

На правах рукописи



Сивак Сергей Андреевич

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ГРАНИЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новосибирск – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Рояк Михаил Эммануилович

Официальные оппоненты: **Шкаруба Виталий Аркадьевич**, доктор технических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, лаборатория 8-2, заведующий лабораторией, г. Новосибирск;
Митин Константин Александрович, кандидат технических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутеладзе СО РАН, лаборатория интенсификации процессов теплообмена, научный сотрудник, г. Новосибирск

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 29 июня 2022 года в 14⁰⁰ часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте <http://www.nstu.ru>.

Автореферат разослан __ апреля 2022 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 212.173.06

Фаддеенков Андрей Владимирович



Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Актуальность работы заключается в необходимости учёта вихревых токов и скин-эффекта в расчётных областях при решении задач электромагнетизма. Одним из подходов, позволяющих решать такие задачи, является векторный метод граничных элементов (ВМГЭ).

Метод граничных элементов (МГЭ) используется на практике достаточно давно. Первое его упоминание восходит к работам L.H. Chen и R.P. Vanaugh 1963-го года. В них описывается подход с использованием коллокаций. При этом теоретические предпосылки к возникновению метода появились в работе O.D. Kellogg 1953-го года, хотя некоторые общие идеи восходят ещё к работам Эйлера. На сегодняшний день предпочтение отдаётся методам, основанным на постановке в форме Галёркина.

К сожалению, МГЭ не свободен от двух существенных недостатков. Первый недостаток – данный метод применяется только для расчётных подобластей, значения параметров среды которых постоянно. Второй – появление плотной СЛАУ при дискретизации вариационной постановки МГЭ. Кроме того, он требует вычисления несобственных интегралов, что является сложной задачей при программной реализации метода.

В случае необходимости учёта областей с переменными параметрами среды, зависящими от координат или от решения, применяется комбинирование векторного метода конечных элементов (ВМКЭ) с ВМГЭ. Такое комбинирование позволяет преодолеть первый недостаток метода.

Быстрый мультипольный метод, описанный в работах S. Rjasanow, применяется для оптимизации скалярного МГЭ при решении уравнения Гельмгольца, что позволяя преодолеть второй недостаток ВМГЭ. Идея использования упомянутых методов оптимизации заключается в совместном применении древовидной иерархической структуры данных для группировки элементов, участвующих в построении локальных матриц МГЭ, вместе с одним из способов аппроксимации компонент этих матриц. Этими способами являются мультипольное разложение и кросс-аппроксимация. В частности, в случае применения быстрого мультипольного метода аппроксимация локальных матриц используется не для их фактического формирования, а для оптимизации скорости матрично-векторного произведения, необходимого для итерационных решателей СЛАУ. При этом матрица СЛАУ не хранится целиком, что позволяет добиться существенного выигрыша и при использовании машинной памяти.

Подходы численного интегрирования, специфические для ВМГЭ, являются объектом множества исследований, касающихся проблем оптимизации точности и скорости вычисления интегралов. В данной работе приводятся исследование интегральных операторов, используемых в ВМГЭ, и формулы, позволяющие свести задачу интегрирования этих операторов к аналогичным операторам скалярного МГЭ.

Целью работы является разработка вычислительной схемы, основанной на ВМГЭ и позволяющей учитывать вихревые токи в подобластях с различной геометрией и параметрами среды.

Для достижения указанных целей были решены следующие задачи:

1. Реализовать векторный метод граничных элементов. Протестировать программную реализацию на модельных задачах с известным аналитическим решением.
2. Встроить полученную реализацию метода в программный комплекс Quasar, позволяющий использовать векторный метод конечных элементов совместно с методом граничных элементов.
3. Оценить эффективность совместного использования скалярного и векторного методов граничных элементов путём решения модельной задачи и сравнения результатов с численным решением, полученным при использовании других численных методов.

Научная новизна работы:

1. Разработана вычислительная схема численного моделирования электромагнитных процессов с учётом вихревых токов на основе ВМГЭ, допускающая его комбинирование с ВМКЭ и скалярным МКЭ и МГЭ, использующая математическую модель электромагнитного поля на основе формулы Стрэттона-Чу.
2. Предложена и реализована вычислительная схема скалярного метода граничных элементов для решения уравнения Гельмгольца на основе быстрого мультипольного метода с применением алгоритма вращения коэффициентов мультипольного ряда.
3. Для получения компонент локальных матриц был проведён анализ особенностей подынтегральных функций. На основе этого анализа был предложен и реализован новый подход к интегрированию сингулярных функций ВМГЭ.
4. Разработан метод учёта симметрии для ВМГЭ.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» и п.4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Методы исследования основаны на совместном использовании ВМГЭ, ВМКЭ и скалярного МГЭ для решения трехмерных задач электромагнетизма.

На защиту выносятся:

1. Разработанная вычислительная схема ВМГЭ в рамках модели на основе формулы Стэттона-Чу, допускающая совместное использование векторного и скалярного потенциалов.

2. Предложенный подход к численному интегрированию сингулярных функций ВМГЭ.
3. Разработанный алгоритм вращения коэффициентов мультипольного ряда в быстром мультипольном методе и результаты исследования расхода памяти и времени работы реализации скалярного метода граничных элементов с использованием этого алгоритма.
4. Разработанный и реализованный метод учёта симметрии для ВМГЭ.
5. Программная реализация перечисленных выше вычислительных схем, алгоритмов и методов, встроенная в программный комплекс Quasar.

Достоверность результатов обеспечивается верификацией результатов при решении модельных задачах, путем независимого решения их различными методами, сравнением решений модельных задач с решениями других авторов.

Практическая значимость и реализация результатов заключаются в использовании полученных вычислительных схем для разработки эффективного метода решения задачи моделирования затухания вихревых токов в дипольном магните сложной формы.

Теоретическая значимость заключается в разработанных новых численных методах на основе ВМГЭ.

