

На правах рукописи



Ступаков Илья Михайлович

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
МАГНИТОСТАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новосибирск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Рояк Михаил Эммануилович

Официальные оппоненты: **Каледин Валерий Олегович**, доктор технических наук, профессор, Новокузнецкий институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет», декан факультета информационных технологий;
Золотарев Константин Владимирович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий научно-исследовательским сектором

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «**Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук**»

Защита состоится **2 июня** 2016 года в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте <http://nstu.ru>.

Автореферат разослан « » апреля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Фаддеев Андрей Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Актуальность темы следует из необходимости высокоэффективных методов численного моделирования при проектировании технических устройств. С ростом сложности технических устройств растут и требования к точности требуемых для их проектирования расчетов. Так, при проектировании современных ускорительных магнитов зачастую требуется вычисление магнитного поля с точностью до долей процента. Для получения требуемой точности с использованием метода конечных элементов требуются подробные сетки очень высокого качества. Особенно остро эта проблема проявляется в задаче автоматической оптимизации формы ускорительных магнитов, когда требуется постоянно перестраивать сетку и вычислять производные минимизируемого функционала в зависимости от оптимизируемых параметров геометрии магнита. Сохранять в этих условиях качество конечноэлементной сетки, с учетом того, что сильные изменения сетки будут крайне негативно отражаться на процессе минимизации, становится весьма нетривиальной задачей. Поэтому в основном рассматривают решение либо двухмерных задач оптимизации, либо ограничиваются линейной задачей магнитостатики, полагая коэффициент магнитной проницаемости независимым от поля.

Применение подхода с совместным использованием методов конечных и граничных элементов позволяет избавиться от необходимости построения сетки в большей части расчетной области, что дает возможность значительно упростить построение сетки. Еще одним преимуществом такого подхода является возможность учета неограниченной внешней области естественным образом, без необходимости задания удаленной границы. Помимо этого, применение метода граничных элементов позволяет получить значительно более гладкое решение, менее чувствительное к особенностям сетки, что улучшает сходимость методов оптимизации.

Используемые в настоящее время для расчетов ускорительных магнитов программные комплексы, такие как MERMAID, Opera3D, MASTAC и ANSYS, не используют метод граничных элементов. В разработанном CERN программном комплексе ROXIE применяется совместный метод конечных и граничных элементов, однако используется менее эффективная постановка с векторным магнитным потенциалом.

Цель работы состоит в разработке и реализации методов численного моделирования для эффективного решения задач магнитостатики, возникающих при проектировании технических устройств. В соответствии с поставленной целью предусмотрено решение следующих задач.

1. Разработать вычислительную схему с возможностью декомпозиции расчетной области на подобласти, позволяющую выбирать способ аппроксимации в каждой подобласти, с возможностью использования коэффициента магнитной проницаемости, зависящего от магнитного поля.

2. Разработать эффективные методы вычисления магнитного поля токовых обмоток в однородном пространстве.
3. Исследовать возможность моделирования возмущений магнитного поля внутри помещений.
4. Исследовать эффективность различных вариантов решения задачи оптимизации геометрии ускорительных магнитов.

Научная новизна работы:

1. Разработана вычислительная схема для совместного использования конечных и граничных элементов при численном решении задач магнитостатики на основе модели с полным и неполным скалярными потенциалами.
2. Разработаны и реализованы эффективные вычислительные схемы метода граничных элементов на основе мультипольного разложения.
3. Разработан исследовательский программный комплекс Quasar, в котором реализована технология автоматического согласования базисных функций и расчета локальных матриц, для которой необходимо задать только выражения для локальных базисных функций.

Методы исследования основаны на использовании метода конечных и граничных элементов для решения трехмерных нелинейных задач магнитостатики, быстрого мультипольного метода для ускорения метода граничных элементов, методов многомерного нелинейного программирования для оптимизации геометрии ускорительных магнитов.

На защиту выносятся:

1. Вычислительная схема для решения трехмерных нелинейных задач магнитостатики, допускающая совместное использование конечных элементов в подобластях с полным скалярным магнитным потенциалом и граничных элементов в подобластях с неполным скалярным магнитным потенциалом, позволяющая учитывать нелинейные свойства ферромагнетиков и условия симметрии моделируемого процесса.
2. Результаты исследований эффективности мультипольной реализации метода граничных элементов, на примере решения задачи с большим количеством ферромагнитных объектов.
3. Эффективные алгоритмы вычисления векторного магнитного потенциала и индукции магнитного поля токовых обмоток в однородном пространстве.
4. Объектно-ориентированный программный комплекс Quasar, реализующий все описанные в работе вычислительные схемы и алгоритмы.

Достоверность результатов обеспечивается корректным применением доказанных теоретических положений, апробированных методов, тестированием разработанных программ, верификацией результатов на модельных задачах, путем независимого решения их различными методами, сравнением решений задач с решениями других авторов, сравнением результатов моделирования с результатами экспериментальных электромагнитных измерений.

Практическая значимость и реализация результатов

Практическая значимость работы состоит в возможности использования разработанных математических моделей, численных методов и реализующего их комплекса программ Quasar при решении задач проектирования и автоматической оптимизации геометрии магнитов в ускорителях заряженных частиц.

Результаты проведенных исследований и разработанное программное обеспечение нашли практическое применение в учебном процессе на факультете прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», при создании и оптимизации геометрии магнитных систем ускорителей заряженных частиц в ФГБУН Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, что подтверждается соответствующими документами о внедрении и были использованы при выполнении следующих работ:

- Хоздоговорной работы «Конечноэлементные исследования магнитных полей косинусных магнитов» (2009 г., ИЯФ СО РАН).
- Государственного контракта № 14.740.11.0709 (разработка комплекса программ для автоматизации 3D проектирования дипольных магнитов) от 12 октября 2010 г.
- Договора с компанией Samsung по теме «Sophisticated Modeling of Indoor Magnetic Field Disturbance» (Сложное моделирование распределения геомагнитного поля в здании) за 2011-2012 гг.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что исследована эффективность различных вычислительных схем с совместным использованием конечных и граничных элементов.

Личный вклад автора заключается в формулировке математической модели, разработке и реализации вычислительных схем, получении аналитических выражений для используемых потенциалов, проведении вычислительных экспериментов, разработке комплекса программ Quasar для решения трехмерных нелинейных задач магнитостатики.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука Технологии Инновации» (Новосибирск, 2006, 2010, 2012 и 2013), Всероссийской конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2009), XVII международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 2010), VII

Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых (Санкт-Петербург, 2010), Российской научно-технической конференции «Обработка информационных сигналов и математическое моделирование» (Новосибирск, 2012), I Всероссийском конгрессе молодых ученых (Санкт-Петербург, 2012), международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (Новосибирск, 2012 и 2014), международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014).

Публикации: основные положения диссертационной работы опубликованы в 12 работах, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК, 8 статей в сборниках трудов, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и двух приложений. Общий объем основной части составляет 101 страницу и включает 42 рисунка, 3 таблицы и список использованных источников из 88 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава содержит математические модели и методы решения трехмерных задач магнитостатики. Рассматриваются модели с использованием полного и неполного скалярных магнитных потенциалов, а также модель с их совместным использованием, предложенные в работах Carpenter, Zienkiewicz, Simkin и Соловейчика. Описана модификация моделей, позволяющая учитывать постоянные магниты и использовать методы конечных и граничных элементов.

