

Вагин Денис Владимирович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор,  
Соловейчик Юрий Григорьевич

Официальные оппоненты: Левин Владимир Евгеньевич, доктор технических наук, доцент, Новосибирский государственный технический университет, заместитель заведующего кафедрой прочности летательных аппаратов

Злобинский Аркадий Владимирович, кандидат технических наук, ведущий программист, ООО «Научно-техническая фирма ЗаВеТ-ГЕО»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительной математики и математической геофизики» Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится «20» сентября 2012 г. в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета.

Автореферат разослан «    » июля 2012 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Чубич Владимир Михайлович

## Общая характеристика работы

Одним из популярных, наиболее универсальных и зачастую наиболее эффективных методов численного моделирования электромагнитных полей является метод конечных элементов (МКЭ). Развитию данного метода и его использованию для решения задач электромагнетизма в последнее время было посвящено множество работ зарубежных и отечественных исследователей (А. Bossavit, В.П. Ильин, Ю.Г. Соловейчик, и др.).

Реальное моделируемое устройство или среда являются трехмерными и, как правило, неоднородными по своим электрическим и магнитным свойствам. Поэтому для получения достоверных результатов часто необходимо решать трехмерные задачи. При этом вычислительные затраты при решении многих важных для практики трехмерных задач, как правило очень велики. Существенно сократить вычислительные затраты на решение некоторых трехмерных задач позволяют так называемые квазитрехмерные подходы, использующие определенные упрощения математических моделей, описывающих трехмерные поля. Однако такие подходы во многих случаях не позволяют получить моделируемые поля с требуемой точностью. Значительно более мощным оказался метод, основанный на выделении части поля (Ю.Г. Соловейчик) – он позволяет многократно снизить вычислительные затраты без какого-либо искажения математической модели. Тем не менее, даже с применением технологии выделения поля для некоторых практических задач время счета оказывается очень большим, особенно если для получения результата требуется многократный расчет различных моделей. Логическим развитием данного метода стало многоэтапное выделение поля, позволившее еще значительно ускорить решение наиболее сложных трехмерных задач.

Большой класс задач электромагнетизма связан с моделированием геоэлектромагнитных полей (В. Л. Друскин, М.С. Жданов, В.С. Могилатов, Б.С. Светов, М.И. Эпов, Alumbaugh D.L., M. Commer, M.E. Everett, G.A. Newman и др.). Исследование таких полей как естественного, так и искусственного (т.е. возбуждаемых контролируруемыми источниками) происхождения позволяет получить информацию о структуре проводимости изучаемой среды и некоторых других геоэлектрических характеристиках – например, поляризуемости. Основными методами геоэлектрических исследований являются методы постоянного тока (МПТ), становления поля (СП), магнитотеллурического зондирования (МТЗ), а также базирующийся на изучении протекающих в среде электрохимических процессов – метод вызванной поляризации (ВП) (Y. Li, D.W. Oldenburg, В.А. Комаров, В.В. Кормильцев, и др.). Главной целью геоэлектромагнитных исследований является восстановление характеристик среды по измеренным значениям электромагнитного поля в некоторых точках пространства, то есть решение обратной задачи (М.С. Жданов, В.С. Могилатов, М.Г. Персова, А.Н. Тихонов, М.И. Эпов и др.). В свою очередь, для решения обратной задачи необходимо

многократное решение прямых задач. Поэтому в работах, посвященных решению различных задач электроразведки, очень много внимания уделяется созданию методов и алгоритмов быстрого решения именно прямых трехмерных задач.

При использовании МКЭ вычислительная сложность решения задачи определяется, главным образом, размером и свойствами матрицы конечноэлементной СЛАУ, т.е. зависит, в основном, от дискретизации расчетной области и вида используемых базисных функций. Здесь определенные преимущества (перед конечными элементами в виде прямоугольных параллелепипедов или тетраэдров) имеют шестигранные конечные элементы, сочетающие в себе возможности достаточно хорошей аппроксимации решения (как у параллелепипеидальных элементов) с хорошими возможностями описания сложных границ расчетной области (как у тетраэдральных элементов).

При создании программных комплексов, ориентированных на пользователей, являющихся специалистами в определенной прикладной области, очень важна максимальная автоматизация всех этапов решения задачи, в том числе процесса дискретизации расчетной области. Помимо того, что это избавляет пользователей, не являющихся специалистами в области вычислительной математики, от необходимости выполнять несвойственную сфере их профессиональной деятельности (и довольно непростую) работу, это важно и с точки зрения эффективности расчета, так как от качества дискретизации во многом зависит и точность получаемых результатов. Между тем, наиболее популярные программы построения сеток или конечноэлементные пакеты, включающие в себя соответствующие подсистемы (NETGEN, ANSYS), чаще всего требуют от пользователя достаточно квалифицированного участия в процессе дискретизации расчетной области.

Для некоторых типов задач автоматическое построение шестигранных сеток можно осуществлять непосредственным разбиением дискретизируемой области на шестигранные элементы. Однако при решении многих задач геоэлектрики более удобен другой подход, заключающийся в построении предварительной параллелепипеидальной сетки и ее последующей деформации. Такой подход обладает очень хорошим потенциалом для создания эффективных алгоритмов автоматической (без какого-либо участия пользователя) дискретизации расчетной области. Но для регулярных параллелепипеидальных сеток характерен следующий существенный недостаток – они содержат много «лишних» узлов, то есть узлов, не влияющих на точность решения, но приводящих к увеличению размерности конечноэлементной СЛАУ. Устранить этот недостаток позволяет использование несогласованных параллелепипеидальных сеток с так называемыми терминальными узлами.

Помимо качественной дискретизации, обеспечивающей необходимую точность (при небольших вычислительных затратах) отдельного расчета, общая

эффективность решения задачи в некоторых случаях может существенно зависеть от последующей обработки результатов соответствующих расчетов. Так происходит, например, при необходимости выдачи характеристик электромагнитного поля в виде производных полученного конечноэлементного решения. Еще более сложной является проблема получения характеристик поля в виде свертки решения довольно большого числа достаточно сложных задач – это необходимо делать, например, при численном моделировании полей вызванной поляризации на основе часто используемой феноменологической модели Cole-Cole (так называемой частотной дисперсии проводимости). В этом случае решение задачи сначала получают в частотной области, а затем переводят его соответствующим образом во временную область. Для этого необходимы специальные вычислительные процедуры, от эффективности которых во многом зависит эффективность решения всей задачи в целом, в том числе и значительное сокращение набора решаемых гармонических задач, и затраты на перевод решения из частотной области во временную.

**Основной научной проблемой**, решению которой посвящена данная диссертационная работа, является проблема разработки высокоэффективных методов численного моделирования электромагнитных полей, основанных на использовании различных вычислительных схем МКЭ и автоматизации алгоритмов построения сеток, и реализующих их программных комплексов.

#### **Цели и задачи исследования**

1. Моделирование процессов ВП в трехмерных средах на основании феноменологической модели Cole-Cole. Для этого были решены следующие задачи:

– разработаны методы моделирования трехмерных гармонических электромагнитных полей, с учетом зависимости проводимости поляризующихся объектов от частоты;

– разработаны алгоритмы перевода решения набора гармонических задач из частотной области во временную с минимизацией числа частот, на которых необходимо получать решения гармонических задач.

2. Построение трехмерных сеток в характерных для задач геоэлектromagnetизма ситуациях. Для достижения этой цели были решены следующие задачи:

– разработан алгоритм построения нерегулярных параллелепипедальных сеток с удалением «лишних» узлов;

– исследованы возможности предобусловливания систем конечноэлементных уравнений с помощью неполного разложения Холесского при моделировании геоэлектromagnetных полей на несогласованных параллелепипедальных сетках;

– разработаны методы и алгоритмы построения несогласованных параллелепипедальных сеток для решения задач геоэлектromagnetизма по технологии многоэтапного выделения поля;

– разработаны алгоритмы построения шестигранных сеток при моделировании трехмерного нестационарного электромагнитного поля, порождаемого вихревыми токами в изолированных проводящих объектах;

– разработаны методы выдачи характеристик электромагнитного поля при его расчете на сетках с шестигранными конечными элементами.

#### **Научная новизна**

1. Разработан и реализован метод конечноэлементного моделирования трехмерных процессов ВП, основанный на численном решении трехмерных гармонических задач и частотной дисперсии проводимости среды с использованием технологии выделения поля.

2. Разработан и реализован метод построения несогласованных параллелепипедальных и шестигранных сеток для решения задач геоэлектромагнетизма по технологии многоэтапного выделения поля.

3. Разработан алгоритм быстрой выдачи значений решения и его производных на шестигранном конечном элементе.

4. Разработан метод, позволяющий за счет специальной перенумерации базисных функций получать неполное разложение Холесского для матрицы конечноэлементной системы при аппроксимации эллиптического уравнения на сетках с терминальными узлами.