Личный вклад заключается в разработке вычислительной схемы совместного использования ВМГЭ и МКЭ, а также в построении комбинирования ВМГЭ и скалярного МКЭ; в разработке метода получения интегралов от сингулярных функций, используемых в ВМГЭ и учёте симметрии при использовании ВМГЭ; в проведении всех необходимых расчётов для верификации разработанных вычислительных схем и для исследования эффективности предлагаемых подходов при моделировании электромагнитного поля магнита сложной формы.

Апробация работы.

Основные положения диссертационной работы докладывались на конференциях: XII международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2014, НГТУ, 2-4 октября 2014 года), Городская научно-практическая конференция аспирантов и магистрантов «Progress through Innovation» (НТИ-2014, НГТУ, 3 апреля 2014 года), Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (НТИ-2017, НГТУ, 4-8 декабря 2017 года), Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука. Технологии. Инновации» (НТИ-2019, НГТУ, 2-6 декабря 2019 года), XV международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2021, НГТУ, 19-21 ноября 2021 года).

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта №19-31-90052 «Моделирование электромагнитного поля комбинированным методом конечных и граничных элементов векторного типа».

Публикации: основные положения диссертационной работы опубликованы в 9-ти работах, в числе которых имеются 3 статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных ВАК, 3 статьи индексируются в международной базе данных Scopus.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, заключения, списка использованной литературы и двух приложений. Общий объём основной части составляет 129 страниц и включает 48 рисунков, 30 таблиц и список использованных источников из 60 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава содержит описание модели, учитывающей вихривые токи при гармоническом по времени источнике электромагнитного поля. Вводится определение граничного оператора Гамильтона. Приводится описание ВМГЭ с использованием оператора Стеклова-Пуанкаре, который в свою очередь является удобным инструментом для построения различных комбинированных подходов. Излагается способ комбинирования ВМГЭ с ВМКЭ.

Пусть Ω – это односвязная область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , возможно, неограниченная. Пусть источники электромагнитного поля являются гармоническими по времени функциями. Из системы уравнений Максвелла в работах Breuer H., Nirtmair R. и других авторов было выведено уравнение для периодического по времени поля относительно \vec{E} :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu(\vec{x})} \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) + i\omega\sigma(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = -i\omega\vec{F}(\vec{x}) \quad (1)$$

где $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{i\omega t}$, $\vec{E}(\vec{x}) = -i\omega\vec{A}(\vec{x})$; σ – проводимость, ω – циклическая частота электромагнитного поля, i – мнимая единица, ϵ – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость.

В уравнении (1) все параметры являются функциями \vec{x} , кроме ω . Последний параметр является константой. Параметры среды могут не являться непрерывными функциями. Пусть область разбита на подобласти $\{\Omega_m\}_{m=1}^N$, где N – это число подобластей. Пусть, кроме того, пара подобластей с номерами m и j имеет общую кусочно-гладкую границу $\Gamma_{m,j}$, при переходе через которую функции параметров среды, а именно μ и σ , испытывают скачок. Для того, чтобы определить условия на границе $\Gamma_{m,j}$, введём понятия операторов следа Дирихле γ_D^Ω и следа Неймана γ_N^Ω :

$$\gamma_D^\Omega \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{\vec{r} \in \Omega, \vec{r} \rightarrow \vec{x} \in \partial\Omega} \vec{n} \times (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{n}) \quad (2)$$

$$\gamma_N^\Omega \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{\vec{r} \in \Omega, \vec{r} \rightarrow \vec{x} \in \partial\Omega} (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) \times \vec{n} \quad (3)$$

Если аргументы функций параметров среды лежат в подобласти с индексом m , то соответствующие значения параметров указываются с индексом, на-

пример μ_m, σ_m . В этих обозначениях условия на $\Gamma_{m,j}$ определяются следующим образом:

$$\gamma_D^{\Omega_m} \vec{E}(\vec{x}) \Big|_{x \in \Gamma_{m,j}} = \gamma_D^{\Omega_j} \vec{E}(\vec{x}) \Big|_{x \in \Gamma_{m,j}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu_m(\vec{x})} \cdot \gamma_N^{\Omega_m} \vec{E}(\vec{x}) \Big|_{x \in \Gamma_{m,j}} = -\frac{1}{\mu_j(\vec{x})} \cdot \gamma_N^{\Omega_j} \vec{E}(\vec{x}) \Big|_{x \in \Gamma_{m,j}} \quad (5)$$

Знак минус в правой части (5) означает противоположность направления внешних нормалей на общей границе $\Gamma_{m,j}$ соответствующих смежных подобластей.

Пусть для некоторой односвязной подобласти Ω все параметры среды (μ, σ) являются константами. Определим волновое число k по формуле:

$$k = \sqrt{i\omega\sigma\mu}. \quad (6)$$

Пусть, кроме того, в подобласти Ω уравнение (1) является однородным. Обозначим границу указанной области Γ , тогда решение уравнения (1) может быть представлено в виде интегрального разложения по формуле Стрэттона-Чу:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) = & \nabla_{\vec{x}} \times \int_{\vec{y} \in \Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) R^\Omega \vec{E}(\vec{y}) dS + \int_{\vec{y} \in \Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) \gamma_N^\Omega \vec{E}(\vec{y}) dS - \\ & - \frac{1}{k^2} \nabla_{\vec{x}} \int_{\vec{y} \in \Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_{\Gamma, \vec{x}} \cdot \gamma_N^\Omega \vec{E}(\vec{x}) dS, \quad \vec{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где \vec{y} – это связанная переменная интегрирования, а дифференциальный оператор $\nabla_{\vec{x}}$ вычисляется по переменной \vec{x} , ∇_Γ – это граничный оператор Гамильтона. Вектор \vec{n} – это внешняя относительно Ω нормаль к Γ в точке \vec{y} . Функция G_k выражается в виде:

$$G_k(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{e^{-k\|\vec{r}-\vec{\rho}\|}}{4\pi \|\vec{r}-\vec{\rho}\|}, \quad (8)$$

где норма является евклидовой.