Предположим, что расчетная область $\Omega = \Omega_R \cup \Omega_T = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$, где Ω_R – область с неполным потенциалом, а Ω_T – область с полным потенциалом, $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$. Через Γ_{TR} обозначим границу между областями с полным и неполным потенциалами. Тогда вектора напряженности и индукции магнитно поля в Ω_i можно представить в следующем виде:

$$\vec{\mathbf{H}}_i = \begin{cases} -\text{grad } u_i, & \text{если } \Omega_i \subset \Omega_T, \\ \vec{\mathbf{H}}_s(\mathbf{x}) - \text{grad } u_i, & \text{если } \Omega_i \subset \Omega_R, \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_i = \mu_i \vec{\mathbf{H}}_i + \mu_0 \vec{\mathbf{M}}_i, \quad (2)$$

где $\vec{\mathbf{H}}_s$ – внешнее поле, намагниченности $\vec{\mathbf{M}}_i$ будем считать постоянными всегда, а магнитную проницаемость μ_i , если $\Omega_i \subset \Omega_R$. Скалярный магнитный потенциал u_i при этом должен удовлетворять уравнению

$$-\text{div } \mu_i \text{grad } u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i. \quad (3)$$

Для простоты будем полагать, что в задаче отсутствуют условия симметрии. Тогда условия на границах можно записать в виде

$$\gamma_0^i u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i \cap \partial\Omega, \quad (4)$$

$$\gamma_0^i u_i(\mathbf{x}) - \gamma_0^j u_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ij}/\Gamma_{TR}, \quad (5)$$

$$\gamma_0^i u_i(\mathbf{x}) - \gamma_0^j u_j(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ij} \cap \Gamma_{TR}, \quad (6)$$

$$\mu_i \gamma_1^i u_i(\mathbf{x}) + \mu_j \gamma_0^j u_j(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + f_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ij}, \quad (7)$$

где γ_0 и γ_1 – следы Дирихле и Неймана соответственно, а

$$f_i = \begin{cases} \mu_0 \vec{\mathbf{M}}_i \cdot \vec{\mathbf{n}}_i, & \text{если } \Omega_i \subset \Omega_T, \\ \left(\mu_0 \vec{\mathbf{M}}_i + \mu_i \vec{\mathbf{H}}_s \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_i, & \text{если } \Omega_i \subset \Omega_R. \end{cases} \quad (8)$$

Разрыв потенциала Θ при этом должен удовлетворять на границе Γ_{TR} уравнению

$$-\text{grad } \Theta(\mathbf{x}) \times \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{H}}_s(\mathbf{x}) \times \vec{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ij} \cap \Gamma_{TR}. \quad (9)$$

Приводится изложение метода граничных элементов с вариационной постановкой в форме Галеркина, основанное на работах Steinbach. Рассматриваются постановки для внешних и внутренних задач Дирихле и Неймана и постановка с оператором Стеклова-Пуанкаре, удобная для использования совместно с методом конечных элементов. Кратко изложен метод конечных элементов.

Получена итоговая вариационная постановка для задачи магнитостатики.

Домножив уравнение (7) на пробную функцию v и просуммировав по всем границам, можно получить уравнение неразрывности потоков

$$\sum_i \left\langle \mu_i \gamma_1^i u_i, \gamma_0^i v \right\rangle_{\Gamma_i} = \sum_i \left\langle f_i, \gamma_0^i v \right\rangle_{\Gamma_i}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (10)$$

где через $\langle a, b \rangle_X$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(X)$, а через $H_0^1(\Omega)$ обозначено подпространство $H^1(\Omega)$ в котором функции равны нулю на $\partial\Omega$.

Для выполнения уравнения (3) подставим в эту сумму выражение для потоков через оператор Стеклова-Пуанкаре. Если аппроксимация в Ω_i осуществляется с использованием граничных элементов, то

$$\langle \mathbf{V}_i t_i, w \rangle_{\Gamma_i} - \left\langle \widehat{\mathbf{K}}_i \gamma_0^i u_i, w \right\rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (11)$$

$$\mu_i \left\langle \widehat{\mathbf{K}}_i' t_i, \gamma_0^i v \right\rangle_{\Gamma_i} + \mu_i \left\langle \mathbf{D}_i \gamma_0^i u_i, \gamma_0^i v \right\rangle_{\Gamma_i} = \left\langle \mu_i \gamma_1^i u_i, \gamma_0^i v \right\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (12)$$

где \mathbf{V} и \mathbf{K} – граничные интегральные операторы простого и двойного слоя, а \mathbf{D} – гиперсингулярный граничный интегральный оператор. Если для аппроксимации

используются конечные элементы, то

$$\langle \mu_i \text{grad } u_i, \text{grad } v \rangle_{\Omega_i} = \left\langle \mu_i \gamma_1^i u_i, \gamma_0^i v \right\rangle_{\Gamma_i}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (13)$$

При этом функции u_i должны принадлежать подпространству $H_0^1(\Omega)$, в котором функции удовлетворяют условиям (5) и (6).

Для поиска функции Θ удовлетворяющей уравнению (9), можно решить следующую вариационную задачу:

$$\langle \text{grad}_{\Gamma} \Theta, \text{grad}_{\Gamma} v \rangle_{\Gamma_{TR}} = - \left\langle \vec{\mathbf{N}}_s, \text{grad}_{\Gamma} v \right\rangle_{\Gamma_{TR}}, \quad \forall v \in H_0^{1/2}(\Gamma_{TR}). \quad (14)$$

Выше предполагалось, что в задаче отсутствуют условия симметрии. Однако задачи магнитостатики часто обладают симметрией, учет которой позволяет значительно сократить вычислительные затраты. При решении задач методом конечных элементов для учета симметрии, как правило, используются краевые условия. Аналогичный подход возможен и при использовании метода граничных элементов, но поскольку на краевом условии необходимо аппроксимировать неизвестный след, точность при таком подходе оказывается несколько хуже, чем при решении полной задачи без симметрии. Особенно это заметно в часто встречающейся в магнитостатике ситуации, когда требуется выдавать решение прямо на плоскости симметрии.

Другим, часто более выгодным в случае метода граничных элементов, способом учета симметрии является использование базисных функций, обладающих требуемой симметрией. При таком подходе не требуется сетка на краевом условии, а решение в точности совпадает с решением задачи без симметрии. Несмотря на то, что затраты на сборку матриц при таком подходе могут быть выше, чем в случае с краевыми условиями, за счет уменьшения числа неизвестных суммарные вычислительные затраты оказываются существенно меньше.

Изложен полуаналитический способ вычисления производных решения по параметрам геометрии. Система уравнений для определения неизвестных весов при базисных функциях, в случае зависящего от поля коэффициента магнитной проницаемости, является нелинейной. Если продифференцировать по параметру геометрии эту систему уравнений и перегруппировать слагаемые, можно получить линейную систему уравнений для определения производных, что позволяет значительно сократить затраты на вычисление градиента решения в методе конечных элементов

Приводится изложение метода декомпозиции Finite Element Tearing and Interconnecting, основанное на работах Langer и Pechstein. Этот метод позволяет получить более эффективную схему совместного применения методов конечных и граничных элементов. Изложен основанный на работе Klawonn и Widlund подход к предобуславливанию получившейся задачи, модифицированный для применения к нелинейной задаче магнитостатики.

Вторая глава посвящена вычислению потенциалов. Рассматривается метод вычисления граничноэлементных сингулярных и близких к сингулярным интегралов путем выделения особенности в отдельный независимый от плотности потенциала интеграл. Приводится вывод аналитических выражений для требуемых интегралов.

