и известными экспериментальными данными.

Работа выполнялась в соответствии с планом НИР Новокузнецкого института (филиала) ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет».

**Реализация результатов.** Результаты работы (алгоритмы расчета, программа для ЭВМ и результаты численного моделирования) использованы в АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» при разработке методики расчёта напряженно-деформированного состояния многослойных упругих опор, в ООО «Компания «Армопроект» при разработке методики расчёта слоистых элементов конструкций в процессе пултрузионного формирования, в учебном процессе НФИ КемГУ. Имеется справка об использовании результатов диссертационной работы.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на научных конференциях: Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Новокузнецк, 2014); IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах» (Новокузнецк, 2016); Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2016); VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественно-научному, экономическому, юридическому, социогуманитарному и педагогическому направлениям (Новокузнецк, 2016); VII Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Новокузнецк, 2017); Всероссийской конференции с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017).

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 – в рецензируемых изданиях из перечня ВАК.

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований и 1 приложения. Материал диссертации изложен на 112 страницах, содержит 56 рисунков и 9 таблиц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость полученных результатов, излагается краткое содержание основных глав.

**Первая глава** содержит обзор применения слоистых структур в технике, а также анализ существующих методов решения некорректных задач о деформировании и течении слоистых структур с объемно-несжимаемыми слоями.

Задача деформации резиновых элементов, работающих на сжатие, решалась в разное время такими авторами, как Э. Э. Лавендел, С.И. Дым-

ников, В.Л. Бидерман, Н.А. Сухова и др. В работе А.Б. Ефимова, О.В. Аксененко, А.В. Цвелиха в качестве метода решения некорректной задачи предлагается численная схема на основе метода гибридных элементов. Такой подход позволяет использовать закон Гука в качестве определяющего уравнения при значениях коэффициента Пуассона, близких (но меньших) 0,5. Подход основан на применении четырехугольного изопараметрического элемента, в пределах которого поля напряжений и перемещений аппроксимируются независимо друг от друга. Однако остается неизвестным, до какого предела можно увеличивать коэффициент Пуассона.

Примером течения вязкой жидкости может быть течение связующего в фильтре при пултрузионном формовании. Существенный вклад в задачи расчета процесса пултрузии внесли отечественные и зарубежные ученые: И.В. Абрамов, В.М. Виноградов, Б.А. Жовнер, В.Ф. Царев, А.В. Петров, В.П. Ставров, А.Е. Ушаков, А.А. Сафонов, В.А. Бужгулашвили, Ю.Г. Кленин, Н. Price, T. G. Gutowski, C. D. Han, T. J. Tulig, G. L. Batch, R. Gorthala, Y. R. Chachad, D. H. Kim, J. A. Roux, A. Atarsia и др.

Математическое моделирование процессов течения слоистой жидкости с чередующимися слоями с конечной и бесконечной вязкостью ранее не производилось. В большей части работ внимание уделялось вопросам теплопроводности и отверждения связующего, определения давления при удалении избыточного материала, усилия пултрузии.

Исходя из проведенного анализа, сделан вывод об актуальности построения математической модели и численной схемы, для решения задач о деформировании и течении слоистых структур с объемно-несжимаемыми слоями с использованием лагранжевых конечных элементов

**Во второй главе** построена однопараметрическая математическая модель течения и статического деформирования слоистых композитных структур, содержащих объемно-несжимаемые и сжимаемые слои.

Для решения задачи используется регуляризация по Тихонову, в которой жесткие кинематические связи снимаются, а определяющие уравнения среды записываются так, чтобы малые деформации, несовместимые со связями, вызывали большие, но конечные напряжения. Предельный переход обеспечит получение решения исходной задачи.

Для регуляризованной модели упругой среды обобщенный закон Гука записывается в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  - тензор деформаций,  $\Theta$  - объемная деформация,  $\lambda$ ,  $\mu$  - постоянные Ламе,  $\delta_{ij}$  - симметричный символ Кронекера.