Оператор ∇_Γ учитывает лишь изменение вдоль границы области. Этот оператор позволяет также ввести в рассмотрение для произвольной векторнозначной функции \vec{f} , заданной на некотором участке границы трёхмерной области, дифференциальные операторы граничного ротора, равного $(\nabla_\Gamma \times \vec{f}) \cdot \vec{n}$, и граничной дивергенции, равной $\nabla_\Gamma \cdot \vec{f}$. Граничные дивергенция, градиент и ротор подробно описаны в диссертационной работе Н. Breuer.

Для пары функций $\vec{f}(\vec{y}), \vec{g}(\vec{y})$ определим скалярное произведение на Γ по формуле:

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{g} d\Gamma, \quad (9)$$

где $\bar{\cdot}$ означает комплексное сопряжение. Пусть также вектор-функция $\vec{u}(\vec{x})$ определена для $\vec{x} \in \Gamma$, $\vec{n}(\vec{x})$ – это внешняя нормаль, определённая на Γ , и $\vec{u}(\vec{x}) \perp \vec{n}(\vec{x})$ почти для всех $\vec{x} \in \Gamma$.

Заметим, что при решении задачи МКЭ решение уравнения (1) предполагается искать в пространстве $H(\text{curl}, \Omega)$.

$$H(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \vec{F} : \int_{\Omega} \|\vec{F}\|_{\mathbb{R}^3}^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} \|\nabla \times \vec{F}\|_{\mathbb{R}^3}^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (10)$$

Обозначим образы следов кручения и Дирихле, соответственно, $H_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ и $H_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$, как это сделано в ряде работ R. Nimpfmaier и H. Breuer. Отображения:

$$R^{\Omega} : H(\text{curl}, \Omega) \rightarrow H_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \quad (11)$$

$$\gamma_D^{\Omega} : H(\text{curl}, \Omega) \rightarrow H_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \quad (12)$$

являются сюръекциями. Нормы в пространствах $H_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ и $H_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ определены в диссертационной работе H. Breuer и в работах R. Nimpfmaier.

Используя операторы следа, введём в рассмотрение интегральные операторы:

$$(B_k \vec{u})(\vec{x}) := \int_{\Gamma} \gamma_{N, \vec{x}}^{\Omega}(G_k(\vec{x}, \vec{y}) \vec{u}(\vec{y})) ds_{\vec{y}}, \vec{x} \in \Gamma, \quad (13)$$

$$(A_k \vec{u})(\vec{x}) := \int_{\Gamma} \gamma_{D, \vec{x}}^{\Omega}(G_k(\vec{x}, \vec{y}) \vec{u}(\vec{y})) ds_{\vec{y}} - \frac{1}{k^2} \nabla_{\vec{x}} \int_{\Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_{\Gamma, \vec{y}} \cdot \gamma_{N, \vec{y}}^{\Omega} \vec{u}(\vec{y}) ds_{\vec{y}}, \vec{x} \in \Gamma, \quad (14)$$

$$(N_k \vec{u})(\vec{x}) := \gamma_{N, \vec{x}} \nabla_{\vec{x}} \times \int_{\Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) (\vec{u}(\vec{y}) \times \vec{n}(\vec{y})) ds_{\vec{y}}, \vec{x} \in \Gamma, \quad (15)$$

$$(C_k \vec{u})(\vec{x}) := \gamma_{D, \vec{x}} \nabla_{\vec{x}} \times \int_{\Gamma} G_k(\vec{x}, \vec{y}) (\vec{u}(\vec{y}) \times \vec{n}(\vec{y})) ds_{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{u}(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma \quad (16)$$

Применяя следа Неймана (3) к выражению (7), можно связать след Дирихле (4) и след Неймана в слабой форме для всех функций \vec{u} , являющихся решениями (1) в области Ω :

$$(S_k \gamma_D^\Omega \vec{u})(\vec{x}) = \gamma_N^\Omega \vec{u}(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma, \quad (17)$$

где

$$S_k = N_k + \left(\frac{1}{2} I + B_k \right) A_k^{-1} \left(\frac{1}{2} I - C_k \right). \quad (18)$$

Существование обратного оператора A_k^{-1} доказано в работах R. Nimpfmaier, J. Ostrowski и H. Breuer при $k \neq 0$. Соответствующая вариационная задача выглядит так:

$$\langle S_k \gamma_D^\Omega \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \gamma_N^\Omega \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma), \quad (19)$$

где \vec{v} – пробная функция вариационной задачи. Выберем конечномерные подпространства $W_N^{\Gamma} \subset H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ и $V_M^{\Gamma} \subset H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ с размерностями N и M соответственно. Спроецируем на эти подпространства функции $\gamma_D^\Omega \vec{u}$ и $\gamma_N^\Omega \vec{u}$:

$$\gamma_D^\Omega \vec{u} = \sum_p \alpha_p \vec{\xi}_p, \vec{\xi}_p \in W_N^{\Gamma}, \quad (20)$$

$$\gamma_N^\Omega \vec{u} = \sum_q \beta_q \vec{\psi}_q, \vec{\psi}_q \in V_M^{\Gamma}. \quad (21)$$

Далее получим СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где α – это вектор коэффициентов α_p разложения (20), β – вектор коэффициентов β_q разложения (21). Элементы блоков матрицы СЛАУ и вектора правой части (22) определяются следующим образом:

$$\mathbf{A}_{i,j} = \langle A_k \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \rangle, i, j = \overline{1, M}, \quad (23)$$

$$\mathbf{N}_{i,j} = \langle N_k \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j \rangle, i, j = \overline{1, N}, \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_{i,j} = \left\langle \left(-\frac{1}{2} \text{Id} + C_k \right) \vec{\xi}_i, \vec{\psi}_j \right\rangle, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{i,j} = \left\langle \left(\frac{1}{2} \text{Id} + B_k \right) \vec{\psi}_i, \vec{\xi}_j \right\rangle, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}, \quad (26)$$

$$\mathbf{F}_i = \langle \gamma_N^\Omega \vec{u}, \vec{\xi}_i \rangle, i = \overline{1, N}. \quad (27)$$

В конце главы приводится комбинированный подход с использованием векторных конечных и граничных элементов. Основная идея такого совместного использования заключается в рассмотрении вариационной постановки ВМГЭ относительно оператора Стеклова-Пуанкаре и учёта равенства (5) в слабой форме относительно скалярного произведения (9). Аналогичный подход применялся в работах И. Ступакова и Н. Кондратьевой для совместного использования скалярных и векторных конечных элементов.