Предложен метод для вычисления поля от токовых обмоток, основанный на использовании закона Био-Савара-Лапласа. Согласно этому закону, поле от токов можно записать в виде интеграла

$$\vec{\mathbf{H}}_s(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\Omega} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x}. \quad (15)$$

где $\vec{\mathbf{J}}$ – плотность тока.

Пусть токовая обмотка может быть представлена в виде некоторого тела, осью которого является гладкая кривая C , и во всех сечениях, перпендикулярных этой оси получается один и тот же многоугольник S . Вектор тока в плоскости сечения постоянный и направлен перпендикулярно сечению.

Пусть кривая, вдоль которой тиражируется сечение, задана в виде $\vec{\mathbf{p}}(s)$, где s – естественный параметр кривой. Тогда можно ввести систему координат (s, a, b) , связанную с кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(s) + a\vec{\mathbf{n}}(s) + b\vec{\mathbf{b}}(s), \quad (16)$$

где $\vec{\mathbf{n}}(s)$ – вектор главной нормали, а $\vec{\mathbf{b}}(s)$ – вектор бинормали.

В этой системе координат поле интеграл для вычисления поля $\vec{\mathbf{H}}_s$ можно преобразовать к виду

$$\vec{\mathbf{H}}_s(\mathbf{y}) = \frac{I}{4\pi} \int_C dl \left(\oint_{\partial S} \frac{1 - \kappa a}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\vec{\mathbf{l}} + \kappa \vec{\mathbf{b}} \int_S \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS \right). \quad (17)$$

где I – плотность тока, а κ – кривизна кривой.

Для вычисления внутренних интегралов в этом выражении используется переход к контурным интегралам через теорему Стокса. С учетом того, что сечение является многоугольником, их можно записать как сумму интегралов по ребрам. Для этого будем использовать специальную, связанную с ребром, систему координат (u, v) , где за начало координат принята проекция точки \mathbf{y} на плоскость сечения, ось u направлена перпендикулярно ребру, а ось v сонаправлена с ним.

Введем следующие обозначения: \mathbf{p}_k и \mathbf{p}_{k+1} – начало и конец k -го ребра, l_k – его длина, $\vec{\mathbf{e}}_k$ – касательный вектор, (u_k, v_k) – координаты начала ребра в системе (u, v) , а через h обозначено расстояние от точки \mathbf{y} до плоскости сечения.

Используя эти обозначения, можно получить выражение для вычисления первого внутреннего интеграла в формуле (17)

$$\oint_{\partial S} \frac{1 - \kappa a}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{l} = \sum_k \vec{\mathbf{e}}_k \left[J_{0,k} \ln \left(\frac{v_k + l_k + |\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{y}|}{v_k + |\mathbf{p}_k - \mathbf{y}|} \right) - J_{v,k} (|\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{y}| - |\mathbf{p}_k - \mathbf{y}|) \right], \quad (18)$$

где $J_{0,k}$ и $J_{v,k}$ определяются из того, что на k -ом ребре должно выполняться соотношение $1 - \kappa a = J_{0,k} + v J_{v,k}$.

Для вычисления второго интеграла можно использовать следующее выражение

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} = \sum_k u_k \ln \left(\frac{v_k + l_k + |\mathbf{p}_k - \mathbf{y}|}{v_k + |\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{y}|} \right) - h \sum_k \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{(v_k + l_k) u_k}{u_k^2 + h^2 + h|\mathbf{p}_k - \mathbf{y}|} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_k u_k}{u_k^2 + h^2 + h|\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{y}|} \right) \right]. \quad (19)$$

Для вычисления внешнего интеграла в формуле (17) можно использовать численное интегрирование с контролем точности, например метод Гаусса-Кронрода.

Изложен быстрый мультипольный метод, предложенный Greengard и Rokhlin, в применении к вычислению требующихся интегралов. Этот метод позволяет избавиться от плотных матриц в методе граничных элементов, что позволяет решать задачи с большей размерностью. Также этот метод можно использовать для существенного ускорения вычисления граничноэлементного решения в точках.

Основой метода является представление фундаментального решения уравнения Лапласа в виде следующего разложения:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x}) I_n^m(\mathbf{y}). \quad (20)$$

где $R_n^m(\mathbf{x})$ и $I_n^m(\mathbf{x})$ – шаровые функции.

Рассмотрим, для примера, задачу вычисления потенциала простого слоя. Используя разложение (20), можно записать

$$\int_{\Gamma} \frac{u(x)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_n^m I_n^m(\mathbf{y}), \quad (21)$$

где коэффициенты M_n^m вычисляются следующим образом

$$M_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} R_n^m(\mathbf{x}) u(x) d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Поскольку разложение потенциала простого слоя (21) сходится только при достаточном удалении точки \mathbf{u} от границы Γ , используется иерархическое разбиение границы Γ , позволяющее эффективно использовать разложение (21) даже в относительной близости к границе.

В третьей главе приводится описание архитектуры программного комплекса Quasar. Комплекс написан с использованием платформы .NET и языка программирования C#, что позволило реализовать расширяемую объектно-ориентированную архитектуру. Основные компоненты комплекса и связи между ними изображены на рисунке 1.

Интерфейс комплекса основан на понятии проекта, который может содержать элементы следующих типов:

- **Сетки** – поддерживается импорт тетраэдральных или смешанных сеток из программ Gmsh и TELMA или удвоение одной из уже содержащихся в проекте сеток.
- **Каталоги материалов** – есть возможность как ручного задания материалов, так и импорта каталогов из комплекса TELMA с последующей модификацией, при необходимости.
- **Токовые обмотки** – аналогично предыдущим пунктам, могут быть заданы вручную или получены путем импорта из комплекса TELMA.
- **Задачи** – могут быть созданы из содержащихся в проекте элементов. Поддерживается создание задач магнитостатики и оптимизации.

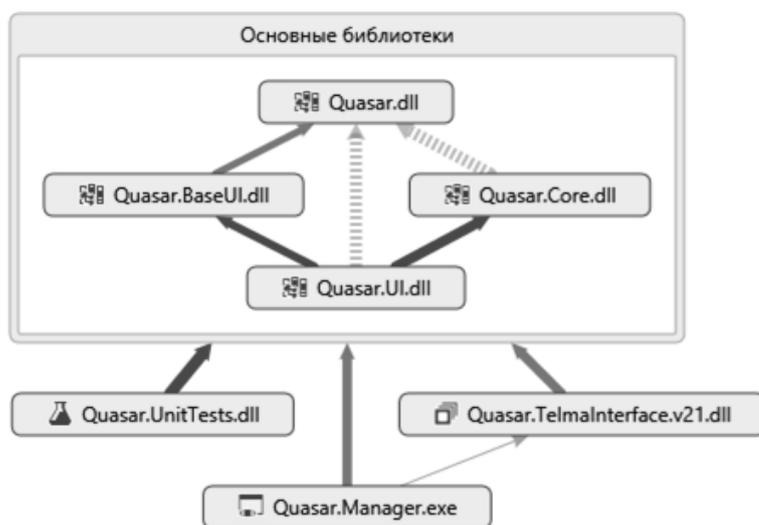


Рисунок 1.: Структура комплекса Quasar

Рассмотрим функции основных компонент комплекса Quasar:

- Quasar – базовая библиотека, которая содержит основные элементарные типы и интерфейсы, необходимые для взаимодействия с программным комплексом Quasar.
- Quasar.BaseUI – библиотека, содержащая базовые типы для работы с интерфейсом, отображением информации о процессе расчетов и распознаванием пользовательского ввода.
- Quasar.UI – библиотека содержит классы, отвечающие за работу с проектами.
- Quasar.TelmaInterface – отвечает за взаимодействие с комплексом TELMA и импорт конечноэлементных сеток из него.
- Quasar.Core – основная библиотека комплекса. Содержит код, отвечающий за решение задач магнитостатики.
- Quasar.Manager – запускаемый модуль. Содержит графический пользовательский интерфейс комплекса для операционной системы Windows, созданный на основе технологии WPF. Поддерживает работу с проектами, отображение хода решения задач, экспорт полученных результатов в виде таблиц и визуализацию трехмерных сеток (см рисунок 2).
- Quasar.UnitTests – содержит набор тестов, проверяющих работу комплекса Quasar, в том числе тестирование решения задач на полиномиальных функциях с известным ответом.