Объемная деформация  $\Theta$  выражается через компоненты тензора деформаций следующим образом:

$$\Theta = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Следуя общепринятому описанию, линейную зависимость между деформациями и напряжениями в матричном виде можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = D(\lambda, \mu)\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$  - матрицы-столбцы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_r \quad \sigma_\varphi \quad \tau_{xr} \quad \tau_{r\varphi} \quad \tau_{x\varphi}]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_r \quad \varepsilon_\varphi \quad \gamma_{xr} \quad \gamma_{r\varphi} \quad \gamma_{x\varphi}]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица упругости  $D$ , с учетом равенства (1), принимает вид:

$$D(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (5)$$

При изменении коэффициента Пуассона  $\nu$  от нуля до 0,5 постоянная  $\lambda$  увеличивается от нуля до бесконечности. Далее будем считать сдвиговой модуль  $\mu$  постоянным, а постоянную  $\lambda$  - варьируемой от начального значения  $\lambda_0$  до бесконечности. Введем малый параметр  $\alpha$ , стремящийся к нулю при бесконечно большом  $\lambda$ . Тогда из (5) имеем:

$$D(\lambda, \mu) = D(\lambda_0, \mu) + \frac{1}{\alpha} H, \quad (6)$$

где обозначено:

$$H = D(\lambda_0, 0), \quad \frac{1}{\alpha} = \lambda - \lambda_0, \quad (7)$$

$\lambda_0$  - выбранное фиксированное значение постоянной Ламе.

С учетом регуляризации закона Гука функционал Лагранжа преобразуется к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \left( D_0 + \frac{1}{\alpha} H \right) \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{S_2} (\bar{\boldsymbol{q}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) ds. \quad (8)$$

Аналогичный результат получен при регуляризации определяющего уравнения для вязкой несжимаемой жидкости. Функционал Лагранжа принимает вид (точки обозначают производную по времени)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left( F(\xi_0, \mu^*) + \frac{1}{\beta} J \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_{S_2} (\bar{\boldsymbol{q}} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}) ds, \quad (9)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\dot{\varepsilon}_x \quad \dot{\varepsilon}_y \quad \dot{\varepsilon}_z \quad \dot{\varepsilon}_{xy} \quad \dot{\varepsilon}_{yz} \quad \dot{\varepsilon}_{xz}]^T, \quad (10)$$



$$F(\xi, \mu^*) = \begin{bmatrix} \xi + 2\mu^* & \xi & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi + 2\mu^* & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi + 2\mu^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$F(\xi, \mu^*) = F(\xi_0, \mu^*) + \frac{1}{\beta} J, \quad (12)$$

$$J = F(\xi_0, 0), \quad \frac{1}{\beta} = \xi - \xi_0, \quad (13)$$

$\xi$  – коэффициент объемной вязкости;  $\mu^*$  – коэффициент сдвиговой вязкости,  $\beta$  – малый параметр.

Сделан вывод, что задачи расчета течения при пултрузионном формировании композитных труб и напряженно-деформированного состояния слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои, аналогичны с математической точки зрения при замене деформаций на скорости деформаций, перемещений на скорости в соответствующих местах математической модели и в главных граничных условиях. Следовательно, такие задачи могут быть решены с использованием одного математического аппарата.

**В третьей главе** приведена дискретизация задачи деформирования и течения осесимметричных слоистых структур, содержащих объемно несжимаемые слои.

Для построения конечно-элементной сетки продольное сечение предлагается разбивать на конечные элементы четырехугольной формы. Число узлов определяется порядком аппроксимации полей перемещений, интерполяционные формулы имеют вид:

$$u = \sum_i N_i u_i = N\{u\}. \quad (14)$$

Применение метода Рунге к минимизации функционала (8) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром:

$$\left[ K + \frac{1}{\alpha} C \right] X(\alpha) = R, \quad (15)$$

где  $K$  – положительно определенная симметричная матрица жесткости,  $C$  – полуположительно определенная симметричная матрица несжимаемости,  $X$  – вектор-столбец неизвестных,  $R$  – заданный вектор-столбец нагрузок,  $\alpha$  – малый параметр.

Показано, что полученная алгебраическая задача имеет предел решения  $X(\alpha)$ , равный  $X^*$ , и предел производной  $X(\alpha)$  по параметру  $\alpha$  при стремлении  $\alpha$  к нулю, равный  $Z$ . Получено матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

для которого построен итерационный процесс решения. В работе показано, что, ранг матрицы несжимаемости  $C$  меньше размерности задачи, а  $X^*$  принадлежит ядру матрицы  $C$ :  $X^T C X = 0$ .