Вторая глава посвящена вычислению локальных матриц ВМГЭ. Приводится формула интегрирования по частям для векторно-значных функций, определённых на границе некоторой трёхмерной области. Произведён анализ особенностей интегрируемых функций. Для упрощения взятия интегралов произведено сведение всех несобственных интегралов к интегралам от потенциалов простого и двойного слоёв, методы вычисления которых достаточно хорошо изучены в работах S. Rjasanow, O. Steinbach, S. Järvenpää а также других авторов.

В диссертационной работе J. Ostrowski предлагался подход к получению блока (25), предполагающий введение в рассмотрение дополнительного потенциала.

Указанный дополнительный потенциал имеет вид:

$$(M_\Gamma^k \vec{v})(\vec{y}) := \int_\Gamma \nabla_{\vec{x}} G_k(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) ds_{\vec{x}}. \quad (28)$$

В работе J. Ostrowski он назван модифицированным потенциалом двойного слоя. В данной главе приводится подробное доказательство неограниченности функции данного потенциала в окрестности рёбер гладкой и незамкнутой поверхности Γ . Это обстоятельство несколько затрудняет использование ВМГЭ, поскольку интеграл от M_Γ^k участвует в построении блока **C** в СЛАУ (22).

Формула для получения блоков **C** и **B** имеет вид:

$$\begin{aligned} & -\langle C_k \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, B_{\vec{k}} \vec{u} \rangle = \\ & = \int_\Gamma (K_\Gamma^k \vec{v})(\vec{y}) \cdot \vec{u}(\vec{y}) ds_{\vec{y}} + \int_\Gamma \sum_{q=1}^3 \left(\tilde{V}_\Gamma^k \nabla_\Gamma \cdot (\vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{c}_q)) \right) (\vec{y}) (\vec{c}_q \cdot \vec{u}(\vec{y})) ds_{\vec{y}} - \\ & - \sum_{i=1}^N \oint_{\partial S_i} \sum_{q=0}^3 ((\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{c}_q) (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{p}(\vec{x}))) \left(\tilde{V}_\Gamma^k (\vec{c}_q \cdot \vec{u}) \right) (\vec{x}) dt_{\vec{x}}, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$\left(\tilde{V}_\Gamma^k f\right)(\vec{y}) = \int_{\Gamma \ni \vec{x}} G_k(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{x}) ds_{\vec{x}}, \quad (30)$$

$$\left(K_\Gamma^k \vec{v}\right)(\vec{y}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_k(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{n}(\vec{x})} \vec{v}(\vec{x}) ds_{\vec{x}}, \quad (31)$$

c_p – векторы Декартовой системы координат.

Формулы для блоков **A** и **B** выводились ранее в работах J. Ostrowski и J. Breuer.

Третья глава посвящена повышению эффективности скалярного и векторного методов граничных элементов. Кратко изложены общие принципы метода быстрых мультиполей, приводится алгоритм оптимизации построения коэффициентов частичной суммы мультипольного ряда при переносе центра мультипольного разложения. Описывается схема комбинирования ВМГЭ и скалярного МГЭ с использованием векторного и скалярного операторов Стеклова-Пуанкаре. Излагается подход к учёту симметрии относительно плоскости для скалярного и векторного МГЭ.

Скалярный метод граничных элементов применяется для решения уравнения Гельмгольца. Данное уравнение используется, например, для решения задач акустики. Для однородной области Ω уравнение имеет вид:

$$-\Delta u(\vec{x}) + k^2 u(\vec{x}) = F(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega, \quad (32)$$

где \vec{x} – вектор пространственных координат, $k = \omega/v$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний в среде, v – скорость звука в среде, Функция u – является потенциалом скорости звука, F – функция интенсивности источников звука в объёме среды. В дальнейшем будем полагать $F = 0$, то есть объёмные источники звуковых волн в области Ω отсутствуют.

Граничные условия Дирихле и Неймана соответственно имеют следующий вид:

$$u(\vec{x})|_{\vec{x} \in \Gamma_1} = F_D(\vec{x}), \Gamma_1 \subseteq \partial\Omega, \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}} \right|_{\vec{x} \in \Gamma_2} = F_N(\vec{x}), \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega. \quad (34)$$

Определим операторы следа для области Ω , а именно след Дирихле γ_0^Ω и след Неймана γ_1^Ω :

$$\left(\gamma_0^\Omega u\right)(\vec{x}) = \lim_{\vec{r} \in \Omega, \vec{r} \rightarrow \vec{x}} u(\vec{r}), \vec{x} \in \Gamma, \quad (35)$$

$$\left(\gamma_1^\Omega u\right)(\vec{x}) = \lim_{\vec{r} \in \Omega, \vec{r} \rightarrow \vec{x}} \vec{n}(\vec{x}) \cdot \nabla u(\vec{r}), \vec{x} \in \Gamma, \quad (36)$$

где \vec{n} – это направление внешней относительно Ω нормали в точке \vec{x} на Γ .

Используя (35)-(36), решение уравнения (32) можно представить в следующем виде:

$$u(\vec{y}) = \int_{\Gamma} G_k(\vec{y}, \vec{x}) \gamma_1^{\Omega} u(\vec{x}) ds_{\vec{x}} - \int_{\Gamma} \gamma_{1,\vec{x}}^{\Omega} G_k(\vec{y}, \vec{x}) \gamma_0^{\Omega} u(\vec{x}) ds_{\vec{x}}, \quad (37)$$

где G_k – это фундаментальные решения уравнения Гельмгольца (32).