#### **На защиту выносятся:**

1. Конечноэлементные схемы моделирования трехмерных полей ВП, основанные на феноменологической модели Cole-Cole.

2. Методы построения несогласованных параллелепипедальных и шестигранных сеток для решения различных задач электромагнетизма.

3. Метод построения несогласованных параллелепипедальных и шестигранных сеток для технологии многоэтапного выделения поля.

4. Реализация разработанных методов в программном комплексе GeoEM и результаты его использования для решения задач геоэлектромагнетизма.

#### **Достоверность результатов**

1. Верификация разработанных вычислительных схем решения трехмерных задач геоэлектрики проводилась на горизонтально-слоистых моделях путем задания в качестве трехмерных объектов отдельных слоев.

2. Решение задач на несогласованных сетках с терминальными узлами сопоставлялось с результатами, полученными на согласованных сетках.

3. Правильность работы процедур перевода решения из частотной области во временную при реализации 3D-моделирования полей ВП по модели Cole-Cole проверялась на задачах моделирования нестационарных полей с заданным трехмерным распределением удельной проводимости в расчетной области.

4. Результаты моделирования полей ВП методом, основанным на модели Cole-Cole, сравнивались с результатами, полученными методом, основанным на задании ЭДС ВП (D.W. Oldenburg, B.C. Моисеев, Ю.Г. Соловейчик, и др.), а также с результатами, полученными другими авторами.

## **Практическая значимость работы и реализация результатов**

Предлагаемые в данной работе методы построения трехмерных дискретизаций и конечноэлементные вычислительные схемы моделирования полей ВП реализованы в программных комплексах GeoEM, IPCC, EDEM-OB. Эти программные комплексы использовались при моделировании различных геоэлектромагнитных полей при проектировании полевых электроразведочных работ, интерпретации практических данных, и при решении задач инженерной геофизики.

### **Личный вклад**

Лично автором разработаны и программно реализованы методы построения несогласованных конечноэлементных сеток с параллелепипеидальными и шестигранными ячейками. Проведен анализ точности получаемых конечноэлементных решений и вычислительной эффективности разработанных методов. Разработаны и программно реализованы алгоритмы 3D-моделирования полей ВП на основе модели Cole-Cole.

В совместных публикациях автору принадлежат следующие результаты. В работе [15] автору принадлежат алгоритмы построения несогласованных сеток с параллелепипеидальными ячейками. В работах [1-4,7,17-20] автором были проведены расчеты трехмерных электромагнитных полей и выполнена оценка точности расчетов. В работах [5,6,16] автором были построены конечноэлементные сетки, проведены конечноэлементные расчеты.

### **Апробация работы**

Основные результаты работы были представлены на Всероссийской школе-семинаре им. М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям Земли (Санкт-Петербург, 2011 г.), Российской научно-технической конференции «Наукоемкое программное обеспечение» (Новосибирск, 2011), Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (Новосибирск, 2009, 2010 гг.), международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электроники и приборостроения» (Новосибирск, 2008, 2010 гг.), Российской научно-технической конференции «Информатика и проблемы телекоммуникаций» (Новосибирск, 2008, 2009 гг.).

### **Публикации**

По результатам выполненных исследований опубликовано 20 работ, из них 7 статей в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК, 2 работы в сборниках научных трудов и 11 работ в сборниках трудов конференций.

### **Структура работы**

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников (122 наименования) и приложения. Общий объем диссертации – 162 страницы, в том числе 98 рисунков и 18 таблиц.

## Основное содержание работы

**Первая глава** диссертационной работы посвящена конечноэлементным схемам моделирования трехмерных электромагнитных полей вызванной поляризации на основе феноменологической модели Cole-Cole. В ней приведены математические модели, эквивалентные вариационные постановки и дискретные аналоги. В главе приведены исследования и верификация разработанного метода, а также его сравнение с методом, базирующемся на задании ЭДС ВП.

Для нахождения нестационарного сигнала в виде ряда Фурье для некоторого набора частот  $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  решается уравнение

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} + i\omega \sigma \mathbf{A} = \mathbf{J}^{\text{CT}}(\omega), \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}$  – это вектор-потенциал электромагнитного поля, связанный с векторами напряженности электрического поля и индукции магнитного поля соотношениями  $\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A}$  и  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  соответственно;  $\mathbf{J}^{\text{CT}}$  – это пространственное распределение вектора плотностей сторонних токов, возбуждающих электромагнитное поле, при его разложении в ряд Фурье по частотам  $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ .

При использовании технологии разделения поля на нормальную и аномальную составляющие вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}$  представляются в виде соответствующих сумм:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^n + \mathbf{A}^a$  и  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^n + \mathbf{E}^a$ . При численном моделировании геоэлектромагнитных полей в качестве нормального поля используется поле источника и горизонтально-слоистой среды (Ю.Г. Соловейчик), которое, можно получить через решение двумерных задач. А в качестве аномального поля используется добавочное поле трехмерных неоднородностей, для нахождения которого необходимо решать трехмерное уравнение

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^a + i\omega \sigma \mathbf{A}^a = (\sigma - \sigma^n) \mathbf{E}^n. \quad (2)$$

Согласно модели Cole-Cole проводимость среды является комплексным числом, зависящим от частоты  $\omega$ :

$$\sigma = \sigma(i\omega) = \sigma_\infty \left( 1 - \frac{\eta}{1 + (1 - \eta)(i\omega\tau)^c} \right). \quad (3)$$

Если комплексную проводимость  $\sigma(i\omega)$  представить в виде суммы действительной и мнимой частей  $\sigma(i\omega) = \sigma^{\text{Re}}(\omega) + i\sigma^{\text{Im}}(\omega)$  и обозначить  $\sigma(\omega) \equiv \sigma^{\text{Re}}(\omega)$  и  $\varepsilon(\omega) \equiv \frac{1}{\omega} \sigma^{\text{Im}}(\omega)$ , то уравнение (2) преобразуется к виду

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^a + i\omega \sigma(\omega) \mathbf{A}^a - \omega^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{A}^a = \left( \sigma(\omega) - \sigma^n(\omega) + i\omega (\varepsilon(\omega) - \varepsilon^n(\omega)) \right) \mathbf{E}^n. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть решено с использованием векторного МКЭ. Для решения задач с помощью узлового МКЭ используется система уравнений

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{A}^a + \left( i\omega \sigma(\omega) - \omega^2 \varepsilon(\omega) \right) \mathbf{A}^a + \left( \sigma(\omega) + i\omega \varepsilon(\omega) \right) \text{grad} V =$$

$$= \left( \sigma(\omega) - \sigma^n(\omega) + i\omega \left( \varepsilon(\omega) - \varepsilon^n(\omega) \right) \right) \mathbf{E}^n, \quad (5)$$

$$-\text{div} \left( \left( \sigma(\omega) + i\omega \varepsilon(\omega) \right) \text{grad} V \right) - i\omega \text{div} \left( \left( \sigma(\omega) + i\omega \varepsilon(\omega) \right) \mathbf{A}^a \right) =$$

$$= -\text{div} \left( \left( \sigma(\omega) - \sigma^n(\omega) + i\omega \left( \varepsilon(\omega) - \varepsilon^n(\omega) \right) \right) \mathbf{E}^n \right), \quad (6)$$

в которой под  $\Delta \mathbf{A}^a$  понимается вектор-функция, определяемая соотношением  $\Delta \mathbf{A}^a = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}^a) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}^a)$ , и вектор напряженности аномальной части электрического поля  $\mathbf{E}^a$  определяется соотношением  $\mathbf{E}^a = -i\omega \mathbf{A}^a - \text{grad} V$ .

Пусть электрический ток в генераторе изменяется по периодическому закону так, как показано на рис. 1. Это знакопеременный импульс с паузами – с равной длиной импульса и паузы  $L$  и периодом  $T=4L$ . Этот сигнал можно разложить в ряд Фурье (с учетом представления его как нечетной функции от времени  $t$ , см. рис. 1)

$$\mathbf{J}^{\text{ст}}(x, y, z, t) = \mathbf{j} \sum_k b_k \left( \sin \left( \frac{2\pi k}{T} \left( t + \frac{3}{8} T \right) \right) \right),$$

где  $b_k$  – коэффициенты ряда Фурье,  $T$  – период,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$  – пространственное распределение плотности стороннего тока.