Для вычисления матриц  $K$  и  $C$  необходимо конкретизировать базисные функции. Приводится обоснование необходимости построения новой системы базисных функций, для которой выполняется условие несжимаемости:

$$\frac{\partial v(x, r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot v(x, r) + \frac{\partial u(x, r)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Приведены общие формулы для определения системы таких базисных функций. В частности для полиномов степени 2:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(x, y) \\ \bar{v}(x, y) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $\bar{u}(x, r) = r \cdot u(x, r)$ ,  $\bar{v}(x, r) = r \cdot v(x, r)$ ,  $r = y + r_0$ .

В выражении (18) первые 6 решений являются бездивергентными, а последние 2 дивергентными. Таким образом получено

$$C = \Omega_{7,8}^{-1 T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Omega_{7,8}^{-1} \cdot \lambda_0 \cdot V, \quad (19)$$

где

$$V = \int_S 2\pi r(\xi, \eta) \cdot J \cdot d\xi d\eta, \quad (20)$$

$$\Omega = \frac{1}{r_0 + y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1 y_1 & 0 & r_0 y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1 y_1 & 0 & r_0 y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1 y_1 & 0 & r_0 y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 - y_1^2 & (r_0 + y_1)x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1 y_1 & 0 & r_0 y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

С использованием техники метода конечных элементов получен дискретный аналог краевой задачи статического деформирования композитной структуры с объемно-несжимаемыми слоями – система линейных алгебраических уравнений относительно малого параметра; разработан алгоритм расчета полей перемещений, напряжений и деформаций слоистых осесимметричных конструкций с объемно-несжимаемыми слоями путем численного решения дискретного аналога краевой задачи; приведено обоснование сходимости дискретного решения, а также предложена система базисных функций, позволяющая получить корректное решение методом конечных элементов.

**В четвертой главе** описано разработанное программное обеспечение для расчетов напряженно деформированного состояния задачи деформирования и течения слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои.

Описанная выше методика реализована в виде программы в среде функционально-объектного программирования «Алгозит».

Для исследования сходимости численного решения, полученного с использованием предложенной методики, приведено сравнение его с известным аналитическим решением. В качестве тестового примера рассмотрена задача о толстостенной трубе под действием внутреннего давления. Задача решалась в безразмерных переменных, масштабированных на внутренний радиус трубы. Всего рассматривалось 5 видов сеток. На первой сетке исследуемая область разбивалась на 2 конечных элемента по толщине, с последующим удвоением числа элементов по каждой стороне.

Результат расчёта минимальных перемещений приведен на рисунке 1, где  $N$ - число элементов по толщине. Сплошными линиями представлены пределы решения задачи, регуляризованной при разных значениях коэффициента Пуассона. Для сравнения пунктирными линиями показано решение задачи о деформировании сжимаемой среды при значениях коэффициента Пуассона, близких к 0,5, на основе стандартной методики.

Из графиков видно, что предложенный подход позволяет получить сеточную сходимость при любом значении параметра регуляризации, при значениях этого параметра 0,35 и 0,45 даже на самой крупной сетки получены перемещения близкие к аналитически вычисленным. На рисунке 1 представлена деформация рассчитанная численно, отнесенная к полученной аналитически. На этом графике так же видна эффективность предлагаемого подхода, даже на самой крупной сетке. Стоит отметить, что решение задачи о деформировании сжимаемой среды с коэффициентом Пуассона 0,499 на крупных сетках дает погрешность более 40%, что является неприемлемым. Сгущение сетки позволяет выйти на полученные аналитические значения перемещений, но при этом размер конечного элемента должен быть меньше радиуса трубы примерно в 200 раз.