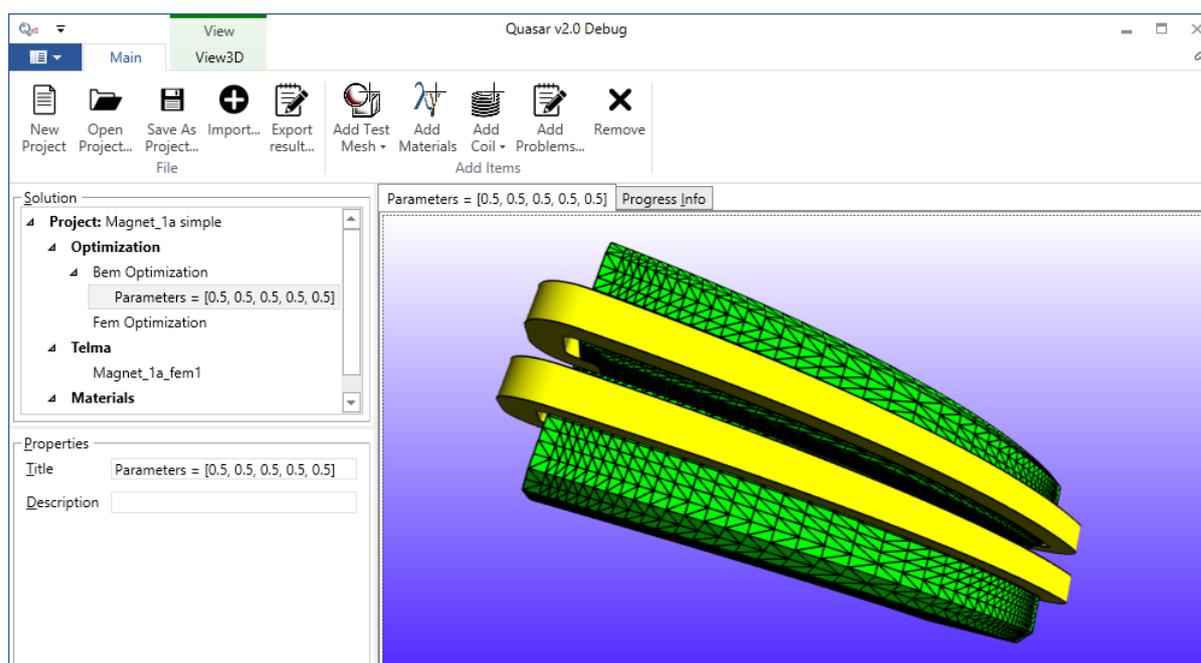


Рисунок 2.: Графический интерфейс программного комплекса Quasar

Остановимся подробнее на основном модуле комплекса – `Quasar.Core`. Он обладает следующими основными возможностями:

- Использование треугольных, четырехугольных, тетраэдральных и призматических конечных элементов, с лагранжевыми или иерархическими базисными функциями произвольного порядка.
- Использование треугольных и четырехугольных граничных элементов.
- Поддержка различных форматов хранения разреженных матриц. Возможность решения СЛАУ с использованием методов CG, LOS и FGMRES. Работа с плотными граничноэлементными матрицами через высокоэффективную библиотеку LAPACK.
- Решение трехмерных нелинейных задач магнитостатики, с возможностью выбора для каждой подобласти типа потенциала и метода аппроксимации. При этом может использоваться как одна матрица для хранения всей СЛАУ, так и отдельные матрицы для каждой подобласти.

Предложен подход к быстрому вычислению конечноэлементных матриц для случая элементов, аффинно-изоморфных мастер-элементу. Рассмотрим его на примере вычисления матрицы жесткости

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Omega_E} \text{grad } \psi_i \cdot \text{grad } \psi_j \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (23)$$

где Ω – некоторый конечный элемент.

Воспользуемся формулой для произведения градиентов, используя в качестве системы координат (q_1, q_2, q_3) локальные координаты на мастер-элементе. Тогда, используя нотацию Эйнштейна, выражение (23) можно представить в виде:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Omega_E} g^{kl} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_l} \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (24)$$

где Ω_E – мастер-элемент, а g – фундаментальный метрический тензор.

Если фундаментальный метрический тензор является постоянным на элементе, что выполняется на треугольных, прямоугольных, тетраэдральных и, в случае когда основания совпадают и параллельны друг другу, призматических элементах, можно вынести его из-под интеграла.

Таким образом, если ввести матрицы

$$\mathbf{G}_{ij}^{kl} = \int_{\Omega_E} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_l} \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (25)$$

которые могут быть вычислены один раз при помощи численного интегрирования, выражение для матрицы жесткости можно записать в следующем виде

$$\mathbf{G} = \sum_{k,l} g^{kl} \mathbf{G}^{kl}. \quad (26)$$

С учетом того, что число слагаемых в этой сумме не превышает 9 (а, учитывая симметрию, это количество можно уменьшить до 6), такой подход позволяет существенно уменьшить затраты времени на вычисление конечноэлементных матриц. Для вычисления матриц массы и конвекции можно использовать аналогичных метод.

Изложен метод построения согласованных базисов высокого порядка, через анализ локальных базисных функций на мастер-элементе. Чтобы правильно согласовать локальные базисные функции, требуется знать, как они изменяются при изменении нумерации вершин. Для базисных функций низкого порядка это можно легко сделать вручную. Но с ростом порядка базисных функций сложность ручного согласования возрастает, особенно в трехмерном случае. Предложенный подход позволяет автоматизировать эту процедуру таким образом, что достаточно задать только выражения для локальных базисных функций, а все согласования выполняются автоматически.

Четвертая глава посвящена верификации математических моделей и тестированию разработанного комплекса. В ней приводится сравнение расчетов с измерениями для моделирования искажений магнитного поля вокруг ферромагнитного объекта, сравнения результатов с программным комплексом TELMA, сравнение точности моделирования метода граничных и конечных элементов с использованием различных базисных функций и оценка эффективности быстрого мультипольного метода при решении задачи с большим количеством ферромагнитных объектов.

Для тестирования разработанных методов проведем их сравнение между собой при расчете искажений магнитного поля вокруг T-образной балки. Использовались три вложенных сетки: h_1 , h_2 и h_4 . На каждой сетке для решения задачи использовались три базиса: линейный, квадратичный и кубический. Также, на первой сетке было получено решение с использованием граничных элементов в воздушной области. За точное было принято решение с использованием кубических базисных функций на подробной сетке.