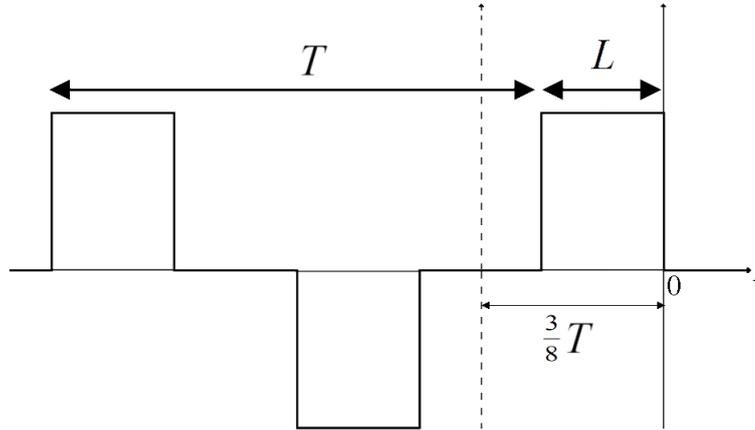


Рис. 1. Вид зондирующего сигнала

Тогда решение  $\mathbf{A}^a$  тоже может быть представлено в виде ряда

$$\mathbf{A}^a(x, y, z, t) = \sum_k b_k \left( \mathbf{a}_k^s(x, y, z) \sin \left( \frac{2\pi k}{T} \left( t + \frac{3}{8} T \right) \right) \right.$$

$$\left. + \mathbf{a}_k^c(x, y, z) \cos \left( \frac{2\pi k}{T} \left( t + \frac{3}{8} T \right) \right) \right), \quad (7)$$

где  $\mathbf{a}_k^s(x, y, z)$  и  $\mathbf{a}_k^c(x, y, z)$  определяются как  $\mathbf{a}_k^s(x, y, z) = \mathbf{A}^{a, \text{Re}}(x, y, z, \omega)$ , и  $\mathbf{a}_k^c(x, y, z) = \mathbf{A}^{a, \text{Im}}(x, y, z, \omega)$  с  $\omega = \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ .

Для нахождения суммы (7) с приемлемой точностью необходимо иметь решения  $\mathbf{a}_k^s(x, y, z)$  и  $\mathbf{a}_k^c(x, y, z)$  для многих  $k$ , что подразумевает решение задач вида (4) или (5)-(6) для соответствующих частот  $\omega_k$ . Очевидно, что из-за высокой вычислительной сложности решения трехмерной гармонической задачи выполнить соответствующие расчеты для всех частот  $\omega_k$  практически невозможно. Поэтому был использован подход, требующий решение задачи (4) или (5)-(6) только для некоторых  $\omega = \omega_k$ . Остальные значения  $\mathbf{a}_k^s(x, y, z)$  и  $\mathbf{a}_k^c(x, y, z)$  (для тех  $\omega_k$ , для которых задача не решалась) определялись с помощью интерполяции по значениям  $\mathbf{a}_k^s(x, y, z)$  и  $\mathbf{a}_k^c(x, y, z)$  решенных задач.

Вместо значений  $\mathbf{a}_k(x, y, z)$  в (7) подставим значения интерполянта

$$\mathbf{a}_k(x, y, z) \approx \sum_i^m \mathbf{q}_i(x, y, z) \varphi_i(\omega_k). \quad (8)$$

где  $m$  – число частот, по которым строится сплайн (оно же число решенных гармонических задач). В результате, решение нестационарной задачи (после изменения порядка суммирования) может быть вычислено в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^a(x, y, z, t) \approx & \sum_i^m \left( \mathbf{q}_i^s(x, y, z) \sum_k b_k \varphi_i(\omega_k) \sin \left( \omega_k \left( t + \frac{3}{8} T \right) \right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{q}_i^c(x, y, z) \sum_k b_k \varphi_i(\omega_k) \cos \left( \omega_k \left( t + \frac{3}{8} T \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Внутренние суммы в (9) не зависят от конкретной задачи и, зафиксировав точки сплайна (а значит вид базисных функций  $\varphi_i$  и значения частот  $\omega_k$  решаемых задач), получим некоторые коэффициенты, которые могут быть вычислены один раз для каждого момента времени  $t$ , после чего вычислительные затраты на получение нестационарного поля  $\mathbf{A}^a(x, y, z, t)$  для любой геоэлектрической модели будут определяться только затратами на решение  $m$  гармонических задач на соответствующих частотах.

Для рассмотренных моделей были построены вариационные постановки, конечноэлементные аппроксимации и выполнены соответствующие программные реализации. В качестве интерполянта (8) был использован сплайн с кубическими эрмитовыми базисными функции с непрерывной второй производной. По решению нескольких модельных и практических задач для сплайна был выбран оптимальный набор частот (всего 26 частот), который в дальнейшем использовался при верификации разработанного метода. Верификация вычисления нестационарного сигнала (без учета сигнала ВП)

проводилась сравнением с расчетом нестационарной задачи. Верификация вычисления сигнала ВП проводилась сравнением с результатами, полученными решением двумерных задач и с результатами полученными методом, базирующемся на задании ЭДС ВП.

В качестве примера рассмотрим модель, содержащую трехмерный объект  $[0;1200] \times [-500;500] \times [-400;-200]$  с удельной электрической проводимостью  $\sigma = 0.002 \text{ См/м}$  и коэффициентом поляризации  $\alpha = 0.1$  (параметр  $\eta$  связан с  $\alpha$  соотношением  $\eta = \alpha / (1 + \alpha)$ ). Объект расположен в полупространстве с удельной электрической проводимостью  $\sigma = 0.04 \text{ См/м}$  и коэффициентом поляризации  $\alpha = 0.01$ . Параметры  $\tau$  и  $\epsilon$  для объекта и среды одинаковы и равны  $0.1\sqrt{\pi}$  и  $0.5$  соответственно. Источником поля является горизонтальная электрическая линия (ГЭЛ) с координатами электродов А(-500;0;0) и В(500;0;0). Приемниками поля служат две горизонтальные линии MN с координатами  $M_1(-200;0;0)$   $N_1(0;0;0)$  и  $M_2(1000;0;0)$   $N_2(1200;0;0)$  соответственно. Разности потенциалов в этих линиях, полученные по модели Cole-Cole и по модели, базирующейся на задании ЭДС ВП, приведены на рис. 2. Цифрами на рисунке обозначены результаты для соответствующих приемных линий. Длина импульса и паузы  $L = 2 \text{ с}$ , соответственно период импульса  $T = 8 \text{ с}$ .

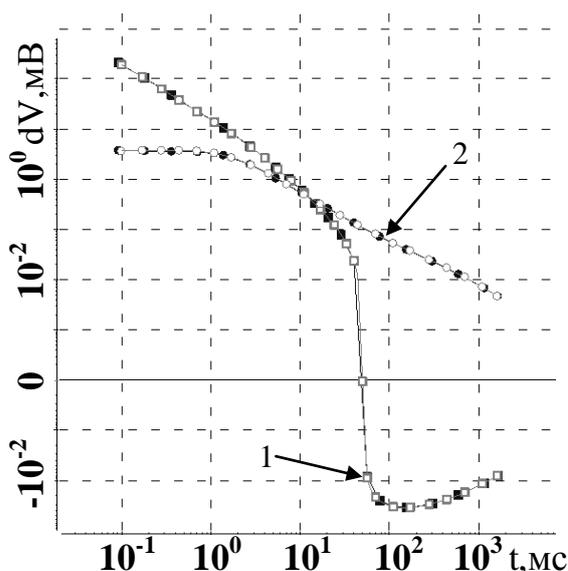


Рис. 2. Разности потенциалов в приемных линиях 1-3 полученные с использованием модели Cole-Cole (незакрашенные значки), и с использованием модели, базирующейся на задании ЭДС ВП (закрашенные значки)

Во **второй** главе диссертационной работы рассматриваются методы автоматического построения трехмерных согласованных и несогласованных конечноэлементных сеток с параллелепипедальными и шестигранными ячейками в различных характерных для задач геоэлектромагнетизма ситуациях. Во-первых, это сетки, предназначенные для решения задач геоэлектрики с различными геологическими объектами, а во-вторых, это специальные сетки,

предназначенные для учета искусственных объектов, таких как скважины, трубы и рельсы.

Для решения задач геоэлектрики с различными геологическими объектами предлагается алгоритм построения трехмерных несогласованных сеток с параллелепипеидальными и шестигранными ячейками. Входными данными алгоритма является регулярная параллелепипеидальная сетка с заданными неравномерными шагами по осям и некоторая параллелепипеидальная подобласть, внутри которой сетка должна остаться согласованной. Предлагаемый алгоритм можно условно разбить на две основные части: построение последовательности подобластей объединения и процедуру объединения элементов.

Построение последовательности подобластей объединения начинается от первой подобласти объединения, которая определяется как разность всей расчетной области и заданной параллелепипеидальной подобласти. Последующие подобласти объединения строятся вложенными в предыдущие (т.е. являются частью предыдущих). Чем больше будет построено таких подобластей, тем больше будет объединений. От формы подобластей объединения также зависит и то, насколько пропорциональными (по своим размерам по  $x$ ,  $y$  и  $z$ ) получатся конечные элементы после объединений. Форма подобласти объединения определяется коэффициентами (являющимися параметрами алгоритма), определяющими допустимые соотношения сторон угловых элементов подобласти. Процесс построения несогласованной сетки проиллюстрирован на рис. 3, жирными линиями на нем показаны границы подобластей объединения.