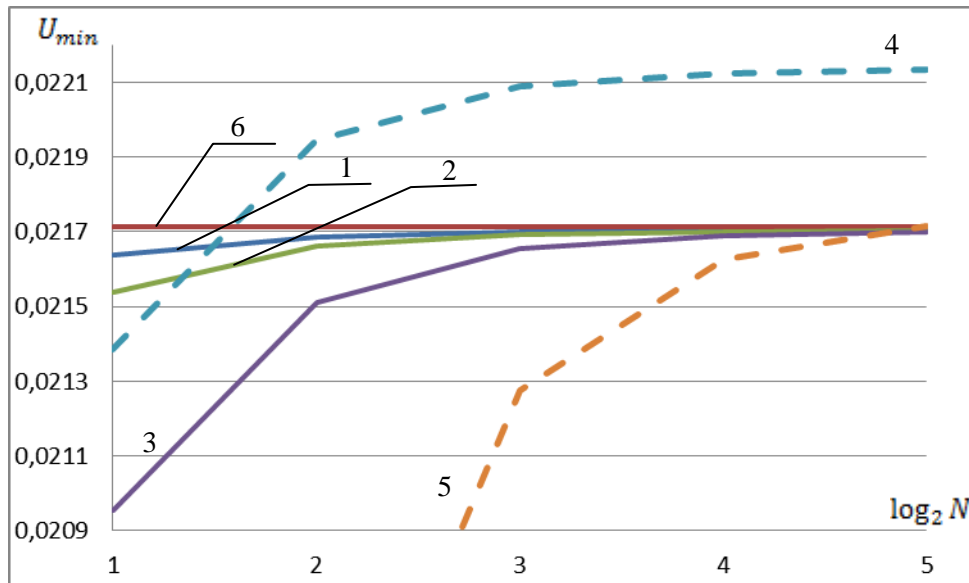


Рисунок 1 – Минимальные значения перемещений: 1 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu=0,35$ , 2 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu=0,45$ , 3 – предел решения задачи, регуляризованной при  $\nu=0,49$ , 4 – решение задачи при  $\nu=0,49$ , 5 – решение задачи при  $\nu=0,499$ , 6 – аналитическое решение

Сеточная сходимость численной схемы задачи вязкого течения исследована на примере задачи течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя соосными цилиндрами.

На левом торце приложена сила  $F_1 = f H$ , на правом скорость постоянна, а сила равна нулю. На стенках трубы выполняются условия прилипания. Всего рассматривалось 7 видов сеток. На первой сетки по толщине осуществлялось разбиение на 2, а по длине на 10 конечных элементов, с последующим удвоением числа элементов по каждой стороне.

Зависимость максимальных значений осевой скорости от  $\log_2 N$ , где  $N$  – число элементов по толщине, показана на рисунке 2.

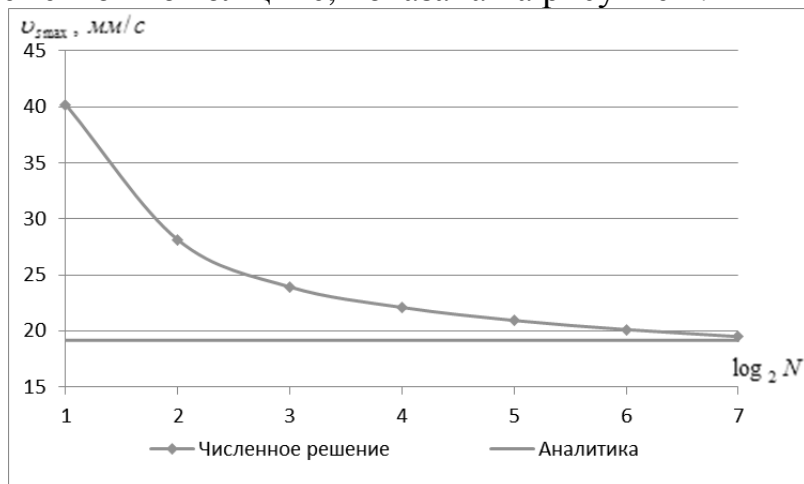


Рисунок 2 – Максимальные значения осевой скорости

При сгущении сетки значение скорости сходимость к предельному значению, которое отличается от аналитического не более чем на 0,5 %.

Численное решение чувствительно к вариации силы на левой и правой границе, поэтому представляется возможным его использование для расчёта полей напряжений в формуемом материале при непрерывной пултрузии.

На рисунке 3 приведено поле меридиональных напряжений. Виден фронт смены знака напряжений. Зона положительных напряжений, отмеченная штриховкой, опасна возможностью образования каверн, что неизбежно ухудшает качество формуемого изделия.