На рисунке 3 изображено поведение относительной погрешности с использованием различных методов на грубой сетке. При этом для вычисления поля \vec{H} в методе конечных элементов использовались согласованные результаты. Как видно из рисунка, метод конечных элементов при использовании линейного базиса дает погрешность порядка 10%. В то же время с использованием граничных элементов в воздушной среде погрешность на линейном базисе не превышает 0.5%.

В таблице 1 показано поведение погрешности на различных сетках. Отличие порядков сходимости от теоретических может быть объяснено использованием

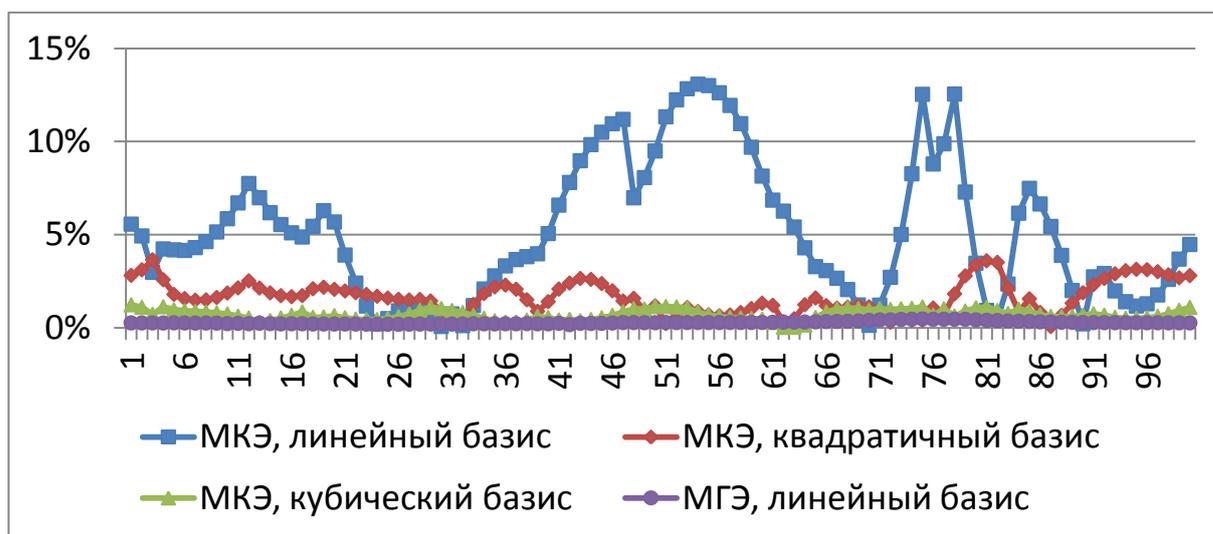


Рисунок 3.: Относительная погрешность при расчете Т-образной балки на грубой сетке

согласованных результатов для сглаживания решения в методе конечных элементов.

Для тестирования эффективности метода граничных элементов с использованием быстрого мультипольного разложения рассматривается задача о вычислении искажений магнитного поля Земли большим количеством металлических объектов. В модели задано 319 металлических прутьев с квадратным сечением 2×2 см, относительная магнитная проницаемость металла задана равной 1000.

Таблица 1.: Относительная погрешность при расчете Т-образной балки на вложенных сетках

Метод	Сетка	Погрешность, %
МКЭ, линейный базис	h_1	8.86
МКЭ, линейный базис	h_2	4.30
МКЭ, линейный базис	h_4	3.24
МКЭ, квадратичный базис	h_1	2.47
МКЭ, квадратичный базис	h_2	0.92
МКЭ, квадратичный базис	h_4	0.33
МКЭ, кубический базис	h_1	0.83
МКЭ, кубический базис	h_2	0.18
МГЭ, линейный базис	h_1	0.24

Таблица 2.: Вычислительные затраты быстрого метода граничных элементов

Количество степеней свободы	Время сборки матриц	Полное время решения	Память
22364	561 с.	1338 с.	2150 МБ
41156	845 с.	2007 с.	3014 МБ
77768	1435 с.	3023 с.	5433 МБ
151676	2730 с.	5944 с.	9699 МБ

При решении этой задачи даже на очень грубой сетке обычным МГЭ затраты времени и памяти становятся значительно больше, чем при использовании ускоренного подхода. Так, прямой метод требует только на сборку матриц более часа времени и более 4 ГБ памяти. Использование МКЭ для решения этой задачи также затруднительно – поскольку требует построения сетки в воздухе между объектами. Применение же быстрого МГЭ позволяет решить эту задачу даже на относительно подробной сетке за приемлемое время. Как видно из таблицы 2, для быстрого МГЭ рост затрат времен и памяти при дроблении сетки близок к линейному, тогда как у обычного МГЭ он является квадратичным.

Для тестирования подбора геометрии будем использовать задачу определения параметров металлического прямоугольного параллелепипеда в постоянном магнитном поле. Для задания параллелепипеда будем использовать 6 параметров, из которых первые 3 параметра отвечают за смещение, а остальные за размеры параллелепипеда.

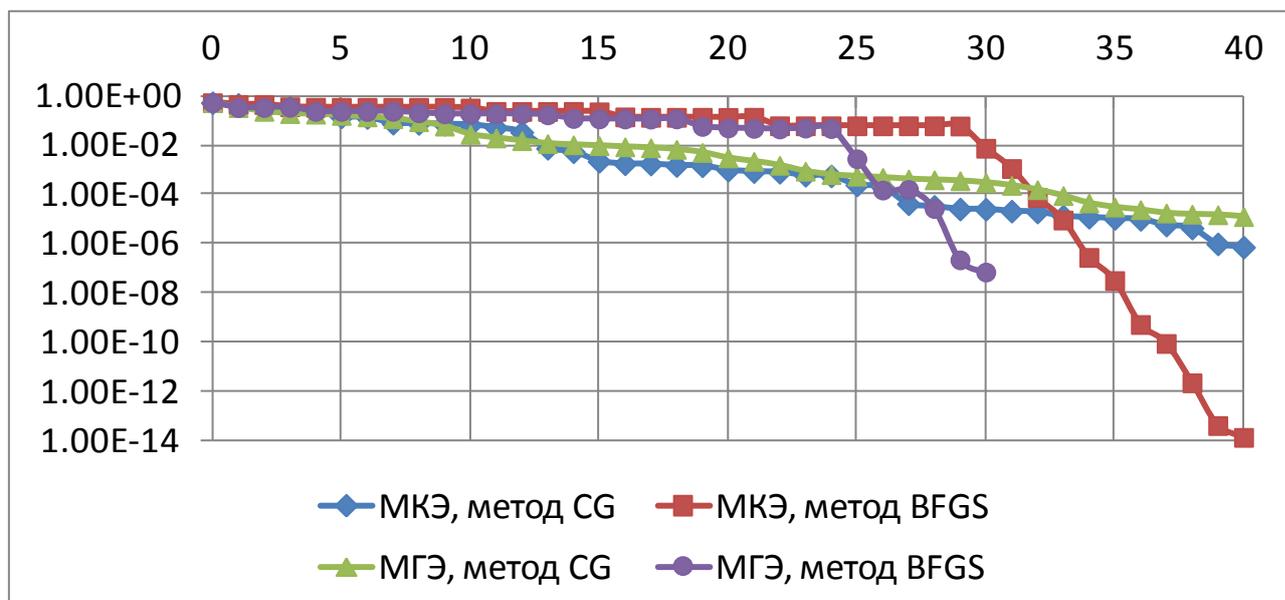


Рисунок 4.: Поведение погрешности в процессе подбора геометрии на тестовой задаче

В качестве минимизируемого функционала будем использовать отклонение значений магнитной индукции от значений полученных при точных параметрах в некотором наборе точек. Для нахождения минимума будем использовать методы сопряженных градиентов (CG) и квазиньютоновский метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (BFGS). Процесс сходимости, в зависимости от способа аппроксимации решения в воздухе, изображен на рисунке 4.