Дальнейшее построение скалярного МГЭ подробно описано в работах S. Rjasanow и O. Steinbach и принципиально не слишком отличается от векторного случая.

Рассматривается быстрый мультипольный метод для оптимизации работы скалярного метода граничных элементов. В основе метода лежат две идеи: применение мультипольного разложения и использование кластерного дерева.

В частности, вычисление интегралов от потенциала простого слоя при помощи квадратурных формул сводится вычислению суммы:

$$E(\vec{x}) = \sum_{j=1}^L \omega_j \frac{e^{ik\|\vec{x}-\vec{r}_j\|}}{4\pi \|\vec{x}-\vec{r}_j\|} \quad (38)$$

В случае, если точка \vec{x} достаточно удалена от точек \vec{r}_j , то приближённо эта сумма может быть вычислена следующим образом:

$$E(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^P \sum_{m=-n}^n \alpha_n^m S_n^m(r, \theta, \varphi), \quad (39)$$

$$\alpha_n^m = \sum_{j=1}^L \omega_j R_n^{-m}(r_j, \theta_j, \varphi_j). \quad (40)$$

где R_n^m – это регулярные функции мультипольного разложения, S_n^m – сингулярные функции, числа r , φ и θ являются сферическими координатами точки \vec{x} , а r_j, θ_j, φ_j – координатами точек \vec{x}_j соответственно. Число P определяет точность приближения исходной суммы E слагаемыми мультипольного ряда. Точное равенство полагается при $P = \infty$. R_n^m и S_n^m определяются следующим образом:

$$R_n^m(r, \theta, \varphi) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (41)$$

$$S_n^m(r, \theta, \varphi) = h_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (42)$$

где в свою очередь j_n – это сферическая функция Бесселя типа j , h_n – это сферическая функция Ханкеля первого рода, Y_n^m – это скалярные сферические гармоники.

Получив значения всех коэффициентов α_n^m , можно для любой точки \vec{x} , находящейся на достаточном расстоянии от точек r_j , получить значение функции $E(\vec{x})$, используя уже посчитанные коэффициенты α_n^m . Сложность такого алгоритма относительно числа точек r_j и всех допустимых точек \vec{x} становится линейной.

ВМГЭ применяется для подобластей, в которых $k \neq 0$. Для подобластей, где $k = 0$ можно ввести скалярный потенциал, что приводит к идее совместного использования векторного и скалярного МГЭ. Решение в двух смежных областях выражается с использованием векторного потенциала \vec{A} для одной из областей, и с использованием скалярного потенциала u , вводимого для области, которая не является проводником (например, для воздуха). Данные области обозначаются Ω_c (c – conductor, проводник) и Ω_0 соответственно. Обобщение на многие смежные области происходит по аналогии с уже описанной схемой для ВМГЭ и ВМКЭ.

Далее полагаем, что \vec{A} и \vec{E} являются решениями однородного уравнения (1) и для них справедлива формула Стрэттона-Чу (7).

В Ω_0 справедливо представление:

$$\vec{H} = \vec{H}_{ext} - \nabla u, \quad (43)$$

где u – это неполный скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению:

$$\nabla \cdot \mu_0 \nabla u = 0, \quad (44)$$

где \vec{H}_{ext} вычисляется по закону Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{H}_{ext}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{y}. \quad (45)$$

В случае, если непроводящая область Ω_0 является неограниченной, имеют место следующие условия на бесконечно удалённой границе:

$$\lim_{\vec{r} \in \Omega_0, \vec{r} \rightarrow \infty} u(\vec{r}) = 0. \quad (46)$$

На общем участке границы областей выполняются условия:

$$\frac{1}{\mu_c} \left(\nabla \times \vec{A} \right) \times \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \vec{H}_{ext} \times \vec{n}_c - \nabla u \times \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \quad (47)$$

$$\left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \mu_0 \left(\vec{H}_{ext} \cdot \vec{n}_c - \nabla u \cdot \vec{n}_c \right) \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \quad (48)$$

где \vec{n}_c – это вектор внешней нормали границы области Ω_c , μ_c – магнитная проницаемость области Ω_c , μ_0 – магнитная проницаемость области Ω_0 .

Уравнения (47) и (48) могут быть записаны в терминах скалярного (36) и векторного (3) следов Неймана:

$$\frac{1}{\mu_c} \gamma_N^{\Omega_c} \vec{A} \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \vec{H}_{ext} \times \vec{n}_c - \nabla u \times \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \quad (49)$$

$$\left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \mu_0 \left(\vec{H}_{ext} \cdot \vec{n}_c + \gamma_1^{\Omega_0} u \right) \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}. \quad (50)$$

Воспользовавшись теперь свойствами скалярного и векторного операторов Стеклова-Пуанкаре, можно переписать уравнения (49) и (50) в следующей форме:

$$\frac{1}{\mu_c} S_{k_c}^{\Omega_c} \gamma_D^{\Omega_c} \vec{A} \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \vec{H}_{ext} \times \vec{n}_c - \nabla u \times \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \quad (51)$$

$$\left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0} = \mu_0 \left(\vec{H}_{ext} \cdot \vec{n}_c + S_0^{\Omega_0, \text{scal}} u \right) \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \quad (52)$$

где k_c – это волновое число, определяемое для подобласти Ω_c по формуле (6).