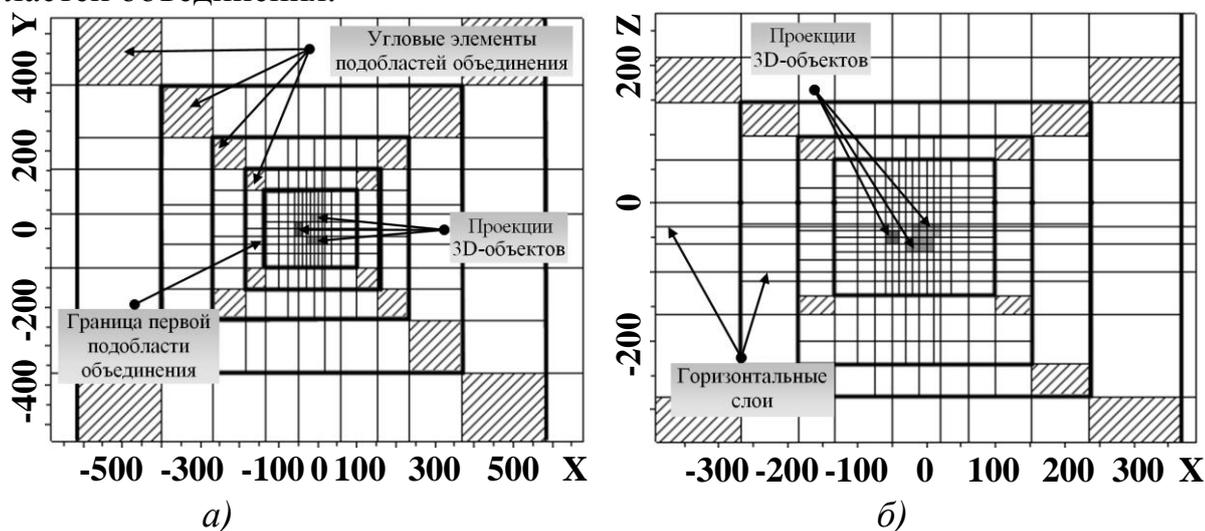


Рис. 3. Фрагменты сечений несогласованной сетки плоскостями  $z=0$  (а) и  $y=0$  (б) с проекциями трехмерных объектов

После построения подобластей объединения начинаются объединения элементов. При этом в один элемент могут объединяться несколько элементов, и полученный элемент впоследствии также может быть объединен с другими элементами. Естественно, объединяются лишь элементы, которые принадлежат одному и тому же реальному объекту. Если объединение произошло,

образуется новый элемент с близкими по длине сторонами (степень близости является параметром метода).

Использование несогласованных сеток позволяет уменьшить число узлов и элементов в сетке примерно от трех до семи раз по сравнению с регулярной сеткой.

Если в расчетной области присутствуют шестигранные объекты, то для аппроксимации непараллельных координатным плоскостям границ таких объектов используется линейная деформация уже построенной несогласованной параллелепипедальной сетки. Очевидно, в этом случае помимо самого шестигранного объекта также должен быть задан и параллелепипед, из которого деформацией будет построена соответствующая шестигранная подобласть.

Решение трехмерных задач геоэлектрики, в которых число трехмерных неоднородностей (объектов) иногда может достигать многих десятков, можно значительно ускорить, применяя технологию многоэтапного выделения поля. В этом случае на каждом этапе решается задача, в которой в расчетной области помимо аномального по проводимости объекта, являющегося источником искомого на данном этапе поля, также присутствуют объекты, которые имеют аномальную проводимость, но источниками поля на данном этапе не являются, а значит, в их окрестности не требуется делать сгущение сетки, достаточно лишь учесть их границы. Такую сетку можно строить, основываясь на регулярной сетке, построенной для объекта, являющегося источником, в которую просто добавляются соответствующие координатные плоскости для учета границ всех остальных объектов (не являющихся источниками на данном этапе). Однако в случае большого числа объектов это может приводить к тому, что уже на этапе построения регулярной сетки число координатных плоскостей в ней становится слишком большим. Это в свою очередь сказывается на качестве несогласованной сетки, так как из-за добавленных координатных плоскостей шаги в регулярной сетке измельчаются по всем направлениям и в результате из нее удаляется гораздо меньше «лишних» узлов. Поэтому был разработан другой подход, заключающийся во вставке границ объектов, не являющихся источниками поля, в уже готовую несогласованную сетку, построенную для объекта-источника поля. Очевидно, такой подход требует соответствующего разбиения ячеек несогласованной сетки. Однако в этом случае в сетке могут появляться так называемые «перехлесты» – ситуации, когда вершины одной грани являются терминальными и лежат внутри другой, у которой какие-либо вершины в свою очередь являются терминальными узлами, лежащими на первой. «Перехлестнувшиеся» ячейки можно доразбить, но при этом есть вероятность возникновения новых «перехлестов», поэтому приходится доразбивать не только ячейки, непосредственно пересекаемые границами вставляемых объектов, но и некоторые окружающие их. Пример вставки объекта в несогласованную сетку, образование и доразбиение перехлеста приведен на рис. 4. Построенные подобным образом сетки резко

сокращают время расчета, так как добавление даже большого числа объектов не приводит к резкому увеличению числа узлов и элементов сетки.

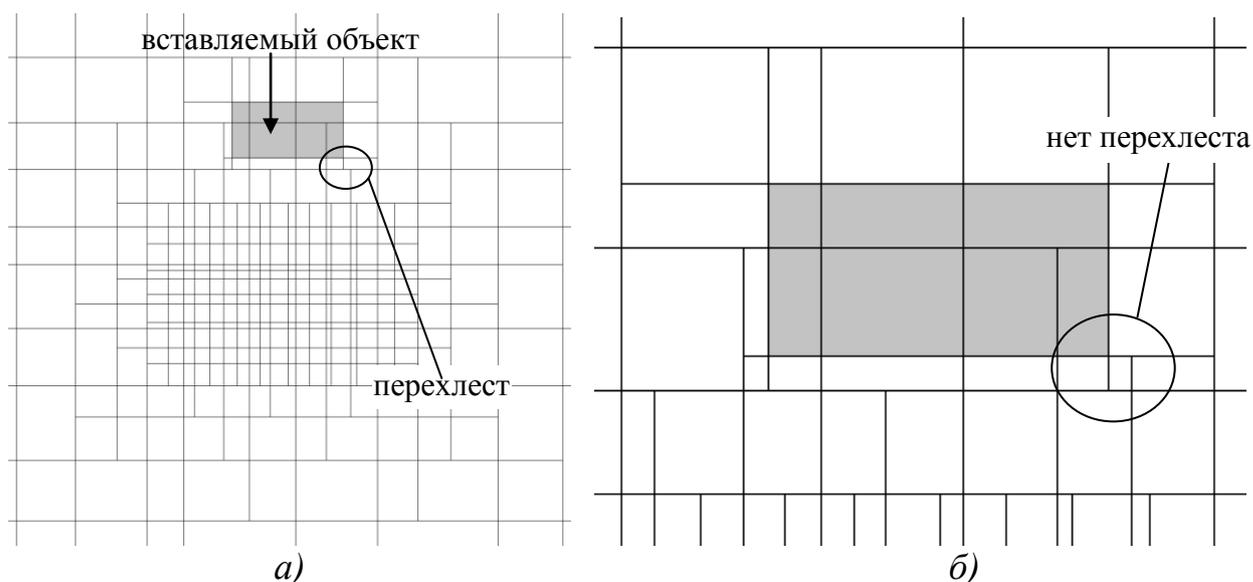


Рис. 4. Фрагмент сечения несогласованной сетки после вставки объекта (а) и ее укрупненная часть после устранения «перехлеста» (б)

Для решения задач геоэлектрики с техногенными объектами, такими как скважины, трубы или железнодорожный рельс, в работе предлагаются методы построения специальных регулярных шестигранных сеток и сеток, являющихся объединением нескольких сеток, построенных по разным алгоритмам. Пример такой сетки для геоэлектрической задачи, в расчетной области которой присутствуют три трубы разного диаметра, приведен на рис. 5.