Из рисунка видно, что метод BFGS до некоторого момента сходится существенно медленнее чем метод CG, а затем скорость сходимости значительно возрастает. Впрочем, поскольку на реальных задачах достичь такой точности, как правило, невозможно, использование метода CG обычно выгоднее. Также отметим, что процесс минимизации с использованием метода конечных элементов является весьма чувствительным к сетке, а если точки, в которых сравнивается магнитная индукция, находятся в зависящей от параметров части сетки, оптимизация, как правило, вообще не сходится из-за разрывности функционала

В пятой главе приводятся примеры решения практических задач с использованием разработанного комплекса. Изложены результаты моделирования возмущений магнитного поля Земли ферромагнитными элементами конструкции здания. Приводятся результаты автоматизированной оптимизации геометрии С-образного дипольного магнита, полученные при использовании совместного метода конечных и граничных элементов.

При проектировании дипольного магнита для оценки его качества используются некоторые интегральные характеристики поля. Например, критерием качества поворотного магнита может служить близость распределения вдоль радиуса эффективной длины магнита к некоторой заданной зависимости $L(r)$ во всем рабочем диапазоне токов. Под эффективной длиной магнита на токе будем понимать интегральную величину

$$l_{eff}^I(R_c) = \frac{1}{B_0} \int_C |\vec{\mathbf{B}}| dl \quad (27)$$

где C – окружность, соосная с центром магнита, R_c – радиус этой окружности, B_0 – модуль поля в центре полюса. Фактически (27) задает некоторую зависимость $l_{eff}^I(R_c)$, сравнивая которую с заданной кривой $L(r)$ в рабочем диапазоне токов, определяют эффективность магнита.

Процесс оптимизации геометрии дипольного магнита вручную состоит из двух этапов – на первом подбираются фаски и шиммы на двумерном сечении магнита, при этом для каждого варианта приходится вручную задавать геометрию и решать двухмерные задачи магнитостатики для некоторого набора токов. На втором этапе подбирается форма торцевых фасок и для оценки качества варианта приходится задавать и решать уже трехмерные задачи. При этом не всегда удается достичь требуемого результата на втором этапе только подбором торцевой фаски – тогда приходится возвращаться к оптимизации геометрии сечения магнита. Поскольку вышеописанную процедуру приходится повторять для нескольких

токов и, возможно, для нескольких характеристик стали, то процесс оптимизации вручную становится трудоемким и долгим, требующим автоматизации.

Алгоритм автоматической оптимизации можно кратко описать следующим образом:

1. Задается геометрия магнита с указанием исходных обязательных параметров (зазор, максимальное количество ампер витков, максимальный ток), а также с указанием зависимостей от некоторого набора параметров. Если параметры независимы друг от друга, то для них указывается допустимый диапазон изменения. В случае взаимозависимых параметров для них указываются некоторые линейные ограничения.
2. Задается кривая $L(r)$ и область «хорошего поля», определяющие качество магнита, выбирается метод оптимизации, требуемая точность и начальные значения параметров геометрии магнита.
3. Затем строится сетка для текущих значений параметров, на этой сетке решается нелинейная задача магнитостатики. После получения решения от него вычисляется минимизируемый функционал. В том случае, если выбранный метод оптимизации требует вычисления градиента функции, решается серия задач для численного дифференцирования функционала по каждому параметру.
4. При помощи выбранного метода оптимизации вычисляется следующее приближение (значения параметров) и проверяется, достигнут ли минимум функционала с требуемой точностью. Если точность достигнута — алгоритм завершается, иначе алгоритм продолжается с построения сетки для нового набора параметров.

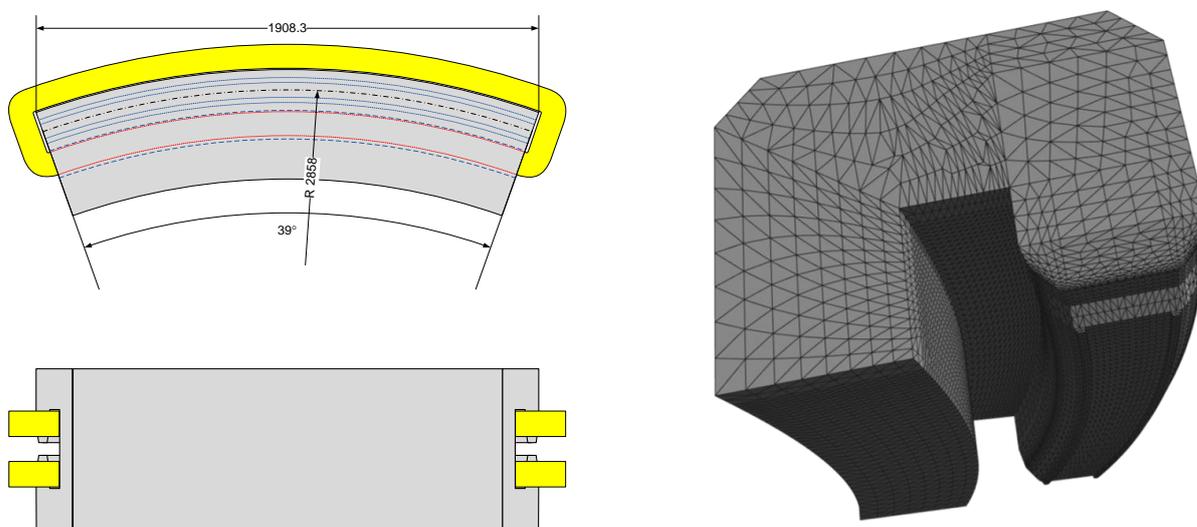


Рисунок 5.: Общий вид С-образного магнита

Общий вид рассматриваемого магнита в двух проекциях и трехмерный вид с грубой сеткой и трехмерной фаской приведены на рисунке 5. На верхнем и нижнем центральных полюсах расположено по одной обмотке с сонаправленными токами, которые могут принимать несколько значений в зависимости от режима работы. Конструкция этого магнита симметрична относительно плоскости $y = 0$, что дает возможность решать задачу в одной его половине при задании соответствующих краевых условий на плоскости симметрии. Второй плоскостью симметрии является плоскость $z = 0$, поэтому задача решается в четверти конструкции, расположенной в области $y \geq 0, z \geq 0$.

Для рассматриваемого магнита задачей оптимизации является получение постоянного соотношения эффективных длин к радиусам в апертуре магнита на диапазоне токов от 10 до 50 кА. Поскольку необходимо обеспечить именно постоянство, а не равенство какому-либо значению, т.е. минимизировать дисперсию отношений эффективных длин к радиусам, функционал можно записать в виде

$$F = D [l_{ij}], \quad (28)$$

где $l_{ij} = l_{eff}^i(p_j) / r_j$, I_i – ток из рабочего диапазона, p_j – некоторая точка из апертуры магнита, а r_j – ее радиус.