Уравнение (51) может быть записано в слабой форме аналогично (19):

$$\left\langle \frac{1}{\mu_c} S_{k_c}^{\Omega_c} \gamma_D^{\Omega_c} \vec{A}, \vec{v} \right\rangle_{\partial\Omega_c} = \left\langle \vec{H}_{ext} \times \vec{n}_c - \nabla u \times \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, \vec{v} \right\rangle_{\partial\Omega_c}, \quad (53)$$

$$\forall \vec{v} \in H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_{\partial\Omega_c}, \partial\Omega_c),$$

где скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega_c}$ определено аналогично (9), однако интеграл в (9) берётся по $\Gamma = \partial\Omega_c$. Пробные функции \vec{v} являются результатом применения следа Дирихле $\gamma_D^{\Omega_c}$ к векторным функциям, чьи функции-компоненты принадлежат пространству $H(\text{curl}, \Omega_c)$. Специально отметим, что если на участке $\Gamma_D \subset \partial\Omega_c$ имеются краевые условия вида $\gamma_D^{\Omega_c} \vec{A} \Big|_{\Gamma_D} = \vec{g} \Big|_{\Gamma_D}$, то пробные функции \vec{v} на этом участке полагаются равными нулю.

Аналогично записывается и слабая форма уравнения (52):

$$\left\langle \mu_0 S_0^{\Omega_0, \text{scal}} u, f \right\rangle_{\partial\Omega_c, \text{scalar}} = \left\langle \left(\nabla \times \vec{A} - \mu_0 \vec{H}_{ext} \right) \cdot \vec{n}_c \Big|_{\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0}, f \right\rangle_{\partial\Omega_c, \text{scalar}}, \quad (54)$$

$$\forall f \in H^{-1/2}(\partial\Omega_0).$$

Пробные функции f являются результатом применения скалярного следа Дирихле $\gamma_0^{\Omega_0}$ к функциям из пространства $H(\Omega_0)$. Если на участке $\Gamma_0 \subset \partial\Omega_0$ имеются краевые условия вида $\gamma_0^{\Omega_0} u \Big|_{\Gamma_0} = h \Big|_{\Gamma_0}$, то пробные функции f на этом участке полагаются равными нулю.

Если расчётная область, объёмные источники электромагнитного поля и граничные условия обладают симметрией относительно некоторой плоскости

\hat{S} , то оказывается возможным вдвое сократить время вычисления интегралов при получении локальных матриц и вчетверо уменьшить затраты на использование памяти для хранения матрицы СЛАУ. Идея учёта симметрии для скалярного МГЭ излагалась Ступаковым И. М. в его диссертационной работе. По аналогии с изложенным в указанной работе, рассматриваются условия, при которых СЛАУ, полученная при осуществлении процедуры дискретизации, представима в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \pm \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \pm \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

Очевидно, эта СЛАУ может быть представлена и в более простом виде:

$$(\mathbf{P} \pm \mathbf{Q}) \mathbf{f} = \mathbf{F}. \quad (56)$$

Указанное в формуле (56) позволяет сократить вдвое вычислительные затраты на построение локальных матриц СЛАУ и вчетверо сократить память, занимаемую матрицей СЛАУ.

Четвёртая глава посвящена встраиванию новых программных модулей в исследовательский программный комплекс Quasar. Представлены классы, осуществляющие как описанные алгоритмы переноса центра мультипольного ряда, так и сборку локальных матриц ВМГЭ.

Программный комплекс Quasar состоит из 7-ми связанных между собою библиотек.

1. **Quasar** – API для взаимодействия с программным комплексом.
2. **Quasar.Core** – Данная библиотека содержит реализацию всех вычислительных алгоритмов, используемых в Quasar.
3. **Quasar.Manager** – Обеспечивает интерфейс пользовательского взаимодействия с Quasar-ом. Реализует оконное приложение для операционной системы Windows.
4. **Quasar.BaseUI** – Библиотека отвечает за работу с пользовательским вводом и за вывод текущей информации о расчётах.
5. **Quasar.UI** – Отвечает за визуализацию элементов проекта, сеток и полученного решения.
6. **Quasar.UnitTests** – Содержит тесты, проверяющие работу всех программных модулей и в частности Quasar.Core.

Реализация вычисления локальных матриц ВМГЭ была выполнена в модуле Quasar.Core. Необходимые вычислительные компоненты были написаны на языке C#. Встраивание осуществлялось в два этапа: вначале был написан класс «EddyCurrentVectorBEM» отвечающий за сборку локальных матриц системы уравнений (22).

Пятая глава посвящена верификации разработанных алгоритмов и тестированию соответствующего им программного кода. Верификация проводилась путём сравнения с решениями задач, которые ранее были предложены другими авторами, сравнения численного решения с известным аналитическим реше-

нием, сравнения с ранее использованными методами при решении модельных задач.

Одна из модельных задач, излагаемых в данной главе, была ранее представлена в диссертационной работе J. Ostrowski вместе с её аналитическим решением. Пусть Ω - проводящий шар радиуса a с бесконечно тонким кольцом с током. Радиус кольца равен b , $b > a$. Центры шара и кольца совпадают.

Сферическая система координат определяется тремя параметрами: r , ϕ , θ . где r – расстояние от центра шара, ϕ – угол поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца, а θ – угол между указанной осью и радиус-вектором \vec{x} точки, в которой требуется значение \vec{E} . Равенство $\theta = \frac{\pi}{2}$ соответствует положению кольца.

Решенная задача содержит две подобласти: внутренняя область проводящего шара и внешняя подобласть, для которой было указано малое значение проводимости $\sigma_0 = 0.005 \text{ Ом}^{-1}$, сделанное достаточно маленьким, чтобы гарантировать единственность решения во внешней области. Параметры рассматриваемой модельной задачи: $I = 1000 \text{ А}$, $\omega = 2\pi 10 \text{ кГц}$, $a = 0,05 \text{ м}$ и $b = 0,065 \text{ м}$. Параметры проводящего шара: $\sigma = 0.8 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1}$, $\mu_r = 10.0$.

Грубая сферическая сетка, использованная при расчётах, содержит 234 узла и 464 элемента. Её более точный аналог содержит 946 узлов и 1888 элементов. Самая подробная сетка из использованных содержит 3810 узлов и 7616 элементов. Эти сетки не являются подразбиениями друг друга – они были построены путем увеличения параметров подробности сетки в два раза.