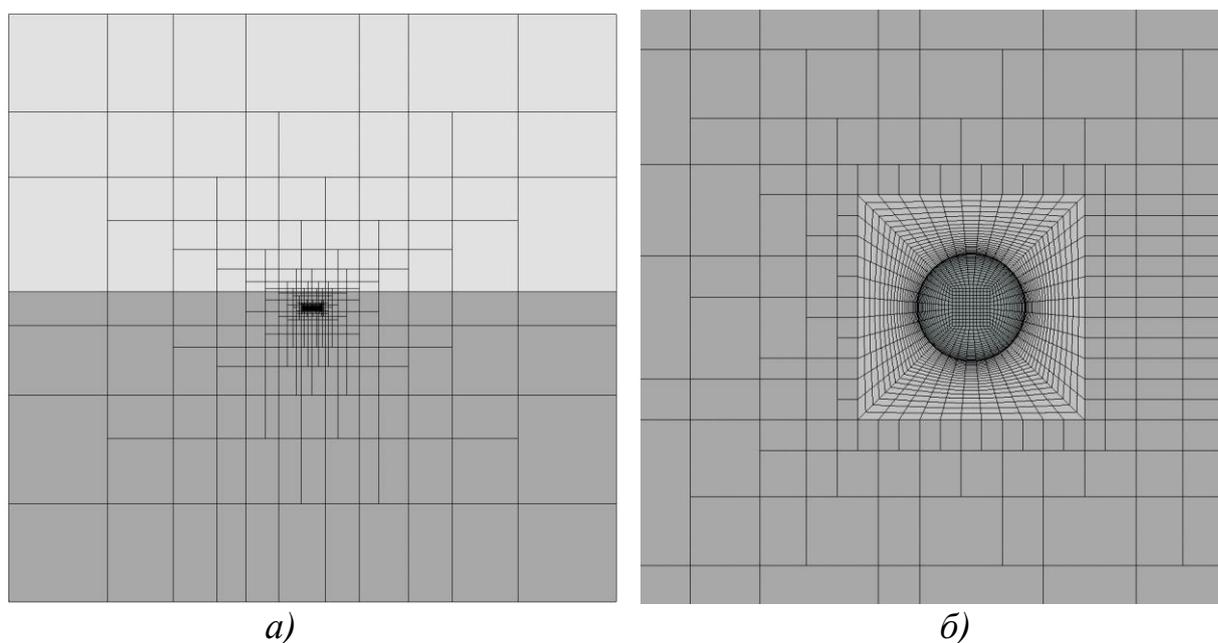


Рис. 5. Общий вид сетки в сечении XZ (а) и укрупненная часть в окрестности одной из труб (б)

В этой же главе рассмотрен специальный метод, позволяющий достаточно быстро с заданной точностью вычислять значения конечноэлементного решения и его производных на шестигранных конечных элементах.

**Третья глава** диссертационной работы посвящена исследованию разработанных методов построения трехмерных сеток с параллелепипеидальными и шестигранными ячейками для решения задач геоэлектромагнетизма с различными источниками поля. Рассмотрены примеры решения задач с использованием процедуры многоэтапного выделения поля. Предложен метод построения неполного разложения Холесского, основанный на перенумерации узлов конечноэлементной сетки в ситуациях, когда при использовании стандартных способов нумерации узлов сетки это разложение построить невозможно.

Сущность многоэтапной технологии выделения поля заключается в представлении искомого поля полной трехмерной задачи в виде прямой суммы получаемых на каждом этапе полей. Алгоритм этого метода заключается в следующем. На первом шаге с помощью решения задачи меньшей размерности вычисляется поле горизонтально-слоистой среды. Затем на втором шаге вычисляется поле влияния первого объекта, т.е. решается трехмерная задача в области, представляющей собой горизонтально-слоистую среду с одной трехмерной неоднородностью. На третьем шаге вычисляется поле влияния второго объекта относительно среды, содержащей первый объект, т.е. решается задача в горизонтально-слоистой среде, содержащей два объекта, но при этом только второй объект является источником поля. Такая процедура повторяется для всех 3D-объектов модели, и на последнем шаге выполняется расчет поля влияния последнего объекта относительно среды, содержащей все остальные трехмерные объекты.

Математическая модель для расчета поля влияния трехмерного объекта при использовании технологии многоэтапного выделения поля имеет вид

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}^a \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial t} = (\sigma - \sigma^{3D-0}) \mathbf{E}^{3D-0},$$

где  $\sigma^{3D-0}$  и  $\mathbf{E}^{3D-0}$  – распределения проводимости и напряженности электрического поля в трехмерной среде, поле для которой было рассчитано на предыдущем этапе алгоритма и относительно которой на данном этапе вычисляется поле влияния очередного объекта. При этом  $\sigma$  – распределение проводимости в трехмерной среде, содержащей трехмерные объекты, поля влияния которых вычислялись на предыдущих этапах алгоритма, и объект, поле влияния которого вычисляется на текущем этапе. Поэтому  $\sigma \neq \sigma^{3D-0}$  только в месте расположения текущего объекта. На последнем этапе работы алгоритма  $\sigma$  – распределение проводимости в трехмерной среде, соответствующей всей трехмерной модели.

В принципе, технология многоэтапного выделения поля не запрещает на текущем этапе использовать в качестве источников поля несколько объектов. Это сокращает общее число этапов, но повышает их сложность из-за увеличения числа узлов и ячеек конечноэлементных сеток. С этой точки зрения решение задач с помощью выделения только поля горизонтально-слоистой среды является частным случаем многоэтапной процедуры, состоящим всего из двух этапов, где на втором этапе все объекты заданы в качестве источников поля.

На рис. 6. изображена модель, содержащая 20 объектов. Для этой модели были выполнены расчеты с помощью технологии выделения поля горизонтально-слоистой среды на согласованной сетке и на несогласованной сетке, а также с помощью технологии многоэтапного выделения поля.

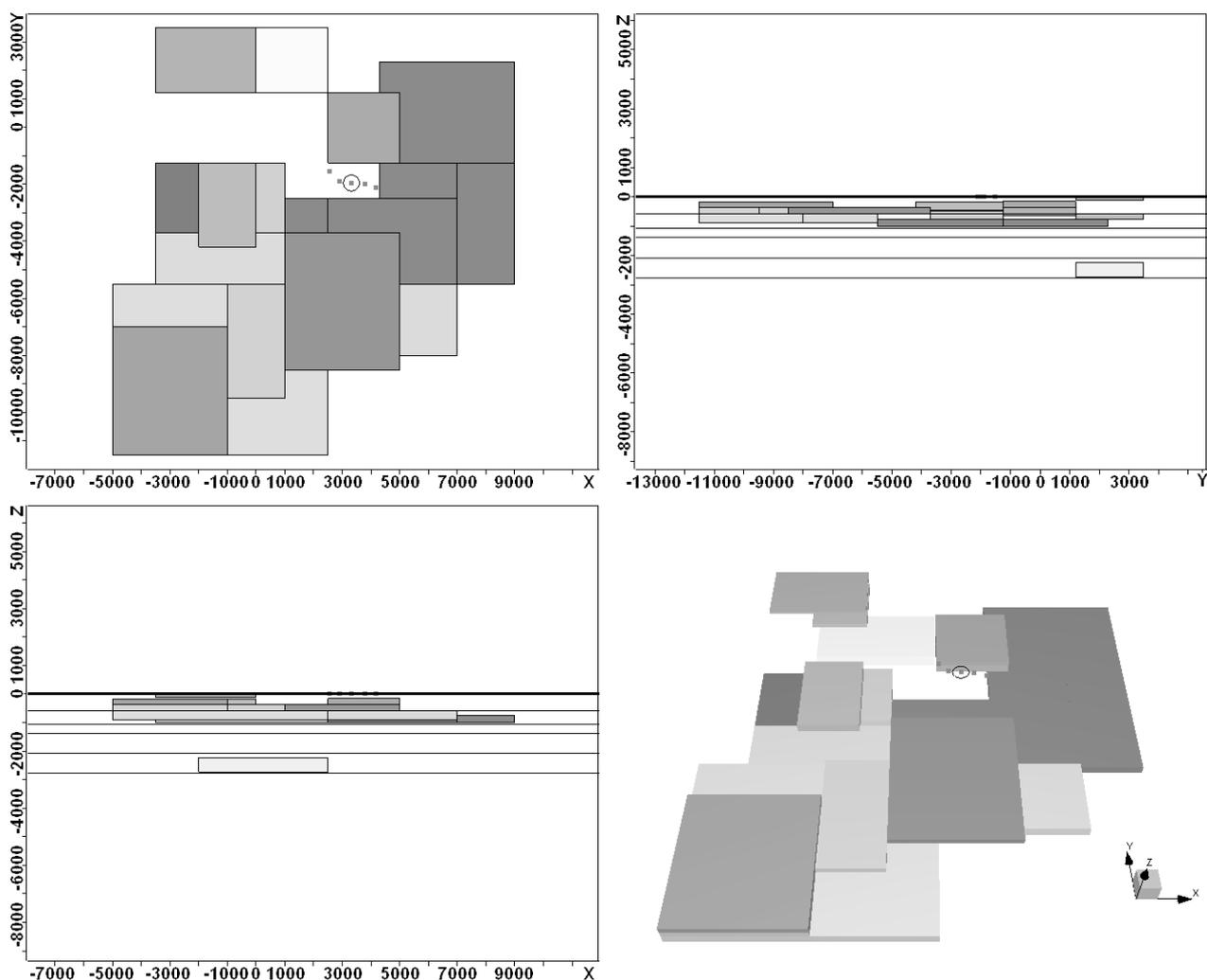


Рис. 6. Геоэлектрическая модель, полученная при интерпретации практических данных геоэлектроразведки

Используемые несогласованные сетки были построены предложенными в работе методами. Фрагменты сечений согласованной и несогласованной сеток при решении задачи с помощью технологии выделения поля горизонтально-слоистой среды изображены на рис.7.