Дисперсию можно вычислять усреднением значений по некоторому набору токов и точек. Для тестирования использовались наборы из 5 токов, от 10 кА до 50 кА, с шагом в 10 кА, и из 16 точек расставленных на оси y и по границе апертуры.

Для минимизации функционала использовались метод сопряженных градиентов и метод BFGS. Процесс минимизации изображен на рисунке 6. За МКЭ обозначен вариант, в котором для аппроксимации решения использовался метод ко-

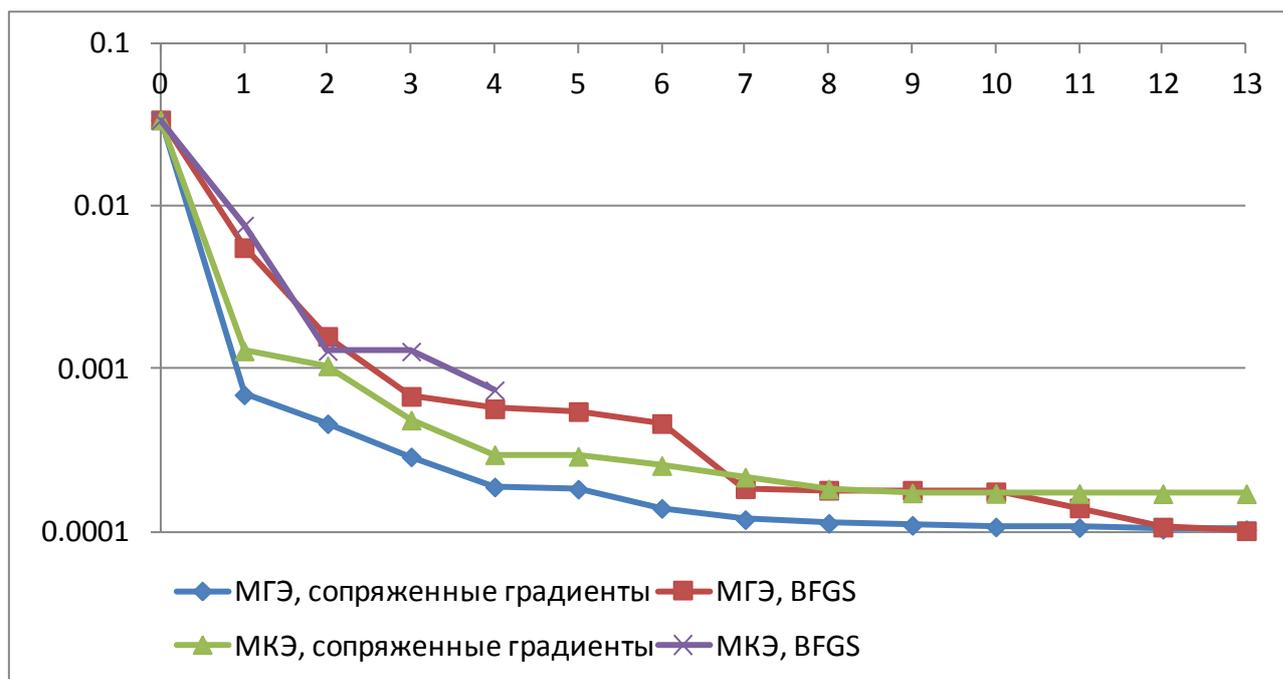


Рисунок 6.: Сравнение сходимости различных вариантов процесса минимизации

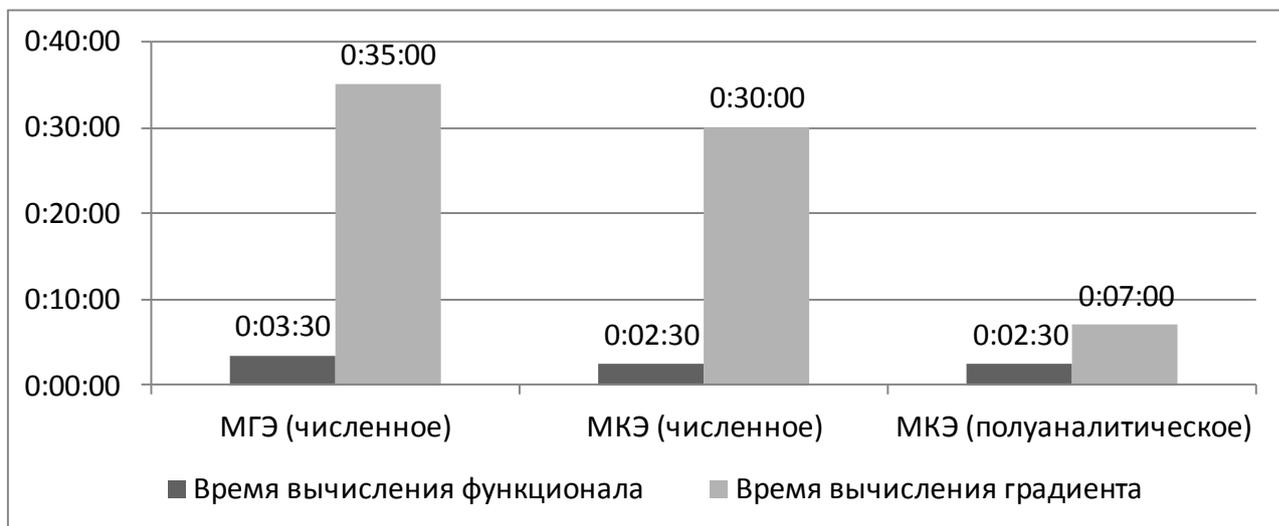


Рисунок 7.: Сравнение затраченного времени при различных методах решения прямой задачи. В скобках указан способ вычисления градиента

нечных элементов, а за МГЭ обозначены смешанный подход. При этом в случае МГЭ использовались линейные элементы, а в случае МКЭ – квадратичные элементы, поскольку при использовании в воздухе линейных конечных элементов точность вычисления функционала очень невысокая и процесс оптимизации не сходится. Из рисунка видно, что в случае МКЭ метод BFGS почти не сходится, а в случае МГЭ сходится существенно медленнее сопряженных градиентов.

При этом в случае МКЭ для вычисления градиента использовался полуаналитический подход, а в случае МГЭ – численный, поскольку при решении задачи на нескольких токах получить выигрыш от полуаналитического подхода в МГЭ не удастся. Время вычисления функционала и его градиента приводится на рисунке 7.