В комбинированном методе с использованием ВМКЭ для объемной сетки использовалось радиальное сгущение объемных элементов к окрестности границы шара. Количество радиальных делений N_r , применяемых к объемной сетке, равно 4 для грубого случая, 8 для более подробного и 16 для самого подробного из описанных с параметром конденсации q равным 3, $\sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{3}$ соответственно. Указанные параметры подчиняются соотношению (57):

$$a = C_r \frac{1 - q^{N_r+1}}{1 - q}, \quad (57)$$

где константа C_r может быть получена из известных значений.

Соответствующие значения численного отклонения от аналитического решения, деленного на максимальное абсолютное значение аналитического решения, представлено на рисунках 1.

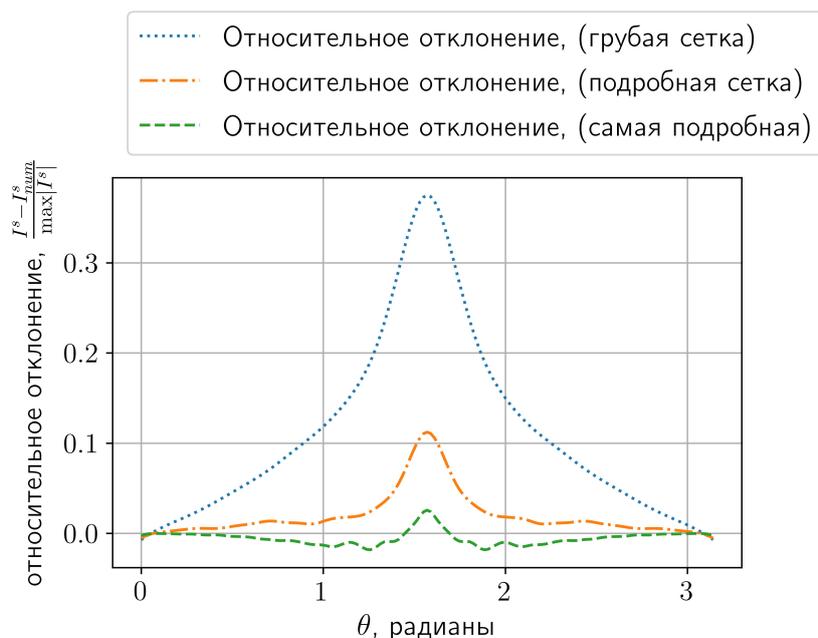


Рисунок 1 – Значения относительного отклонения, комбинированный подход

В шестой главе приводится решение задачи моделирования вихревых токов в дипольном магните сложной формы. При решении данной задачи используется решение гармонических задач, возникающих при разложении функции тока в ряд Фурье.

Проблема, рассматриваемая в данной главе, состоит в оценивании влияния вихревых токов на поле магнитной индукции для моделей магнита, отличающихся друг от друга числом разрезов.

При проектировании магнита требовалось, чтобы погрешность расчётов магнитной индукции не превышала 5 Гс . Для этого необходимо было провести исследование эффективности вычислительной схемы, предусматривающей совместное использование ВМГЭ, скалярного МГЭ, а также векторного и скалярного МКЭ для моделей магнита, отличающихся числом разрезов, сделанных равномерно в области магнита и имеющих толщину 0.3 мм . Физические параметры проводящих областей магнита: $\mu = 1000\mu_0$, $\sigma = 10^7 \text{ См/м}$.

Высота магнита составляет 4 м . Ширина магнита составляет 8 м . Все задачи решались в $1/4$ -ой части магнита, поскольку конструкция имеет две плоскости симметрии.

При решении нестационарной задачи функция тока была задана следующим образом: первые 50 секунд ток линейно рос от нуля до 25% от максимально возможной силы тока. В течение последующих трёх минут ток не менял значения. Затем в течение минуты ток вновь линейно рос до значения своего максимума и далее уже значения не менял.

При построении гармонического решения задачи использовалась функция тока, представленная на рисунке 2. Для обеспечения непрерывности и периодичности функции тока был использован линейный спад до нуля во временном промежутке от 350 до 400 секунд. Это позволяет уменьшить влияние краевых

эффектов в окрестности точки $t = 350$ на временной оси – при $t = 400k$ функция принимает нулевое значение при всех целых k .

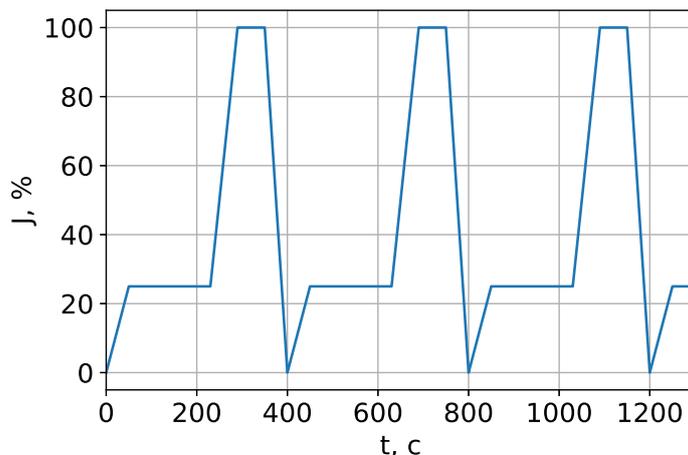


Рисунок 2 – Функция тока для гармонического расчёта

Последовательное увеличение числа гармоник для аппроксимации функции тока и решения нестационарной задачи показало, что 400 гармоник вполне достаточно для получения приемлемой точности расчётов. Для того, чтобы уменьшить вычислительные затраты, использовалась линейная интерполяция по значениям решений, полученных соответственно для 40-ой и 400-ой гармоник.

Поскольку применение разностной схемы для расчёта нестационарной задачи приводит к ненулевой правой части в уравнении (1), при использовании ВМГЭ применяется разложение функции тока в ряд Фурье.