На рис. 8. изображен фрагмент того же сечения сетки на заключительном этапе (в сетке присутствуют все объекты) решения задачи с помощью многоэтапной технологии выделения поля.

Соответствующие вычислительные затраты на решение этой задачи на компьютере Intel(R) Core(TM) 2Quad CPU@2.40GHz приведены в табл. 1.

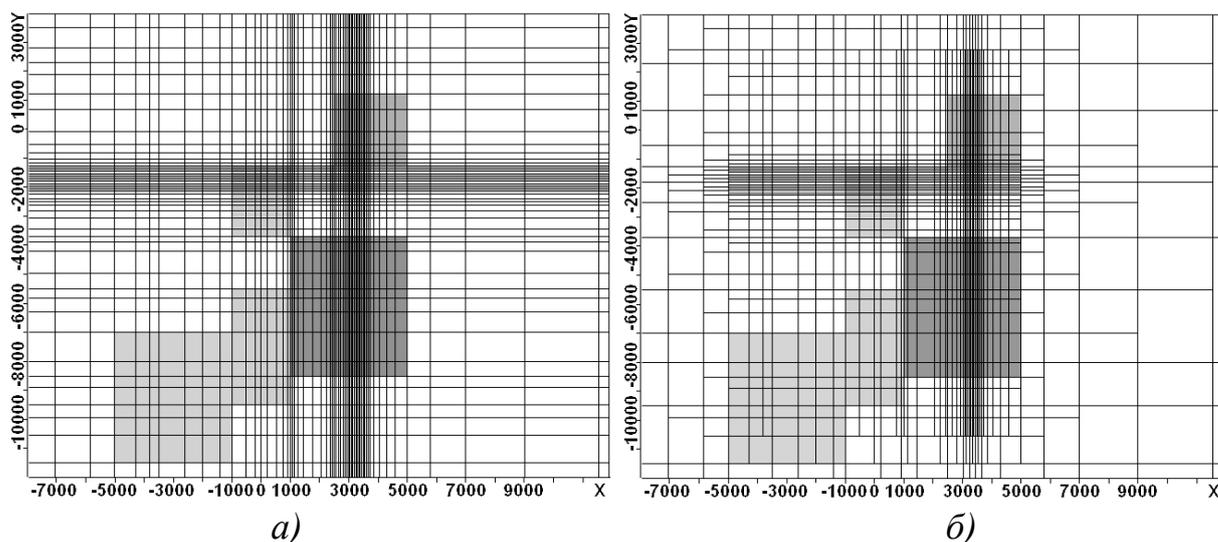


Рис. 7. Фрагменты сечения согласованной (а) и несогласованной (б) сеток плоскостью  $z=-500$

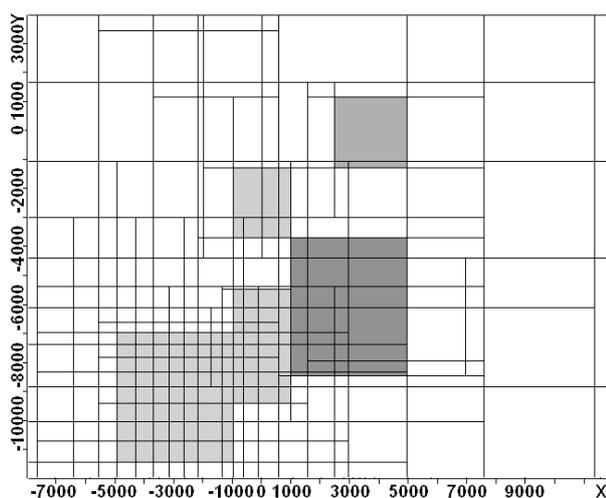


Рис. 8. Фрагмент сечения несогласованной сетки, построенной на последнем этапе при решении задачи с использованием многоэтапного выделения поля

Таблица 1

**Сравнение вычислительных затрат при использовании различных подходов к решению трехмерной задачи**

Метод	Число узлов	Полное время решения задачи
Выделение поля среды (согласованная сетка)	282240	4ч.
Выделение поля среды (несогласованная сетка)	101358	50м.
Многоэтапное выделение поля	макс. 20921	22м.

Под числом узлов для многоэтапного выделения поля в табл. 1 понимается максимальное число узлов среди сеток, построенных на разных этапах.

Исследования на различных практических моделях показали, что использование несогласованных параллелепипедальных и шестигранных конечноэлементных сеток позволяет уменьшить вычислительные затраты в 4-10 раз без потери точности. Использование многоэтапной процедуры выделения поля позволяет для последовательного расчета сократить вычислительные затраты в 2-4 раза, при этом увеличение эффективности достигается за счет применения специальных несогласованных сеток. Решение с использованием многоэтапной процедуры выделения поля на том же компьютере в параллельном режиме с распараллеливанием на 4 ядра заняло около 6 минут. Это обусловлено возможностью эффективного распараллеливания данного метода.

В **четвертой главе** диссертационной работы описаны основные реализованные модули и подсистемы (IPCC и EDEM-OB) программного комплекса GeoEM, разработанного для моделирования геоэлектромагнитных полей, в котором используются эффективные конечноэлементные вычислительные схемы, основанные на методе выделения поля, и реализовано автоматическое построение несогласованных конечноэлементных сеток для некоторых характерных для задач геоэлектрomagnetизма ситуаций.

Подсистема IPCC предназначена для вычисления сигнала ВП в частотной области и перевода его во временную область. Она состоит из четырех основных модулей, взаимодействие которых схематично показано на рис. 9.

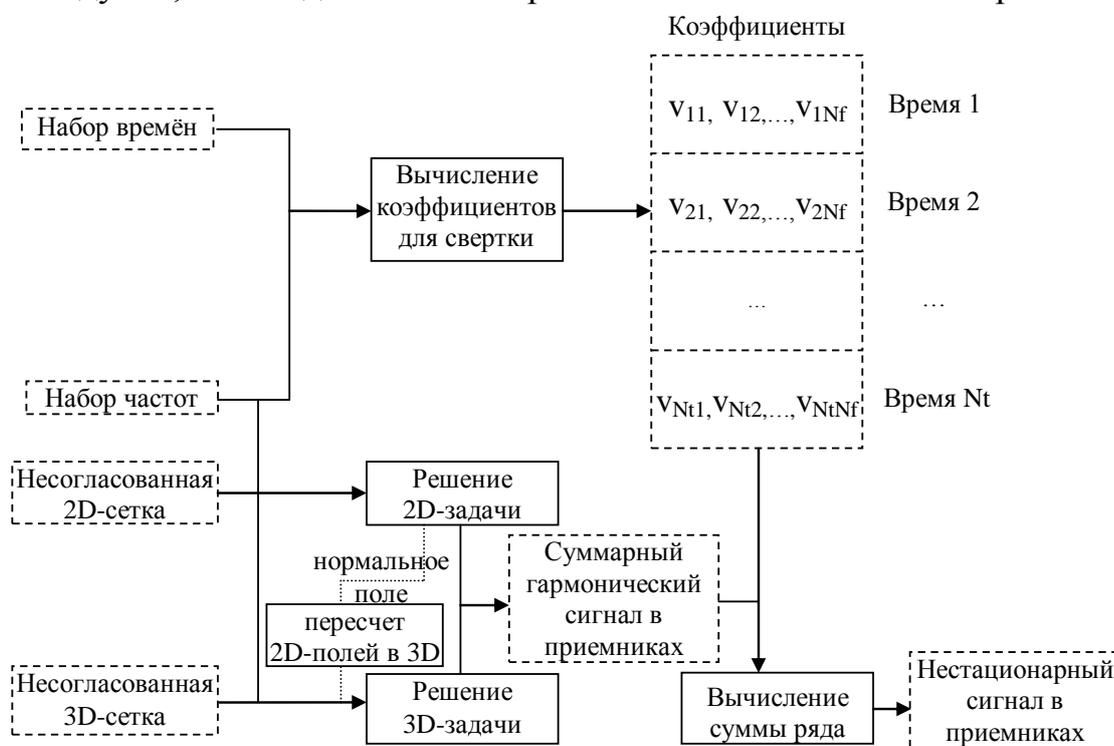


Рис. 9. Подсистема IPCC

Модуль вычисления коэффициентов реализует вычисление сумм  $\sum_k b_k \psi_i \left( \frac{k}{T} \right) \sin \frac{2\pi k}{T} \left( t + \frac{3}{8} T \right)$  и  $\sum_k b_k \psi_i \left( \frac{k}{T} \right) \cos \frac{2\pi k}{T} \left( t + \frac{3}{8} T \right)$ , необходимых для вычисления нестационарного сигнала (суммы (9)). Пунктиром на рисунке обозначены входные и выходные данные, а сплошной линией – программные модули.