Полученные в результате оптимизации значения функционала и параметры геометрии приведены в таблице 3. Проверим результаты оптимизации на вложенных сетках. На рисунке 8 изображены значения функционала при найденных параметрах вычисленные различными способами. Из рисунка видно что значения функционала мало меняется при удвоении сетки, как в случае МКЭ, так и в случае

Таблица 3.: Результаты оптимизации геометрии С-образного магнита, полученные методом сопряженных градиентов

Тип аппроксимации	F	Значения параметров
МГЭ	1.01E-04	0.481, 0.461, 0.494, 0.495, 0.0928, 0.891, 0.142, 0.224, 0.44
МКЭ	1.79E-04	0.672, 0.542, 0.71, 0.246, 0.0716, 0.998, 0.219, 0.265, 0.459

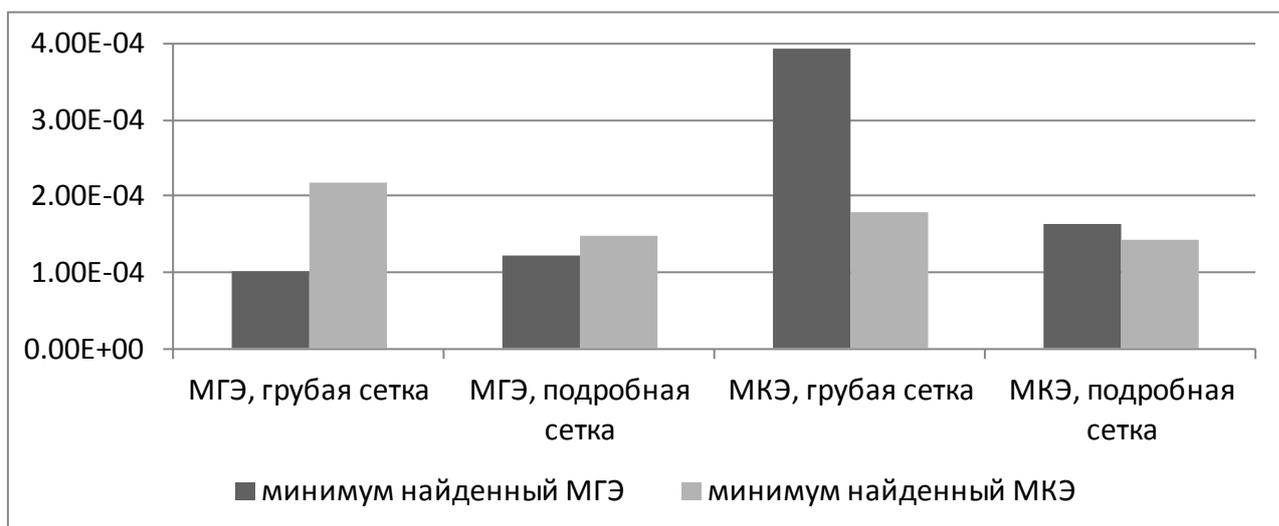


Рисунок 8.: Проверка достигнутых значений функционала на различных сетках

МГЭ. Таким образом оба полученных решения достаточно качественные. Также можно заметить, что в целом у МКЭ на грубой сетке погрешность вычисления функционала существенно выше, чем у МГЭ на аналогичной сетке.

Заключение

1. Разработана вычислительная схема для решения задач магнитостатики на основе модели с полным и неполным скалярными потенциалами, которая допускает совместное использование конечных и граничных элементов и позволяет учитывать нелинейные свойства ферромагнетиков в подобластях, аппроксимируемых методом конечных элементов. Предусмотрена возможность учета условий симметрии моделируемого процесса. Вычислительная схема апробирована при решении практических задач.
2. На основе мультипольного разложения разработаны и программно реализованы ускоренные вычислительные схемы метода граничных элементов, показана их эффективность на примере решения задачи с большим количеством ферромагнитных объектов при выполнении договора «Sophisticated Modeling of Indoor Magnetic Field Disturbance».
3. Разработаны алгоритмы вычисления векторного магнитного потенциала и индукции магнитного поля токовых обмоток в однородном пространстве, которые были использованы при выполнении хозяйственной работы «Конечноэлементные исследования магнитных полей косинусных магнитов».
4. Разработан исследовательский объектно-ориентированный программный комплекс Quasar, в котором реализованы описанные в диссертационной работе вычислительные схемы, методы и алгоритмы. Этот комплекс был использован при решении приведенных в работе задач.

5. Предложены алгоритмы оптимизации трехмерной геометрии магнитов для ускорителей заряженных частиц, основанные на использовании численного и полуаналитического вычисления производных магнитного поля по параметрам геометрии. Эти алгоритмы были использованы при выполнении государственного контракта № 14.740.11.0709 (разработка комплекса программ для автоматизации 3D проектирования дипольных магнитов).

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из Перечня ВАК ведущих рецензируемых научных изданий для опубликования основных результатов диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

1. Корсун М.М., Ступаков И.М., Рояк М.Э. Об использовании граничных элементов при моделировании электромагнитных процессов с существенным влиянием вихревых токов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. Новосибирск. – 2010. – С. 100–109.
2. Ступаков И.М., Корсун М.М., Рояк М.Э. Об учете источников электромагнитного поля в совместном методе конечных и граничных элементов // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. Санкт-Петербург. – 2010. – № 5 (69). – С. 67–71.
3. Ступаков И. М. Использование быстрого метода граничных элементов для решения задач магнитостатики / И. М. Ступаков, М. Э. Рояк // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – Санкт-Петербург. – 2012. – №5. – с. 70-74

Статьи в сборниках трудов конференций.

1. Корсун М.М., Ступаков И.М. Разработка алгоритмов вычисления напряженности поля токовых обмоток в программном комплексе MASTAC // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука Технологии Инновации». Ч. 1. – Новосибирск: НГТУ, 2006. – С. 100–102.
2. Ступаков И. М. Вычисление несобственных интегралов в методе граничных элементов для трехмерного уравнения Лапласа / И. М. Ступаков // Материалы Российской научно-технической конференции «Обработка информационных сигналов и математическое моделирование». – Новосибирск, 2012 – С. 70-73
3. Чернов А. К. Разработка алгоритмов численного интегрирования для системы моделирования на основе МГЭ / А. К. Чернов, И. М. Ступаков // Материалы XI международной конференции «Актуальные проблемы электронного

приборостроения» АПЭП-2012 - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. - Т.6. – С. 124-127

4. Ступаков И. М. Исследование возможности сокращения числа измерений магнитного поля при изучении его распределения в помещении / И. М. Ступаков, Н. С. Косьминова // Международный конкурс научных работ по приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации. Сборник трудов. – Москва. – 2012. С.83-90
5. Ступаков И. М. Исследование возможности эффективного применения численного интегрирования для конечных элементов, аффинно изоморфных шаблонному элементу / И. М. Ступаков, Н. С. Косьминова // Наука. Технологии. Инновации.: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, Новосибирск, 29 ноября-2 декабря, 2012. - Ч. 3. - С. 255-258
6. Косьминова Н. С. Оценка возможности ускорения метода граничных элементов с использованием OpenMP и AVX инструкций / Н. С. Косьминова, И. М. Ступаков ; науч. рук. М. Э. Рояк // Наука. Технологии. Инновации : материалы Всерос. науч. конф. молодых ученых, 21–24 нояб. 2013 г. : в 10 ч. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. – Ч. 3. – С. 99-102.
7. Ступаков И. М. Автоматизация построения согласованных базисов высокого порядка в методе конечных элементов / И. М. Ступаков, Н. С. Кондратьева // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014): тр. 12 междунар. конф., Новосибирск, 2–4 окт. 2014 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 6. – С. 220–222.
8. Алгоритмы оптимизации геометрии дипольных магнитов / М. Э. Рояк, И. М. Ступаков, Н. С. Кондратьева [Н. С. Косьминова], Е. И. Антохин, А.С. Клименко // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014): тр. 12 междунар. конф., Новосибирск, 2–4 окт. 2014 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 6. – С. 215–219.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

1. Рояк. М.Э., Ступаков И.М., Корсун М.М. Программное обеспечение для автоматизированного подбора геометрии дипольных магнитов (ПГДА-1). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012611280, 31 января 2012

Подписано в печать 01.04.2016 г. Формат 60 x 84 x 1/16
Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Печ. л. 1.5.
Заказ № 543

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел./факс: (383) 346-08-57