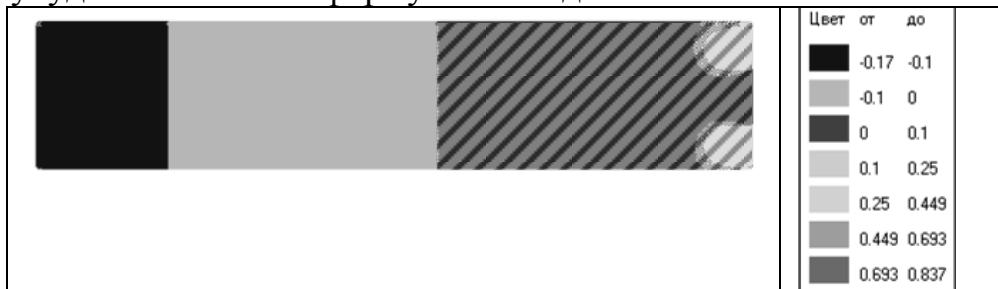


Рисунок 3 – Поле меридиональных напряжений

Дальнейший анализ позволил показать, что управление силами, приложенными на левой и правой границах, позволяет снизить растягивающие напряжения. Предложенная математическая модель позволяет для заданной скорости пултрузии определить давление на входе в канал, обеспечивающее отсутствие кавитационных зон.

Достоверность результатов моделирования оценена при расчёте прочности опор, содержащих слои из объемно-несжимаемого эластомера (рисунок 4).

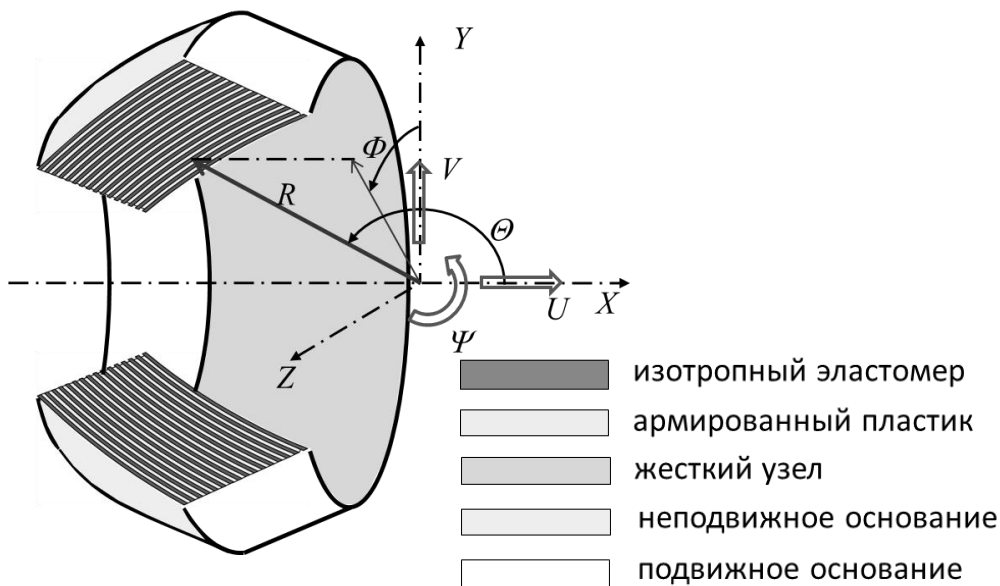


Рисунок 4 - Схема слоистой опоры

Рассчитывался опытный образец шарнира из 11 углепластиковых тарелей (предел прочности на сжатие в окружном направлении равен 350 МПа) и 4 тарелей из стали (предел текучести 1200 МПа), а также двух опорных колец из титанового сплава (предел прочности 1050 МПа). Толщина тарелей и слоев эластомера составляла 2 мм.

Расчет напряженно-деформированного состояния производился по методике, описанной выше. Задача регуляризована при значении коэффициента Пуассона для эластомера, равном 0,35. Величина сжимающей силы принята равной предельной осевой силе, при которой произошло разрушение в натурном эксперименте, проведенном в НПО «Искра».

Максимальные сжимающие напряжения оказались равными 384 МПа, что на 9,7% отличается от предела прочности материала. Характер повреждений соответствует разрушению от действия сжимающих напряжений в окружном направлении. Тарели из стали оказались не разрушенными, что также соответствует уровню рассчитанных напряжений в них.

Таким образом, максимальные сжимающие напряжения согласуются с экспериментальными данными, в соответствии с которыми в эксперименте достигнут предел прочности на сжатие. Это подтверждает достоверность моделирования.