Подсистема EDEM-OB (рис. 10) реализует моделирование электромагнитных полей, порождаемых вихревыми токами, наводящимися в высокопроводящих (металлических) объектах с параллельными координатным плоскостям границами. Пусть  $\hat{\mu} = \mu / \mu_0$  – относительная магнитная проницаемость, тогда соответствующая система уравнений имеет вид

$$-\frac{1}{\mu^{\Omega^\sigma}} \Delta \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \text{ в } \Omega^\sigma, \quad (10)$$

$$-\text{div} \hat{\mu} \text{grad} U = 0 \text{ в } \Omega \setminus \Omega^\sigma, \quad (11)$$

где  $\mathbf{V} = -\mu \text{grad} U$ . На границах между проводящими и непроводящими подобластями задаются условия сопряжения выражающие непрерывность тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  и нормальной составляющей индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

Для решения конечноэлементной СЛАУ системы (10)-(11) разработан специальный блочно-итерационный решатель, позволяющий при расчете долгих процессов (более 10мс) значительно сократить время решения задачи.

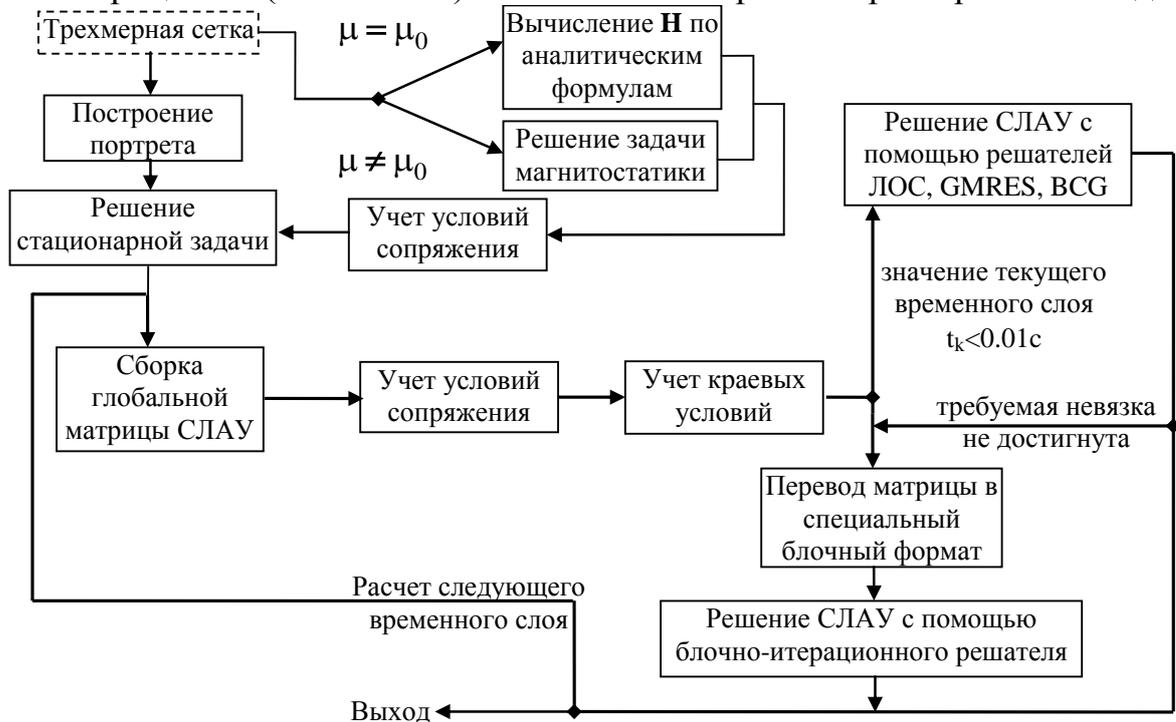


Рис. 10. Подсистема EDEM-OB

Входными данными главного модуля подсистемы является трехмерная сетка и параметры материалов ячеек. Если в расчетной области присутствуют ферромагнетики (материалы с  $\mu \neq \mu_0$ ), то для нахождения значений поля  $\mathbf{H}$  при

включенном в генераторной петле тока решается задача магнитостатики с использованием полного и неполного потенциалов магнитных полей. Для нахождения значений вектора электромагнитного потенциала  $A$  на постоянном токе решается стационарная задача (вычисленные значения поля  $H$  используются для учета условий сопряжения). В главном цикле решения нестационарной задачи (цикл по временным слоям – отмечен жирными линиями) выполняются сборка конечноэлементной СЛАУ, учет краевых условий и условий сопряжения и решение СЛАУ. При этом для расчета ранних времен (менее 10мс) используется решатель ЛОС (Ю.Г. Соловейчик), а для остальных времен или в случае, если ЛОС не достигла требуемой невязки за заданное число итераций, используется специально разработанный блочно-итерационный решатель.

Совместное использование электромагнитного потенциала  $A$  и скалярного магнитного потенциала  $U$  позволило существенно повысить эффективность решения задач с изолированными проводящими объектами в программном комплексе GeoEM.

В главе 4 также описаны модули построения согласованных и несогласованных трехмерных сеток с параллелепипеидальными и шестигранными ячейками ориентированные на решение задач геоэлектроразведки (их взаимодействие показано на рис. 11.), что отличает их от аналогичных модулей, используемых в других конечноэлементных пакетах и обуславливает высокую эффективность генерируемых ими специальных дискретизаций.

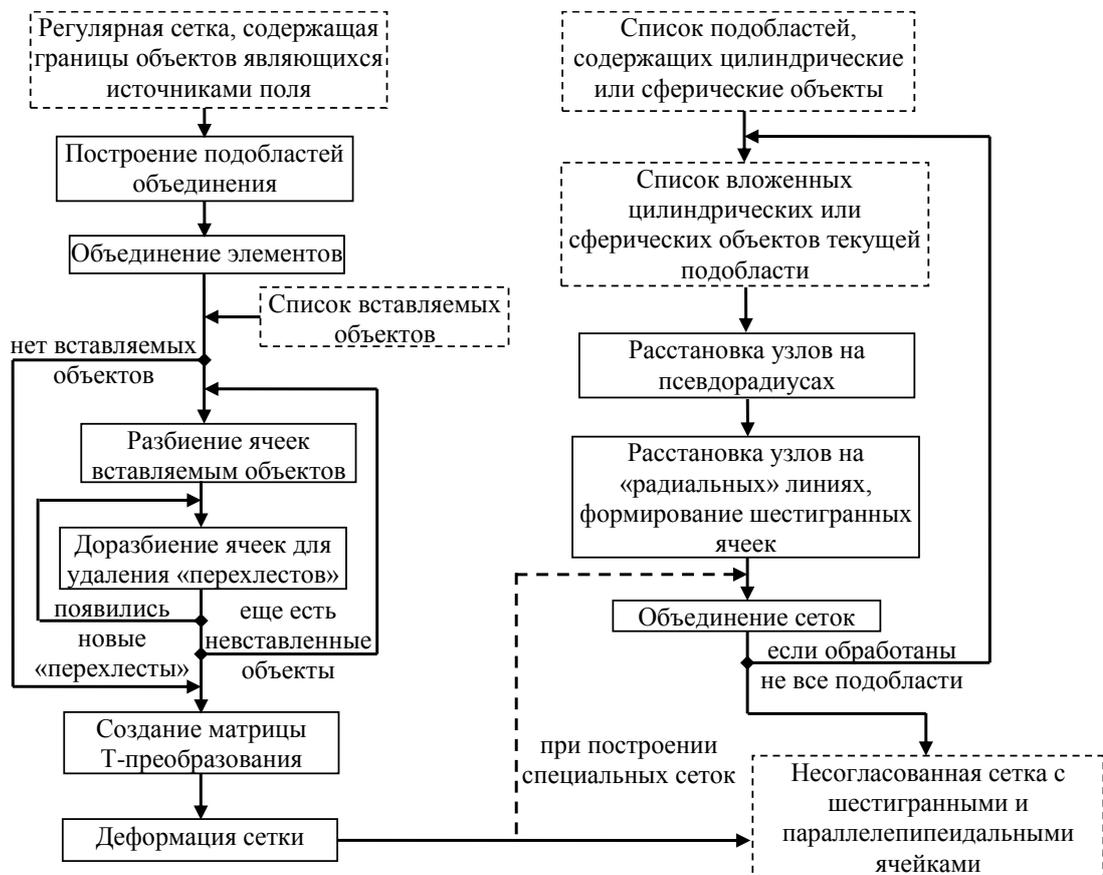


Рис. 11. Построение трехмерных сеток в GeoEM

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты проведенных в диссертационной работе исследований состоят в следующем.