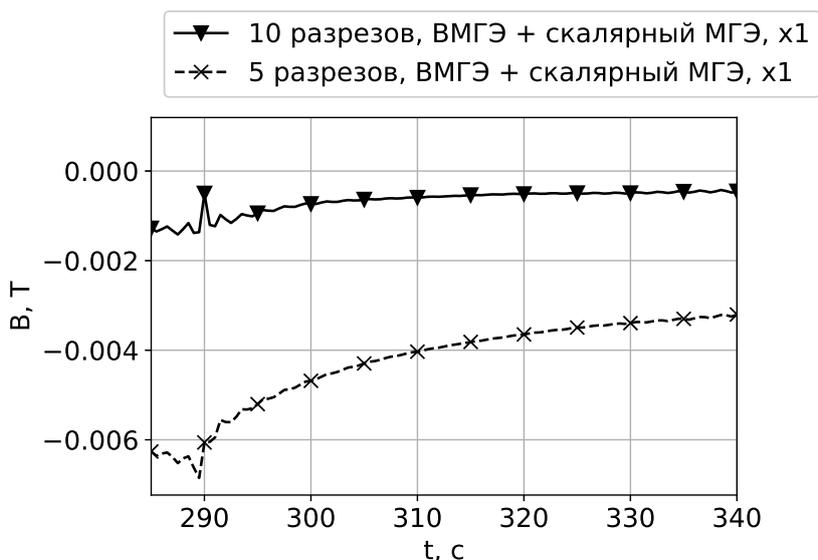


Рисунок 3 – Сравнение расчётов: от решения, полученного для 15-ти разрезов, отнимаются решения, полученные для 10-ти и 5-ти разрезов

Расчёты магнитной индукции проводились для 5-ти, 10-ти и 15-ти разрезов. На рисунке 3 представлены графики зависимостей разностей полученных значений магнитной индукции от времени: от решения, полученного для 15-ти разрезов, отнимаются оставшиеся два решения. Можно видеть, что начиная с момента времени в 310 секунд отличие между решениями, полученными для 10-ти и 15-ти разрезов магнита, оказывается не существенным. Данное наблюдение говорит о том, что меньшего запаздывания поля магнитной индукции для числа разрезов большего 10 добиться не удастся.

Заключение

1. Разработана вычислительная схема на основе ВМГЭ, допускающая совместное использование со скалярным МГЭ и МКЭ для учёта вихревых токов в проводящих подобластях. Полученная схема позволяет избавиться от необходимости построения пространственной сетки при учёте вихревых токов в однородных и изотропных проводящих подобластях.
2. Разработан новый подход к численному интегрированию сингулярных функций ВМГЭ. Приведённый в диссертационной работе подход позволяет свести вычисления к интегралам от потенциала простого и двойного слоёв, что существенно упрощает программную реализацию формирования локальных матриц ВМГЭ.
3. Реализован быстрый мультипольный метод с применением разработанного алгоритма вращения коэффициентов мультипольного ряда для скалярного МГЭ. На основе исследования расхода памяти и времени работы этой реализации показана целесообразность применения быстрого мультипольного метода для оптимизации ВМГЭ.
4. Разработан метод учёта симметрии расчётных подобластей и источников электромагнитного поля относительно координатных плоскостей для оптимизации ВМГЭ. Данный метод позволяет избавиться от необходимости введения неизвестных на плоскости симметрии и существенно сократить объём требуемых вычислений.
5. Выполнена программная реализация разработанных вычислительных схем, алгоритмов и методов и встроена в программный комплекс Quasar.
6. Проведён анализ эффективности разработанных алгоритмов и вычислительных схем. Решены задачи моделирования затухания вихревых токов при включении тока в дипольном магните сложной формы.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из Перечня ВАК ведущих рецензируемых научных изданий для опубликования основных результатов диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

1. Сивак С. А., Ступаков И. М., Кондратьева Н. С. Комбинированный векторный метод конечных и граничных элементов для задачи распространения электромагнитного поля с учетом вихревых токов // Научный вестник

- Новосибирского государственного технического университета. – 2018. – № 4. – С. 79–90.
2. Сивак С. А., Рояк М. Э., Ступаков И. М. Использование метода быстрых мультиполей при оптимизации метода граничных элементов для решения уравнения Гельмгольца // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 83–100.
 3. Сивак С.А., Рояк М.Э., Ступаков И.М., Алексахин А.С., Вознюк Е.С. Использование метода граничных элементов при решении уравнения Гельмгольца для задачи акустики // Информационно-управляющие системы. – 2021. № 2. С. 13–19.
 4. Сивак С. А. Оценка погрешности двумерного численного моделирования задач теплопроводности для тонких пластин // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 2015. – № 2. – С. 56–67.

Статьи в сборниках трудов конференций.

1. Sivak S. A., Royak M. E., Stupakov I. M. Coupling of Vector and Scalar Boundary Element Methods. // 2021 XV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems Of Electronic Instrument Engineering (APEIE) – 2021 – P. 616-620.
2. Сивак С., Рояк М. О возможности применения метода быстрых мультиполей для оптимизации векторного метода граничных элементов // Наука. Технологии. Инновации. – 2019. – С. 145–149.
3. Сивак С., Рояк М. Использование совместной постановки векторных конечных и граничных элементов для моделирования распространения электромагнитного поля // Наука. Технологии. Инновации. – 2017. – С. 148–150.
4. Sivak S., Numerical Modeling of Time-Harmonic Electromagnetic Fields and Wireless Transmission of Electromagnetic Energy // Progress through Innovation. – 2014. – P. 24–24.
5. Сивак С. А. Разработка программ на основе векторного метода граничных элементов для моделирования электромагнитного поля с учётом вихревых токов // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014). Т. 6. – 2014. – С. 207–215.

Подписано в печать 15.04.2022 г. Формат 60 x 84 x 1/16

Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Печ. л. 1.5.

Заказ №918

Отпечатано в типографии

Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383) 346-08-57