**В заключении** приведены основные результаты работы:

1. Развита метод решения некорректных по А.Н. Тихонову задач об упругом и вязком деформировании объемно-несжимаемой среды, в котором предложено явное вычисление предела решения регуляризованной задачи.
2. Разработана численная схема с явным выделением бездивергентной составляющей полей перемещений и скоростей, позволяющая обеспечить сходимость при вычислении предела регуляризованной задачи, и построена система бездивергентных базисных функций.
3. Исследована сходимость и оценена погрешность численного решения задачи на примере расчета напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из несжимаемого материала под действием внутреннего давления.
4. Исследована чувствительность численного решения к изменению начального значения коэффициента Пуассона и размеров конечных элементов. Показано, что при одном и том же числе итераций и при последовательном сгущении сетки решение быстрее сходится к аналитическому при выборе начального коэффициента Пуассона в диапазоне 0,3-0,35, чем при значениях, близких к 0,5.
5. Найдена оценка асимптотической скорости сходимости численного решения задачи определения скоростей при течении среды с бесконечно большой объемной вязкостью между двумя соосными цилиндрами.
6. Разработано программное обеспечение, позволяющее вычислять как перемещения, напряжения и деформации упругих осесимметричных опор,

содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, так и скорости, напряжения и скорости деформации, вязкого течения среды, содержащей ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью, в процессе непрерывной пултрузии.

7. Достоверность результатов подтверждена сопоставлением теоретической оценки напряжений в слоистой осесимметричной конструкции, содержащей упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, с данными натурных разрушающих испытаний при осевом сжатии.

## **ОСНОВНЫЕ ТРУДЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Статьи в периодических изданиях, рекомендованных ВАК**

1. Вячкин Е. С. Численное решение задачи о деформировании слоистой структуры с объемно-несжимаемыми слоями [Текст] / Е. С. Вячкин [и др.] // Научно-технический вестник Поволжья.- Казань, 2016. - № 6. - С. 117-120.

2. Вячкин Е. С. Однопараметрическая модель деформирования слоистых структур, содержащих объемно-несжимаемые слои [Текст] / Е. С. Вячкин [и др.] // Научно-технический вестник Поволжья.- Казань, 2016. - № 6. - С. 120-124.

3. Вячкин Е.С. Моделирование течения вязкой слоистой среды при пултрузионном формовании композитных труб [Текст] / Вячкин Е.С., Аульченко С.М., Каледин В.О., Вячкина Е.А. // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. № 2. С. 93-95.

### **Работы, опубликованные в других изданиях**

4. Бурнышева Т.В. Принципы функционирования систем с качественными параметрами / Т.В. Бурнышева, Е.С. Вячкин //Иновации молодых: сб. науч. трудов. – Новокузнецк, 2014.- С. 28-31

5. Вячкина Е. А. Поля скоростей и давлений потока вблизи упругой оболочки [Текст]/ Заметки ученого //Е. А. Вячкина, Е. С. Вячкин. - 2015. Т. 1. № 5-1 (5). С. 34-39.

6. Каледин В. О. Модель деформирования многослойной упругой конструкции, содержащей податливые объемно несжимаемые слои [Текст] / В. О. Каледин, Е. С. Вячкин // Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах труды IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2016. С. 132-138.

7. Вячкин Е. С. Конечные элементы высокого порядка при расчете напряженно-деформированного состояния конструкций различного назначения [Текст] / Е. С. Вячкин // VI Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по естественно-

научному, экономическому, юридическому, социогуманитарному и педагогическому направлениям (Новокузнецк, 5 апреля 2016 г.) : сб. ст. В 4 т. Т. 1 [текстов. электрон. изд.]. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2016. – (т. 1). – Электрон. дан. 8 электрон. опт. дисков (CD-R)

8. Вячкин Е. С. Модель деформирования объектов, содержащих объемно несжимаемые элементы [Текст] / Е.С. Вячкин, В.О. Каледин // Тематич. сб. науч. ст. «Краевые задачи и математическое моделирование». –Новокузнецк, 2017. С. 68-70.

9. Вячкин Е.С. Численное моделирование несжимаемых слоистых структур [Текст] / Е.С. Вячкин, В.О. Каледин, Е.В. Решетникова, С.М. Аульченко. // Всероссийская конференция с международным участием, посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (4-8 сентября 2017 г.) тезисы докладов. – Новосибирск, 2017. – С.73-75.

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Подписано в печать «27» марта 2018г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага писчая. Ризография.

Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз.

Новокузнецкий институт (филиал)  
Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения  
высшего образования  
«Кемеровский государственный университет»

654000, г. Новокузнецк, пр. Metallургов, 19, тел. (3843) 74-15-41  
Центр издательской деятельности