1. Разработаны методы математического моделирования трехмерных полей вызванной поляризации с использованием модели частотной дисперсии Cole-Cole на основе конечноэлементной аппроксимации гармонических задач и технологии выделения поля вмещающей среды. Проведены расчеты трехмерных полей вызванной поляризации при решении практических задач геоэлектрики с различными источниками электромагнитного поля: горизонтальной и вертикальной электрическими линиями, круговым электрическим диполем, токовой петлей.

2. Разработан метод удаления «лишних» узлов из регулярных конечноэлементных сеток с ячейками в виде прямоугольных параллелепипедов и произвольных шестигранников. Использование нерегулярных несогласованных конечноэлементных сеток по сравнению с регулярными согласованными позволяет при сохранении точности конечноэлементного решения почти на порядок уменьшить вычислительные затраты при решении трехмерных задач за счет существенного сокращения размерности дискретного аналога задачи.

3. Разработаны методы построения несогласованных параллелепипеидальных сеток для решения различных задач геоэлектромагнетизма с использованием технологии многоэтапного выделения поля. Эти методы применялись при моделировании геоэлектромагнитных полей с источниками в виде токовой петли, горизонтальной и вертикальной электрических линий, кругового электрического диполя, а также при решении задач магнитотеллурики и позволили в несколько раз сократить вычислительные затраты для наиболее трудоемких задач.

4. Разработан метод перенумерации узлов несогласованной сетки с ячейками в виде параллелепипедов и шестигранников, позволяющий строить неполное разложение Холесского для дискретного аналога эллиптического оператора в ситуациях, когда при использовании стандартных способов нумерации узлов сетки это разложение построить невозможно. Разработанный метод позволяет в несколько раз уменьшить вычислительные затраты при моделировании на самых низких частотах магнитотеллурических полей и полей вызванной поляризации.

5. Разработанные методы и алгоритмы реализованы в виде модулей и подсистем программного комплекса GeoEM. Среди них подсистема IPCC вычисления полей вызванной поляризации по модели Cole-Cole и расчета полей ВП по модели, базирующейся на задании ЭДС ВП, что дает пользователю-геофизику возможность выполнять моделирование полей ВП разными методами, а также подсистема EDEM-OB моделирования вихревых полей в изолированных трехмерных объектах. С помощью этого комплекса и реализованных в нем модулей были выполнены расчеты геоэлектромагнитных полей для различных задач геоэлектрики с контролируемыми и естественными источниками.

Основные результаты диссертации **опубликованы** в следующих работах:

1. Персова М. Г. Сравнение различных подходов к численному моделированию трехмерных полей вызванной поляризации / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Д. В. Вагин, П. А. Домников // Доклады АН ВШ. – 2011. – № 2. – С. 89–101.
2. Персова М. Г. О подходе к выполнению 3D-инверсий данных зондирований нестационарным электромагнитным полем на основе конечноэлементного моделирования / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Д. В. Вагин, М. Г. Токарева, А. В. Чернышев // Научн. вестник НГТУ. – 2011. – № 2 (43). – С. 97–106.
3. Домников П. А. Моделирование трехмерных магнитотеллурических полей векторным методом конечных элементов и возможности распараллеливания на процессорах с общей памятью / П. А. Домников, М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Д. В. Вагин // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 3 (40). – С. 87–96.
4. Персова М. Г. Применение метода конечных элементов для моделирования трехмерных нелинейных магнитных полей в электротехнических устройствах / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, З. С. Темлякова, М. В. Абрамов, Д. В. Вагин, М. В. Гамадин // Электротехника. – 2011. № 6. – С. 13–20.
5. Илюшов Н.Я. Компьютерное моделирование частотозависимого резистора различной формы / Н. Я. Илюшов, Д. В. Вагин, С. Г. Назаров // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. – 2011. – № 1. – С. 310–313.
6. Коробейников С. М. Растворение пузырьков диагностических газов в трансформаторном масле / С. М. Коробейников, Ю. Г. Соловейчик, А. Л. Бычков, Д. В. Вагин, А. В. Мелехов, А. Ю. Рыжкина // Теплофизика высоких температур. – 2011. – Т. 49. – № 5. – С. 771-776.
7. Персова М. Г. Компьютерное моделирование работы тяговых асинхронных электродвигателей на основе квазитрехмерных и трехмерных моделей электромагнитного поля / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, З. С. Темлякова, М. В. Абрамов, Д. В. Вагин, М. В. Гамадин // Транспорт: наука, техника, управление. –2011. – № 12. – С. 3–7.
8. Вагин Д. В. Использование несогласованных сеток для решения задач геоэлектрики с использованием узлового МКЭ / Д. В. Вагин // Актуальные проблемы электронного приборостроения. АПЭП–2010 : Материалы IX международной НТК. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – Т. 6. – С.77–80.
9. Вагин Д. В. Моделирование нестационарного электромагнитного поля с зависимостью проводимости от частоты по формуле Cole-Cole / Д. В. Вагин // Наука. Технологии. Инновации. НТИ–2009 : Материалы Российской НТК. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – Т. 1. – С. 82–84.
10. Вагин Д. В. О построении неполного разложения Холесского при решении трехмерных стационарных задач геоэлектрики с помощью узлового

МКЭ / Д. В. Вагин // Наука. Технологии. Инновации. НТИ–2010 : Материалы Российской НТК. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – Т. 1. – С.50–52.

11. Вагин Д. В. Построение конечноэлементных сеток с шестигранными ячейками в характерных для задач геоэлектродинамики ситуациях / Д. В. Вагин // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – № 2 (60). – С. 111–116.

12. Вагин Д. В. Построение шестигранных сеток в областях с несоосными цилиндрическими объектами, вложенными друг в друга / Д. В. Вагин // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – №. 1 (59). – С. 73-78.

13. Вагин Д. В. Разработка метода адаптации конечноэлементных сеток для решения нестационарных задач геоэлектрики / Д. В. Вагин // Информатика и проблемы телекоммуникаций : Материалы Российской НТК – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – Т. 1. – С. 41–43.

14. Вагин Д. В. Расчет нестационарного электромагнитного поля от короткозамкнутой петли / Д. В. Вагин // Информатика и проблемы телекоммуникаций : Материалы Российской НТК. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – Т. 1. – С. 38–40.

15. Вагин Д. В. Построение несогласованных параллелепипедальных сеток для решения трехмерных задач геоэлектрики / Д. В. Вагин, И. Е. Аврунева, М. В. Абрамов, А. Г. Задорожный // Актуальные проблемы электронного приборостроения. АПЭП–2010 : Материалы X международной конференции. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – Т. 6. – С. 111–115.

16. Илюшов Н. Я. Компьютерное моделирование частотнозависимого резистора с различными характеристиками материалов / Н. Я. Илюшов, Д. В. Вагин // Наука. Промышленность. Оборона. : Труды Всероссийской научно-технической конференции. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010 – С. 255–256.

17. Персова М. Г. Моделирование нелинейного магнитного поля в циклотроне с использованием метода конечных элементов / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, М. В. Абрамов, Д. В. Вагин, // Актуальные проблемы электронного приборостроения. АПЭП–2010 : Материалы X международной конференции. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – Т. 6. – С. 139–143.

18. Персова М. Г. Принципы разработки и возможности программных комплексов конечноэлементного моделирования электромагнитных полей в технических устройствах и в задачах геоэлектрики / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, М. В. Абрамов, Д. В. Вагин, П. А. Домников // Научное программное обеспечение. PSI-11 : Материалы международной Ершовской конференции по информатике. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2011. – С.193–199.

19. Персова М. Г. Методы и алгоритмы решения трехмерных прямых и обратных задач геоэлектрики на базе конечноэлементных аппроксимаций / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Г. М. Тригубович, М. Г. Токарева, Д. В. Вагин // Материалы Всероссийской школы-семинара им. М.Н.

Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям Земли ЭМЗ-2011. – Спб. : СПбГУ, 2011. – Т. 2. – С. 94–99.

20. Персова М. Г. Программное обеспечение для моделирования трехмерных электромагнитных полей в различных технологиях электроразведки / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Г. М. Тригубович, Д. В. Вагин, П. А. Домников // Материалы Всероссийской школы-семинара им. М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям Земли. ЭМЗ-2011. – Спб. : СПбГУ, 2011. – Т. 2. – С. 467–471.

Отпечатано в типографии Новосибирского  
государственного технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К.Маркса, 20,  
тел./факс (383) 346-08-57  
формат 60 X 84/16 объем 1.5 п.л., тираж 100 экз.  
Заказ \_\_\_\_\_ подписано в печать \_\_\_\_\_ 2012 г.